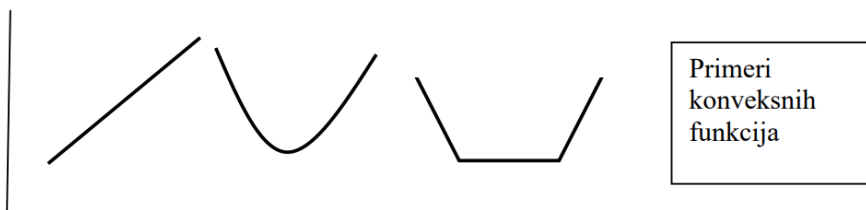


PITANJA SA KOLOKVIJUMA I ROKOVA 2020/21

1. Napiši matematički izraz za konveksnost funkcije (4,5str)

- ❖ Konveksna funkcija: za funkciju $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je *konveksna* na konveksnom skupu S ako važi $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in S$ i za svako $\alpha \in [0,1]$.



Funkcija f je *strogo konveksna* na skupu S ako važi jači uslov $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$ i za svako $\alpha \in (0,1)$.

2. Definicija baznog rešenja (8.str)

Bazno rešenje sistema predstavlja reš ovog sist za koga postoji $(m \times n)$ podmatrica

A_B matrice A koja je regularna ($\det A_B \neq 0$) i takva da je u ovom rešenju svaka nezavisna promenljiva čija kolona koeficijenata ne nalazi u A_B jednaka 0. Prom koje odgovaraju kolonama podmatrice A_B zovu se *bazne promenljive* a preostale promenljive *nebazne*. Skup svih baznih promenljivih čini *bazu* baznog reš, dok je A_B *matrica baze*.

3. Definicija dopustivog i susednog resenja (8.str)

Bazno dopustivo rešenje je ono bazno reš koje zadovoljava i uslove nenegativnosti. Ako ne postoji bazno reš sist koje je dopustivo za problem tada je dopustiva oblast probl prazna. Svakom dopustivom baznom rešenju odgovara 1 teme oblasti D standardnog oblika LP.

Susedna bazna dopustiva rešenja- dva bazna dop reš su susedna ako im se baze razlikuju u samo jednoj promenljivoj.

4. Osnovni koraci Simpleksa (8/9str)

❖ Koraci simpleksa:

1) **Početni korak (inicijalizacija) : Nalaženje početnog baznog rešenja**- Generisati neko početno bazno dopustivo rešenje $X_0 = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$, početna baza: $B_0 = B = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$, početna vrednost funkcije cilja: $F_0 = 0$, dopustive oblasti;

2) **Iterativni korak** za $k=0, 1, 2, \dots$

3) *Test optimalnosti*: Ako teme X_k nema boljih susednih temena, X_k je optimalno.

a) *STOP*

b) Ako X_k nije opt, generisati bolje teme X_{k+1} dopustive oblasti, tj naći susedno bazno dopustivo reš za koje je vrednost f-je cilja bolja (veća u slučaju maksimizacije, manja u slučaju minimizacije) i usvojiti ga kao tekuće rešenje.
4b) Vratiti se na korak 2.

5. Razlog upotrebe kanonskog oblika u rešavanju problema LP (9,10 str)

Posebna forma problema LP:

$$\{1\} \text{ (maksimizirati) } f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \{1\}$$

p.o.

$$\{2\} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \{2\}$$

$$\{3\} x_1, \dots, x_{n+m} \geq 0, \{3\}$$

$$\llbracket x_{n+m} - \text{predstavljaju } s_i \text{ tj izravnavajuće promenljive} \rrbracket$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) - \text{nebazne promenljive}$$

Gde su promenljive podeljene u dve grupe:

$$(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) - \text{bazne promenljive}$$

6. Koji koeficijenti stoje uz veštačke i izravnavajuće promenljive u funkciji cilja kanonskog oblika u slučaju maksimizacije (13/14str)

Kanonski oblik $\approx$ standardni oblik u kome se svaka promenljiva iz B javlja samo u jednoj jednačini sa koeficijentom 1.

Svi slobodni članovi u ograničenju-nenegativni-dopustiva baza.

Ako je LP u simetričnom obliku dodaju se *izravnavajuće promenljive* ($\geq \rightarrow - \rightarrow =$; $\leq \rightarrow + s_i \rightarrow =$).

Ako je standardni oblik tipa jednačina ili sa $-s_i$ dodaju se *veštačke promenljive*.

7. Kako na osnovu simpleks tabele znamo da je funkcija neograničena (14.str)

Ako za neku nebaznu promenljivu x_s^k vazi da je $c_s^k > 0$ i $a_{is}^k \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$, tada funkcija cilja neograničeno raste duž neograničene ivice dopustive oblasti sa krajnjom tačkom u X_k i pravcem jednakim p_s^k , tj u svim tačkama X oblika: $X = X_k + \alpha p_s^k$ pri neograničenom povećavanju nenegativnog parametra α . U tom slučaju problem LP nema rešenje pa simpleks staje.

8. Uslov da Simpleks ima višestruko optimalno rešenje (15str)

❖ Višestruka optimalna rešenja

Neka je simpleks metoda u poslednjoj k -toj iteraciji došla do nekog baznog rešenja X_k sa maksimalnom vrednošću funkcije cilja F_k tj. $c_j^k \leq 0, j = \{1, 2, \dots, n\}$

Ako je za bar neko $s = \{1, 2, \dots, n\}, c_s^k = 0$, tada nikakvo povećanje vrednosti nebazne promenljive x_s^k , pri čemu su sve ostale nebazne $= 0$, ne bi promenilo vrednost funkcije cilja, tj ova vrednost bi ostala jednaka F_k . To znači da ovaj probl LP ima još optimalnih rešenja koja sva čine jednu stranu dopustive oblasti problema. Takva opt strana bi se mogla identifikovati na sl način: za svako $s = \{1, 2, \dots, n\}$ za koje $c_s^k = 0$ ivica sa krajnjom tačkom u X_k i pravcem $p_s^k (X = X_k + \alpha p_s^k)$ predstavlja ivicu optimalne strane. Ako je ivica ograničena, onda se još jednom iteracijom simpleksa, u kojoj će bazi ući x_s^k , može odrediti još jedno opt rešenje probl LP.

Obeležimo sa $X'_1, X'_2, \dots, X'_l$ sva temena optimalne str, a sa $p'_1, p'_2, \dots, p'_h$ sve dobijene pravce neograničenih ivica (ako psotoje), onda se bilo koja tačka X optimalne str može prikazati kao:

$$X = \sum_{i=1}^l \lambda_i X'_i + \sum_{j=1}^h \alpha_j p'_j \text{ gde je } \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = \{1, 2, \dots, l\} \text{ i } \alpha_j \geq 0, j = \{1, 2, \dots, h\}$$

Kada je strana ograničena onda je bilo koja tačka X optimalne str definisana sa

$$X = \sum_{i=1}^l \lambda_i X'_i \text{ gde je } \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = \{1, 2, \dots, l\}$$

Ako u poslednjoj integraciji dođe do tačke koja se može zapisati kao $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$, ta tačka pripada duži pa je opt reš cela duž.

9. Kriterijum ulaska nebazne promenljive u bazu (svejedno koji) (17str)

Radi sprečavanja cikliranja, razvijen je čitav niz tehnika kojim se obezbeđuje konačnost simpleksa i u slučaju. Jedna od njih je *Blendovo pravilo*- definiše kriterijume za ulazak i izlazak prom iz baze: Ako su sve promenljive uređene u niz $x_1, x_2, \dots$, tada u svakoj iteraciji u bazu ulazi *prva* nebazna promenljiva x_s^k iz ovog niza za koju je $c_s^k > 0$ a iz baze izlazi *prva*

promenljiva x_{n+1}^k iz ovog niza za koju je $\frac{b_r^s}{a_{rs}^k} = \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \left\{ \frac{b_i^k}{a_{is}^k} : a_{is}^k > 0 \right\}$

10. Napisati primal za model LP u simetričnom obliku i njemu odgovarajući dual (18.str)

Neka je zadat LP probl u simetričnom obliku:

$$(maksimizirati) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

p.o.

$$\{10\} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \{10\}$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Ovakav problem nazivamo *primalni problem* ili *primal*.

Ovom probl se pridružuje tzv *dualni problem* ili *dual* koji ima sl simetričnu formu:

$$minimizirati \Phi(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

p.o.

$$\{11\} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_m \leq c_1$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_m \leq c_2$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_m \{11\}$$

$$y_1, \dots, y_m \geq 0$$

U matrično-vektroskom obliku:

$$(max) F(x) = c^T x$$

p.o.

$$Ax \leq b;$$

$$x \geq 0$$

$$(min) \Phi = b^T y$$

p.o.

$$A^T y \geq c;$$

$$y \geq 0$$

Dual ima onoliko promenljivih koliko primal ima ograničenja i onoliko ograničenja koliko primal ima promenljivih. Koeficijenti u funkciji cilja duala predstavljaju slobodne članove primala i obrnuto.

11. Primal i dual nesimetričan (19str)

❖ Nesimetričan oblik LP u dual:

- (i) Problem minimizacije funkcije $F(x)$ može se svesti na probl maksimizacije funkcije $-F(x)$.
- (ii) Množenjem sa -1 , ograničenja se menjaju : $\geq \rightarrow \leq$ $\leq \rightarrow \geq$.
- (iii) Ograničenja oblika $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ se može zameniti sa dva ograničenja

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \text{ i } -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$$

- (iv) Ako za promenljivu x_j ne postoji nikakav uslov koji ograničava njen znak, tj x_j je neograničeno po znaku, tada se u problem uvodi smena $x_j = x_j^+ - x_j^-$ gde su $x_j^+, x_j^- \geq 0$.
- (v) Ako promenljiva x_j treba da ispunjava uslov $x_j \leq 0$, tada se u probl uvodi smena $x_j = x_j^-$, gde je $x_j^- \geq 0$.

Sad se od ovako transformisanog probl može transformisati u dualni probl na već definisan način.

12. Svojstvo simetrije primala i duala (19,20str)

❖ Simetrija primala i duala

Dual dualnog problema {11} je jednak primalnom problemu {10}. Usled svojstva simetrije sve osobine odnosa dualnog problema prema primalu važe i obrnuto. Prema ovim pravilima tipovi ograničenja u dualu zavise od znaka promenljivih primala, dok znaci promenljivih duala zavise od tipova ograničenja primala

Primalni problem (ili Dualni probl)	Dualni problem (ili Primalni probl)
Maksimizirati $F(x)$ (ili $\Phi(y)$)	Minimizirati $\Phi(y)$ (ili $F(x)$)
Ograničenje i primala (ili duala)	Promenljiva y_i (ili x_i)
Tipa $\leq$	Nenegativna
Tipa $\geq$	Nepozitivna
Tipa $=$	Neograničena po znaku
Promenljiva x_i (ili y_i)	Ograničenje j duala (ili primala)
Nenegativna	Tipa $\geq$
Nepozitivna	Tipa $\leq$
Neograničena po znaku	Tipa $=$

13. Svojstvo komplementarnosti u dualu (20.str)

❖ Komplementarnost optimalnih rešenja

Ako kordinate tačke $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ zadovoljavaju sledeće uslove:

1. Ako je x_j izravnavajuća promenljiva dodata i -tom ograničenju primala, tada je $y_i^* = -c_j^*$;
2. Ako je x_j izravnavajuća promenljiva oduzeta od i -tom ograničenja primala, tada je $y_i^* = c_j^*$;
3. Ako je x_j veštačka promenljiva dodata i -tom ograničenju primala, tada je $y_i^* = -M - c_j^*$; (kod min funkcije cilja primala je $y_i^* = M - c_j^*$)

Tada je y_i^* optimalno rešenje duala. Pri tome y_i^* zadovoljava i uslov

4. $c_j^* = c_j - A_j^T y^*$, $j = \{1, 2, \dots, n\}$, gde je A_j j -ta kolona matrice ograničenja A primala.

14. Slaba dualnost (20str)

❖ Slaba dualnost

Ako je x dopustivo rešenje primala, a y dopustivo rešenje duala, tada je $F(x) \leq \Phi(y)$. Svojstvo slabe dualnosti obezbeđuje gornju granicu $\Phi(y)$ maksimalne vrednosti funkcije cilja primala, odnosno donju granicu $F(x)$ minimalne vrednosti duala. (Kad imamo maksimizaciju funkcije $F(x)$ tj minimizaciju $\Phi(y)$ nejednakost bi onda bila $F(x) \geq \Phi(y)$).

- a) Ako je x dopustivo rešenje primala koje nije optimalno i $F(x) = \Phi(y)$, tada tačka y nije dopustivo rešenje duala.
- b) Ako je x dopustivo rešenje primala, y dopustivo rešenje duala i $F(x) = \Phi(y)$, tada tačke x i y su optimalna rešenja ovih problema.

Svojstvo b) omogućuje da se za zadatu dopustivu rešenja x primala i y duala, utvrdi da su ona optimalna bez rešavanja ovih problema simpleksom. Dovoljno je dokazati da je $F(x) = \Phi(y)$

15. Svojstvo jake dualnosti (21.str)

Primal ima optimalno rešenje ako i samo ako dual ima optimalno rešenje pri čemu su optimalne vrednosti funkcija cilja ova dva problema jednake. Prema svojstvu jake dualnosti primal nema rešenje ako i samo ako dual nema rešenje. Ako je funkcija cilja primala neograničena odozgo na njegovoj dopustivoj oblasti, tada je dopustiva oblast duala prazna. Ako je funkcija cilja duala neograničena odozdo na njegovoj dopustivoj oblasti, tada je dopustiva oblast primala prazna. Ako su dopustive oblasti primala i duala neprazne, oba imaju optimalno rešenje. Moguće je da dopustive oblasti i primala i duala budu prazne.

16. Čime se modelira kriterijum upravljanja u matematičkom modelu (22str)

Funkcijom cilja se modelira kriterijum upravljanja (odlučivanja)

17. Čime se u matematičkim modelima opisuje kriterijum upravljanja (22str)

Mat mod LP- matematički zapis realnog problema u kome su funkcija cilja i ograničenja predstavljeni linearnim funkcijama.

<u>Realni sistem</u>	<u>Matematički model</u>
Upravljačke odluke	Upravljačke promenljive
Kriterijum upravljanja	Kriterijumska funkcija
Cilj	Funkcija cilja
Ograničavajući faktori	Skup ograničenja (dopustiv skup)
Optimalne upravljačke odluke	Optimalno rešenje

Primer: kriterijum-prihod; cilj- maksimizacija

18. Šta predstavljaju i u kojoj jedinici mere mogu biti promenljive dualnog problema u slučaju optimizacije raspodele ograničenih resursa (22str)

Primalni problem {10} sa svim pozitivnim koeficijentima se interpretira kao probl alokacije res aktivnostima: x_j - nepoznata kol j -tog proizvoda koja treba da se proizvede, c_j - jedinični profit od proizvodnje ovog proizvoda, F ukupni profit koji se ostvaruje, b_i -raspoloživa kol i -tog res, a_{ij} - kol i -tog res za proizvodnju j -tog proizvoda. Opt reš bi bilo maksimizacija profita. Dual {11} bi onda imao sledeću interpretaciju: firma želi da ispita uticaj povećanja raspoložive kol b_i i -tog res na max profit koji ona može da ostvari svojom proizvodnjom. Zbog jake dualnosti (opt vrednosti funkcije cilja primala i duala su jednake), vrednosti y_i^* može dati sl tumačenje: *Ako bi se raspoloživa kol b_i i -tog res povećala za ε , pri čemu y_i^* ostaje opt reš duala tako transformisanog primala, tada bi se max profit F^* povećao za $y_i^* \varepsilon$.* y_i^* implicitno meri marginalnu dobit koja bi se ostvarila pri jediničnom povećanju raspoložive

kol i -tog res, pa se zato naziva „cena u senci“. Prema svojstvu komplementarne dopunljivosti, uvek kada optimalnom reš primala i -to ogranič nije aktivno, tj raspoloživa kol b_i i -tog res nije iskorišćena, tada je $y_i^* = 0$ i povećane vel b_i neće dovesti do promene opt plana pr-nje niti promene max profita F^* . Zato se ovaj profit može povećati samo povećanjem kol ono res koji je u opt reš primala u potpunosti iskorišćen.

19. Napisati opšti model LP (23.str)

Opšti model:

$$\begin{pmatrix} \text{maksimizirati} \\ \text{minimizirati} \end{pmatrix} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Pri ograničenjima:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Ili sažetije kao

$$\begin{pmatrix} \text{max} \\ \text{min} \end{pmatrix} f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} b_i \quad i = 1, \dots, m; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

matrično-vektorska verzija:

$$\begin{pmatrix} \text{max} \end{pmatrix} c^T x$$

p.o.

$$Ax = b; \quad x \geq 0$$

x_j -upravljačka prom $j = \{1, \dots, n\}$; a_{ij} , b_i , c_j - parametri zadatog modela $i = \{1, \dots, m\}$

c -koeficijent uz promenljivu u funkciji cilja; n -broj promenljivih, m -broj ograničenja;
 a - koeficijent uz promenljivu u graničenjima; b - slobodni članovi.

20. Funkcija cilja u MM Planiranje ishrane (25str)

Kriterijum upravljanja: Ukupna cena

Cilj: Minimalni troškovi

$$\begin{pmatrix} \text{min} \end{pmatrix} f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

21. Ograničenje za radnike u MM podela obradive površine na kulture (26str)

Ukupan broj radnika

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = (1, 2, \dots, m)$$

22. Funkcija cilja MM dislocirane njive (27str)

<u>Kriterijum upravljanja:</u> Ukupna dobit	$(max)f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s c_{kj} x_{kj}$
<u>Cilj:</u> Maksimalna dobit	

23. Ograničenje za raspoloživost radnika kod MM Dislocirane njive (27.str)

Ukupan broj radnika	$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^s x_{kj} \right) \leq b_i \quad i = (1, 2, \dots, m)$
---------------------	--

24. Funkcija cilja MM Krmne smeše (28.str)

<u>Kriterijum upravljanja:</u> Ukupna cena	$(min)f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{k=1}^s q_k x_{jk}$
<u>Cilj:</u> Minimalni troškovi	

25. Ograničenja u MM krmne smeše (28str)

Ograničavajući faktori	P.O.
Minimalno/maksimalno učešće i -tog hranljivog sastojka u k -toj smeši	$d_{ik} \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{kj} \leq b_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, s)$
Procentualno učešće i -tog hraniva u k -toj smeši	$\sum_{j=1}^n x_{kj} = 1, \quad (k = 1, 2, \dots, s)$
Ukupna raspoloživost j -tog hraniva	$\sum_{k=1}^s q_k x_{jk} \leq z_j \quad j = (1, 2, \dots, n)$
Minimalno/maksimalno učešće j -tog hraniva u k -toj smeši	$u_{jk} \leq x_{jk} \leq v_{jk}, \quad j = (1, 2, \dots, n); k = (1, 2, \dots, s)$

26. Napisati funkciju cilja i njen smer u MM izbor optimalnog asortimana i objasniti korišćene oznake (29str)

<u>Kriterijum upravljanja:</u> Ukupna dobit	$(max)f(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j$
<u>Cilj:</u> Maksimalna dobit	

Oznake u ovom modelu znače sledeće:

x_j – količina j -tog artikla koju treba odrediti sa MM;

d_j - dobit po jedinici j -tog artikla;

a_{ij} - vreme potrebno za obradu j -tog artikla na i -toj mašini;

b_i - Kapacitet i -te mašine izražen u vremenskim jedinicama;

c_{kj} - vreme potrebno za obradu j -tog artikla od strane radnika k -te kategorije;

l_k - Raspoloživ fond vremena radnika k -te kategorije;

g_{vj} - potrebna količina v -te sirovine za proizvodnju j -tog artikla;

h_v - Raspoloživa količina v -te vrste sirovine;

e_j - minimalan nivo prodaja j -tog artikla;

z_j - maksimalna količina j -tog artikla koja se može prodati na tržištu.

27. Ograničenje količine sirovina i oznake kod MM proizvodni asortiman (29str)

Raspoloživa količina v -te sirovine

$$\sum_{j=1}^n g_{vj} x_j \leq h_v, v = (1, 2, \dots, s)$$

28. Funkcija cilja MM Upravljanje zalihama (31.str)

Kriterijum upravljanja: Ukupan trošak

Cilj: Minimizacija troškova

$$(\min) f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s c_{jk} \left[\sum_{v=1}^k (x_{jv} - p_{jv}) \right]$$

29. Neko ograničenje u MM Upravljanja zalihama (31.str)

Ograničavajući faktori	P.O.
Nemogućnost postojanja negativnih zaliha	$\sum_{v=1}^k (x_{jv} - p_{jv}) \geq 0, j = (1, 2, \dots, n);$ $k = (1, 2, \dots, s)$
Ukupan kapacitet i -te mašine	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jk} \leq b_i, i = (1, \dots, m) \quad k = (1, 2, \dots, s)$

30. Napisati ograničenje za kapacitet mašina po preduzećima u MM usklađivanja programa proizvodnje i objasniti korišćene oznake (32.str)

Kapacitet i -te mašine	$\sum_{j=1}^n a_{ijk} x_j \leq a_{ik}, i = (1, 2, \dots, m);$ $k = (1, 2, \dots, p)$
--------------------------	--

31. Ograničenja za zajedničke materijale MM usklađivanje programa proizvodnje (32str)

Raspoloživost v -tog materijala

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p b_{jkv} x_j \leq b_v \quad v = (1, 2, \dots, s);$$

32. Ograničenje kapaciteta mašina kod MM Proširenje kapaciteta (33.str)

Ograničavajući faktori	P.O.
Godišnji kapaciteti mašina i -te vrste pre uvođenja novih kapacita	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - a_i y_i \leq b_i, i = (1, 2, \dots, m)$
Nov ukupni kapacitet	$b_i + a_i y_i$

33. Šta treba dodati ograničenjima tipa $\geq$ da bi se svele na oblik LP za rešavanje Simpleks metodom

34. U koju grupu optimizacionih metoda spada Simpleks metoda

35. Ako je $\dot{x}_1$ optimalno rešenje problema $f(x)$, a $\dot{x}_2$ optimalno rešenje problema $f(x)$ i ako je $X_1 \subseteq X_2$, tada važi:

- a) $f(\dot{x}_1) \geq f(\dot{x}_2)$
- b) $f(\dot{x}_1) \leq f(\dot{x}_2)$
- c) $\dot{x}_2 \in X_1 \Rightarrow f(\dot{x}_1) = f(\dot{x}_2)$
- d) $\dot{x}_1 \in X_2 \Rightarrow f(\dot{x}_1) = f(\dot{x}_2)$

36. Rešenje sistema jednačine ograničenja standardnog oblika LP u kome nebazne promenljive imaju vrednost 0 naziva se bazno rešenje (bazne imaju vrednost 0 -> degenerisano)

37. Proširiti bazno rešenje koje odgovara kanonskom obliku LP:

$$(\max) - 5x_1 - 2x_3$$

p.o.

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 5x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Bazno rešenje je $x_2 = 6, x_4 = 2$

Da li je ovo rešenje optimalno? ~~DA~~ NE

38. isto kao prethodno, samo drugacija ograničenja:

$$(\max) - 7x_3 - 8x_4$$

p.o.

$$x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 5$$

$$x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Bazno rešenje je $x_1 = 5, x_2 = 9$

Da li je ovo rešenje optimalno? ~~DA~~ NE

39. Navesti kriterijum optimalog temena kao svojstvo opšteg zadatka LP

Ako postoji optimalno rešenje, ono se nalazi na granici oblasti D

-> ako je rešenje jedinstveno => rešenje je teme oblasti D

-> Ako je rešenje višestruko => rešenje je strana oblasti D koja sadrži barem jedno teme ove oblasti

40. Ako se skup baznih promenljivih dva dopustiva bazna rešenja razlikuje za jednu promenljivu, tada su ta dva bazna rešenja

susedna bazna dopustiva rešenja

41. Definicija dopustivog i susednog baznog rešenja

- ☐ dopustivo – kad je nenegativno ($t_j \geq 0$)
- ☐ susedno – se razlikuju za jednu promenljivu
- ☐ degenerisano – kada je jedna bazna 0

42. Kada se na osnovu problema LP koji je zadat u opštem obliku indirektno formira dualni problem, dualne promenljive koje odgovaraju ograničenjima tipa „=“ će u dualnom problemu biti

- a) nenegativne
- b) neograničene po znaku
- c) nepozitivne
- d) ograničene

U slučaju određivanja asortimana kojim se maksimizira dobit pri zadatim resurskima, optimalna vrednost funkcije cilja duala predstavlja ukupnu prodajnu cenu po kojoj je marginalna vrednost

43. Zadat je par problema MM1 i MM2:

MM1:

$$(\max) f(x) = c^T x$$

p.o.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

MM2:

$$(\min) h(y) = b^T y$$

p.o.

$$A^T y \geq c$$

$$y \leq 0$$

Označimo sa X skup dopustivih rešenja MM1, a sa Y skup dopustivih rešenja MM2. Ako $x \in X$ i $y \in Y$, tada prema svojstvu slabe dualnosti važi:

$$f(x) \leq h(y)$$

44. U slučaju MM planiranja iskrane, leva strana ograničenja predstavlja

- a) gornju granicu i-tog prehrambenog proizvoda
- b) ukupnu količinu i-tog prehrambenog proizvoda
- c) količinu dnevnog konzumiranja i-tog hranljivog sastojka
- d) ukupnu količinu svih hranljivih sastojaka u i-tom obroku

II deo

1. MM Zatvoreni transportni problem i objašnjenje oznaka (34-35str)

❖ Zatvoreni model transportnog zadatka

Zadatak se sastoji u određivanju kol roba x_{ij} koje iz bilo kog punkta A_i treba transportovati u bilo koji punkt B_j pod uslovom da ukupni troškovi transporta budu minimalni. Koristeći se uvedenim oznakama, funkcija cilja za klasični TP dobija oblik:

$$\{12\} f(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad \{12\}$$

Dok se skup ograničenja koji ima ukupno $(m+n)$ tj onoliko koliko ima ukupno punktova proizvodnje i potrošnje, kontruiše u odnosu na ograničenu proizvodnju i potrošnju u svakom punktu proizvodnje i potrošnje. Sistem ograničenja se može napisati u sledećem obliku:

Za punktove proizvodnje		Kondenzovan oblik
$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$	Ograničenje punkta A_1	$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = (1, 2, \dots, m)$
.....		
$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$	Ograničenje punkta A_m	
Za punktove potrošnje		Kondenzovan oblik
$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$	Ograničenje punkta B_1	$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = (1, 2, \dots, n)$
.....		
$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$	Ograničenje punkta B_n	

MM TP sastoji se u nalaženju minimalne funkcije cilja, gde $x_{ij} \geq 0$. Može se pokazati da ako su a_i i b_j celi brojevi, onda su i vrednosti x_{ij} celi brojevi. Ukupan br nepoznatih x_{ij} u sistemu $\{13\}$ iznosi mn , dok je br jednačina jednak $(m+n)$.

2. MM otvorenog transportnog problema (35str)

❖ Otvoren model transportnog zadatka

Kada imamo slučaj da je proizvodnja i potrošnja nisu jednaki, to zahteva konstrukciju odgovarajućeg skupa ograničenja pošto u nekim punktovima A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ostaće određene kol robe koje se ne mogu transportovati, te u tom slučaju treba rešavati MM koji ima definisanu funkciju cilja oblika $\{12\}$, a skup ograničenja u obliku $\{14\}$. MM TP-a definisan ovim ograničenjima se naziva **otvoreni model**. Otvoreni model može se svesti na klasičan TP tako što će se uvesti dopunski (**fiktivan**) punkt potrošnje B_{n+1} / punkt proizvodnje A_{m+1} , a za cenu transporta iz bilo kog punkta proizvodnje u punkt B_{n+1} (iz punkta A_{m+1} do bilo kog punkta potrošnje) se uzima da je 0.

Proizvodnja veća od potrošnje	Potrošnja veća od proizvodnje
$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^m b_j$	$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^m b_j$
$\{14\}$ $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = (1, 2, \dots, m)$	$\{14\}$ $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = (1, 2, \dots, m)$
$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = (1, 2, \dots, n)$ $\{14\}$	$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, j = (1, 2, \dots, n)$ $\{14\}$
Potrebe punkta B_{n+1} : $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$	Ponuda punkta A_{m+1} : $a_{m+1} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i$

3. Objasniti Metodu severozapadnog ugla, ideja i osobine (ne koraci) (36str)

Prema ovoj metodi, bazične promenljive raspoređujemo duž dijagonale koja se kreće od gornjeg levog ugla, tj polja (1,1) tabele (takozvanog „severozapadnog“ polja), pa do donjeg desnog ugla, tj polja (m,n) tabele. Ova metoda ne uzima u obzir vrednost c_{ij} pa se smatra najjednostavnijom ali i najneefikasnijom metodom za određivanje polaznog dopustivog reš TP.

4. Osnovna ideja i osobine Vogelove aproksimativne metode (36str)

Ovo je metoda sa složenijom algoritamskom strukturom od pretodne dve, ali često kod TP manjih dimenzija nalazi polazno bazno rešenje koje je i optimalno. Metoda je iterativna jer sukcesivno pronalazi bazične elemente. Osnovni princip metode je izračunavanje najvećih razlika između dva najmanja koeficijenta cena u svakom redu i u svakoj koloni matrice cena

5. Dualni transportni problem (37str)

Primal: (ukupan br nepoznatih x_{ij} iznosi mn , dok je broj ograničenja (bez prirodnih) jednak $m+n$)

Dual: (ukupan br nepoznatih iznosi $m+n$, dok je br ograničenja jednak mn)

Primal	Dual
<u>Upravljačke promenljive:</u>	<u>Upravljačke promenljive:</u>
x_{ij}	$\underline{a}_i, \underline{b}_j$
$(\min)f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$	$(\max)f(x) = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$
P.O.	P.O.
$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = (1, 2, \dots, m) \leftarrow u_i$	$u_i + v_j \leq c_{ij}, i = (1, 2, \dots, m), j = (1, 2, \dots, n)$
$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = (1, 2, \dots, n) \leftarrow v_j$	u_i, v_j neograničeni po znaku
$x_{ij} \geq 0, i = (1, 2, \dots, m), j = (1, 2, \dots, n)$	

6. Ograničenja kod transportnog problema sa ograničenim propusnim sposobnostima (38)

Ograničavajući faktori	P.O
Ograničenje za ponudu	$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = (1, 2, \dots, m)$
Tržišno ograničenje	$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = (1, 2, \dots, n)$
Dopunski uslov	$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, i = (1, 2, \dots, m), j = (1, 2, \dots, n)$

7. Neophodni USLOVI za dopustivo rešenje kod MM propusne sposobnosti i objasniti promenljive (ne ograničenja) (38 str)

Dopunski uslov	$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, i = (1, 2, \dots, m), j = (1, 2, \dots, n),$
----------------	--

Kod TP fizički uslovi određuju dopunska ograničenja. Ona su često određena propusnim sposobnostima putne mreže: iz punkta A_i u punkt B_j sva količina robe koja se transportuje ne može biti veća od d_{ij} , pa je potrebno uvesti dopunske uslove. Klasični transportni zadaci (TZ) mogu se izvesti kao posebni slučajevi TZ sa ograničenim propusnim sposobnostima putne mreže ako $d_{ij} = \infty$. Da bi se TZ sa ograničenim propusnim sposobnostima putne mreže mogli uspešno realizovati, neophodno je da d_{ij} ne bude sasvim malo i ispunjava uslove:

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \geq a_i, i = (1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \geq b_j, j = (1, 2, \dots, n).$$

8. MM minimizacija vremena transporta (39str)

Realan sistem	Matematički model
<u>Upravljačke odluke:</u> Kol robe iz i -tog punkta proizvodnje u j -ti punkt potrošnje	<u>Upravljačke promenljive:</u> x_{ij}
<u>Kriterijum upravljanja:</u> Ukupno vreme <u>Cilj:</u> Minimizacija vremena transporta	$(\min)t(x) = \max_{\substack{\{15\} \\ i = (1, 2, \dots, m), j = (1, 2, \dots, n) \\ \{15\}}} \left\{ t_{ij} x_{ij} > 0, \right\}$
Ograničavajući faktori	P.O
Ograničenje za ponudu	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = (1, 2, \dots, m)$
Tržišno ograničenje	$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = (1, 2, \dots, n)$
Prirodno ograničenje	$x_{ij} \geq 0, i = (1, 2, \dots, m), j = (1, 2, \dots, n)$

9. Ograničenja tražnje u MM transporta proizvodnje i objasniti oznake (40)

Ograničavajući faktori	P.O
Količina robe koju treba transportovati iz i -tog ishodišta k -tim sredstvom	$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s q_k x_{ijk} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m$
Količina robe koju treba transportovati u j -to odredište k -tim sredstvom	$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^s q_k x_{ijk} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$
Ukupan raspoloživ broj transportnih sredstava	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq g_k, (k = 1, 2, \dots, s)$

10. Funkcija cilja, njen smer i ograničenja MM izbor izvršilaca aktivnosti (41str)

Kriterijum upravljanja: Ukupna efikasnost

Cilj: Maksimizacija ukupne efikasnosti izvršenja projekta

$$(\max) f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Ograničavajući faktori	P.O.
Mogućnost da na jednoj akt može biti zaposlen samo jedan izvršilac	$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = (1, 2, \dots, n)$
Mogućnost zaposlenja jednog izvršilaca na samo jednoj aktivnosti	$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = (1, 2, \dots, n)$
Kada je broj izvršilaca m veći od br aktivnosti n	
Mogućnost da na jednoj akt može biti zaposleno više izvršilaca	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, i = (1, 2, \dots, m)$
Mogućnost zaposlenja jednog izvršilaca na samo jednoj aktivnosti	$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = (1, 2, \dots, n)$
Prirodno ograničenje	$x_{ij} \geq 0, i = (1, 2, \dots, m), j = (1, 2, \dots, n)$

11. Definicija povezanog i nepovezanog grafa (42 str)

Neusmeren graf je **povezan** ako za svaka dva čvora $(i, j) \in V$ postoji put koji ih povezuje.

Usmeren graf je **povezan** ako za svaka dva čvora $(i, j) \in V$ postoji put koji ih povezuje, pri čemu se usmerenja grana zanemaruju.

U slučaju da nije povezan, za graf kažemo da je **nepovezan**.

12. Definicija potpunog grafa (42.str)

Vrste grafova: Ako je neki graf $G=(V,E)$, za svaku granu $(i,j) \in E$ važi da postoji grana $(j,i) \in E$, tada se takvi grafovi zovu **neusmereni**. Alternativnom za ovakve grafove možemo definisati skup grana kao $E \subseteq \{(i,j) | i \in V, j \in V\}$. Grafovi za koje ova osobina ne važi zovu se **usmereni**. U definiciji neusmerenog grafa, neusmerene grane se obeležavaju kao skupovi dva čvora, npr. $\{i,j\}$. Vitičaste zagrade iniciraju da redosled čvorova u njima nije bitan, tj. $\{i,j\} = \{j,i\}$.

Grafiški prikaz neusmerenog grafa $G=(V,E)$ gde su $V=\{1,2,3,4\}$,

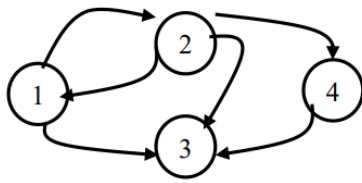
$E = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2)\}$, prvi je standardan prikaz a drugi ako se grane obeleže kao skupovi tj $E\{(1,2), (2,3), (2,4)\}$

13. Objasniti graf i mrežu (42str)

❖ Graf je uređeni par (V, E) gde su:

V - skup čvorova (engl. *Vertices*), npr. $V = \{1, 2, \dots, |V|\}$,

$E \subseteq \{(i,j) | i \in V, j \in V\}$ -skup grana (eng. *Edges*). Graf je moguće prikazati grafički.

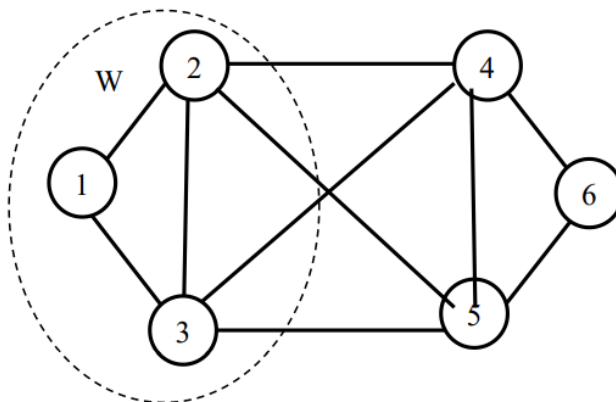


❖ Mreža: Kada se elementima grada (čvorovima i/ili granama) dodele neke vrednosti, on se naziva **težinski graf**. Povezan težinski graf se naziva **mreža**.

14. Definicija preseka grafa (43.str)

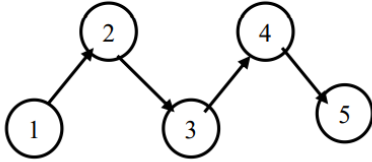
Za neusmeren grafa $G=(V,E)$ i zadati podskup $W \subset V$, **presek** grafa $\delta(W)$ je podskup grana takvih da im jedan čvor pripada skupu W , a drugi skup V/W . Drugim rečima:

$$\delta(W) = \{\{i,j\} \in E | i \in W, j \in V/W\}$$

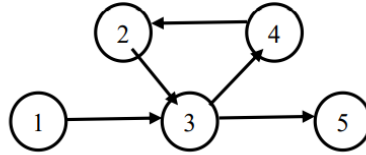


15. Elementarni put (44str)

❖ **Elementarni put** je onaj koji kroz sve čvorove prolazi najviše jedanput.



Put 1,2,3,4,5 je elementaran.



Put 1,2,3,4,5 nije elementaran pošto kroz čvor 3 prolazi dva puta.

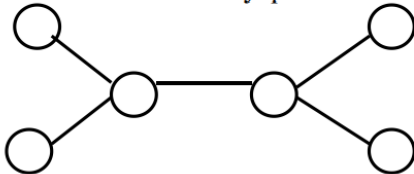
16. Definicija stabla, puta i konture (44,45 str)

❖ **Put** između dva zadata čvora s i t , $s, t \in V$, je niz grana za koje važi:

- Prva grana polazi iz čvora s ;
- Svaka sledeća grana sledi prethodnu granu;
- Poslednja grana završava u čvoru t .

❖ **Stablo**: Neusmeren graf $G=(V,E)$ je **stablo** ako važe dve od sledeće tri tvrdnje:

- Graf G ne sadrži ni jednu konturu.
- Graf G sadrži tačno $|V| - 1$ grana.
- Graf G je povezan.



Neke važne odobine stabla:

- Dodavanjem grane u stablo, dobija se kontura.
- Udaljavanjem grane iz stabla, dobija se nepovezan graf.
- Između svaka dva čvora u stablu postoji tačno jedan elementarni put.

❖ **Kontura** je elementarni put koji počinje i završava u istom čvoru. (put 1) je kontura

17. Definicija razapinjućeg stabla (44str)

❖ **Razapinjuće stablo** grafa G je povezan podg kao i G i ne sadrži ni jednu konturu. Broj grana u razapinjućem stablu $l=n-1$ gde je $n = |V|$ broj čvorova grafa.

18. Dužina puta, stabla i konture (44,45str)

Dužina puta jednaka je zbiru grana koje tom putu pripadaju
 $\{(s, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, t)\}$

Dužina (težina) razapinjućeg stabla je jednaka zbiru dužina grana koje tom stablu pripadaju.

Dužina konture predstavlja zbir svih grana koje pripadaju toj konturi

19. MM najkraći put između dva čvora, funkcija cilja i ograničenja (45str)

Neka je dat graf $G=(V,E)$ i neka su granama pridružene vrednosti $c_{ij}, (i,j) \in E$. Vrednosti c_{ij} mogu predstavljati dužine, težine, cene, pozdanost... Ovde vrednosti mogu biti i negativne. U grafu G potrebno je naći put između zadatih čvorova s i t . Put između zadatih čvorova s i t definiše se kao niz grana od kojih prva polazi iz čvorova s i t . Put između zadatih čvorova s i t definiše se kao niz grana od kojih prva polazi iz čvora s svaka sl grana u nizu očinje u onom čvoru u kojem se završava prethodna, a poslednja se završava u čvoru t :
 $\{(s, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, t)\} \Rightarrow s, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k, t$. Najkraći put između čvorova s i t je put najmanje dužine. Neka je $x_{ij}, (i,j) \in E$, binarna promenljiva takva da važi:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako grana } (i,j) \text{ pripadaju najkraćem putu} \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

MM probl najkraćeg puta:

$$\min f(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i = s \\ 0, & i \neq s, i \neq t, i \in V \\ -1, & i = t \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in E$$

20. Problem minimalnog razapinjućeg stabla, napiši sve (46str)

Minimiziranje ukupne težine razapinjućeg stabla	$\min f(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$
Ograničavajući faktori	p.o.
Obezbeđivanje da broj grana u stablu bude $n-1$	$\sum_{j (i,j) \in A(\sigma)} x_{ij} = n - 1$
Sprečavanje pojave ciklusa, tj da podgraf bude stablo	$\sum_{j (i,j) \in A(\sigma)} x_{ij} \leq S - 1, \forall S \subset V$
Prirodno ograničenje	$x_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in E$

21. MM trgovački putnik (48str)

Funkcija cilja je uobičajena za grafovske optimizacione probleme:

$$(\min)f(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da po jedna grana završava u svakom čvoru i da po jedna grana polazi iz svakog čvora:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \forall j \in V \qquad \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

Takođe treba obezbediti da ne postoje podkunture, da rešenje bude zaista Hamiltonova kontura. Ograničenje za „eliminaciju“ podkuntura:

** Formulacija Dancinga, Falkersona i Džonsona [DFJ]

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall S \subset V, 2 \leq |S| \leq \frac{n}{2}$$

** Formulacija Miera, Takera i Zemlina [MTZ]:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \forall (i,j) \in E, i,j \neq 1, u_i \geq 0, i \in V \setminus \{1\}$$

Gde su u_i pomoćne realne promenljive dodeljene svakom čvoru (osim prvog) i predstavljaju redni broj čvorova u konturi.

22. Funkcija cilja, ograničenja i oznake u MM rutiranje vozila (50str)

Funkcija cilja je uobičajena za grafovske optimizacione probleme:

$$(\min)f(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij}$$

Ograničenja treba da obezbede da po jedna grana završava u svakom čvoru i da po jedna grana polazi iz svakog čvora:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \forall j \in V \qquad \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

Potrebno je da ograničenja obezbede da se ne prekorači zadati kapacitet i da se zadovolje potrebe svih korisnika:

$$u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j, \forall (i,j) \in E, i,j \in C$$

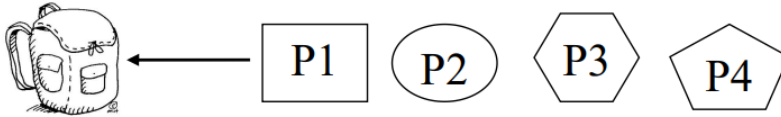
Ovim ograničenjem se obezbeđuje i „eliminacija“ podkontura koje ne sadrže depo, a u_i su pomoćne realne promenljive dodeljene svakom čvoru (osim depoa) i predstavljaju ukupnu potražnju svih korisnika koji se nalaze na istoj turi do korisnika i .

Ako je promenljiva x_{ij} jednaka 1, grana (i,j) je uključena u rutu, u suprotnom x_{ij} je jednaka 0

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in E$$

23. MM problem ranca (52)

Problem ranca: Za date predmete P_1, P_2, P_3 i P_4 za koje su nam poznati njihova vrednost i zapremina, treba smestiti u ranac zadate maksimalne zaprimene 20 litara, tako da ukupna vrednost svih spakovanih predmeta treba da bude maksimalna. Ako svi zadati predmeti ne mogu da stanu u ranac, postavlja se pitanje koje predmete poneti a koje izostaviti.



Vrednost [\$]	Max	70	80	50	60
Zapremina [l]	20	8	6	7	4

Skup elementa koji se mogu poneti: $E = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

Vrednost dopustivih rešenja (ima dva podskupa koja su preko 20 litara):

$z(\{\})=0$	$z(\{P_4\})=60$	$z(\{P_2, P_3\})=130$	$z(\{P_1, P_3, P_4\})=180$	} Zapremina preko 20 (21 i 25)
$z(\{P_1\})=70$	$z(\{P_1, P_2\})=150$	$z(\{P_2, P_4\})=140$	$z(\{P_2, P_3, P_4\})=190$	
$z(\{P_2\})=80$	$z(\{P_1, P_3\})=120$	$z(\{P_3, P_4\})=110$	$z(\{P_4, P_2, P_3\})=200$	
$z(\{P_3\})=50$	$z(\{P_1, P_4\})=130$	$z(\{P_1, P_2, P_4\})=210$	$z(\{P_4, P_2, P_3, P_4\})=260$	
			60	

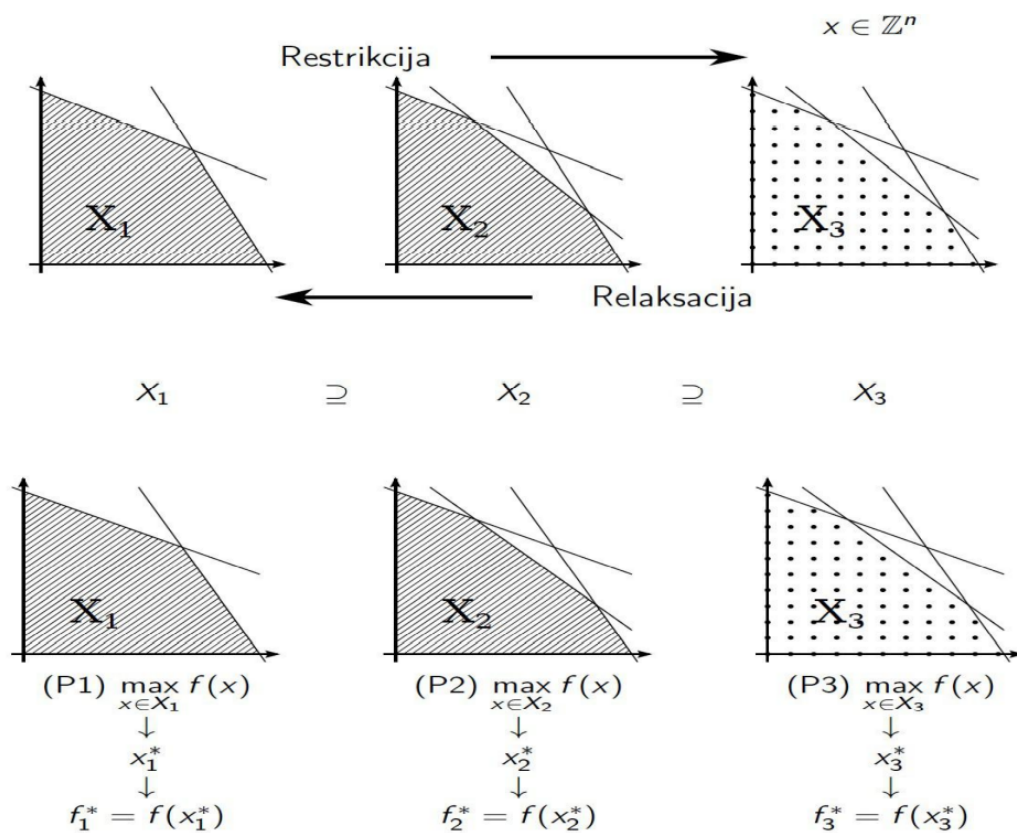
Vrednost optimalnog rešenja je $z(\{P_1, P_2, P_4\})=210$.

24. Prvi korak u Metodi grananja i ograničenja (53-54str)

Osnovni pojmovi: Relaksacija – restrikcija; Gornja granica – donja granica; Grananje – odsecanje

Metod grananja i ograničavanja je jedan od opštih tehnika pretraživanja koja ne pretražuje one delove dopustivog skupa u kojima se, po proceni, ne nalazi rešenje bolje od već nađenog. Pretraga je sužena na „interesantne“ delove dopustivog skupa i efikasnija od totalne pretrage. Osnovna ideja metode grananja i ograničenja je „deoba i osvajanje“. Pošto je početni problem suviše težak za direktno rešavanje on se deli na sve manje i manje potprobleme sve dok oni ne budu razrešeni. *Granjanje* se vrši razbijanjem dopustivog skupa na podskupove, kome odgovara razbijanje početnog problema na potprobleme. Potproblem se smatra razrešenim ako je njegovo optimalno rešenje celobrojno ili ako se proceni da njegovi dopustivi skup ne sadrži optimalno rešenje polaznog problema. Razrešeni potproblemi se brišu iz skupa potproblema i po njima se ne vrši dalje granje.

25. Šta je restrikcija kod Metode grananja i ograničavanja (53-54str)



26. Relaksacija (54-55str)

Pretpostavimo da smo probleme P1 i P2 dobili relaksiranjem

problema P3, $f(x_1^*) \geq f(x_2^*) \geq f(x_3^*)$. Optimalno rešenje relaksiranog problema je jednako dobro ili bolje od rešenja polaznog problema. Dodavanjem ograničenja nekom problemu, rešenje može ostati jednako dobro ili postati gore od prethodnog.

Pretpostavimo da smo probleme P1 i P2 dobili relaksiranjem

problema P3 $x_1^* \in X_3 \Rightarrow f(x_1^*) = f(x_3^*)$. Ako optimalno rešenje relaksiranog problema zadovoljava sva ograničenja polaznog problema, tada je ono optimalno rešenje polaznog problema.

Ako za problem optimizacije (P3) $\max_{x \in X_3} f(x)$ važi:

$x_1^* \in X_1$ je optimalno rešenje relaksiranog problema i $x_3 \in X_3$ je dopustivo rešenje polaznog problema, tada su $\bar{f} = f(x_1^*)$ i $f = f(x_3)$ gornja i donja granica vrednosti optimalnog rešenja polaznog problema.

Drugim recima: $\bar{f} \geq f(x_3) \geq \underline{f}$; $f(x_1^*) \geq f(x_3)$ - osobina 1, $f(x_3) \geq \underline{f}$ definicija optimalnosti.

Upotreba granica: Ako za neko dopustivo rešenje polaznog problema $x_3 \in X_3$ i optimalno rešenje njegove relaksacije $x_1^* \in X_1$ važi da je $f(x_3) = f(x_1^*)$ (tj. $\bar{f} = \underline{f}$) tada je x_3 optimalno rešenje

polaznog problema. Ako je vrednost relaksiranog rešenja u nekom čvoru stabla

pretraživanja manja ili jednaka od do tada nađene donje granice problema (tj. $\bar{f} \leq \underline{f}$), tada se celo podstablo tog stabla pretraživanja čiji je dati čvor koren, može eliminisati.

27. Uslov optimalnosti u metodi potencijala

28. Metoda najmanjih troškova (36)

29. Kako se određuje optimalnost rešenja u Metodi potencijala

30. Ako je $\dot{x}$ optimalno rešenje transportnog problema, a $\dot{u}$ i $\dot{v}$ odgovarajuće vrednosti dualnih promenljivih i ako je promenljiva $\dot{x}_{ij}$ bazna, tada važi:

- a) $c_{ij} - (\dot{u}_i + \dot{v}_j) \geq 0$ - nebazno
- b) $c_{ij} - \dot{u}_i - \dot{v}_j = 0$ - bazno
- c) $\dot{u}_i + \dot{v}_j < c_{ij}$
- d) $c_{ij} \leq \dot{u}_i + \dot{v}_j$