

Partie 3 Phénomènes d'évolution à croissance exponentielle

I. Exponentielle de base e

Définition

Soit $a > 0$, l'**exponentielle de base a** est la fonction qui, à tout réel x , associe a^x . Ces fonctions sont **continues et dérivables sur $\mathbb{R}$** . Parmi toutes ces fonctions, il en existe une seule qui est **sa propre dérivée**. On note e la valeur de cette fonction en 1.

$$e \approx 2,718$$

Cette fonction exponentielle de base e est appelée **fonction exponentielle** et on la note $\exp$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$\exp \exp (x) = e^x$$

Et, par définition,

$$\begin{aligned}\exp \exp '(x) &= e^x \\ \exp \exp (1) &= e^1 = e \\ \exp \exp (0) &= e^0 = 1\end{aligned}$$

Propriétés

x et y désignent deux réels et n désigne un entier relatif.

$$\begin{aligned}e^{x+y} &= e^x \times e^y & (e^x)^n &= e^{nx} \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} & e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y}\end{aligned}$$

Remarques

- Ces propriétés sont celles des exponentielles qui sont une généralisation des puissances à l'ensemble réel.
- Soit x un nombre réel, $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ donc $e^x \neq 0$

Par ailleurs, $e^0 = 1 > 0$ donc **la fonction exponentielle est (strictement) positive** car sinon, par continuité, la fonction exponentielle aurait au moins une racine. Ainsi, soit x un nombre réel,

$$e^x > 0$$

On en déduit notamment que **la fonction exponentielle est strictement croissante**.

De ces propriétés découle deux caractérisations bien utiles (notamment dans la résolution d'équations ou d'inéquations). Soient a et b deux réels,

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Courbe représentative

La droite d'équation $y = x + 1$ est une **tangente** à la courbe exponentielle en $x = 0$. On en déduit que **lorsque x se rapproche de 0, e^x a une valeur proche de $1 + x$**

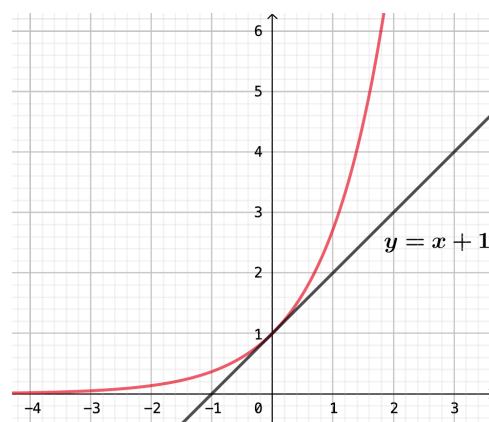
$$e^x \sim 1 + x$$

Cette approximation est bien utile lorsque l'on veut connaître une valeur approchée de l'exponentielle à proximité de 0 (ce qui arrive régulièrement lorsque l'on utilise des pourcentages). Par exemple,

$$e^{0,03} \approx 1,03045 \approx 1,03$$

On remarque aussi que la tangente est sous la courbe, donc l'approximation est toujours **par défaut**.

L'**axe des abscisses** est une **asymptote** à la courbe de la fonction exponentielle en $-\infty$. Autrement dit, la fonction exponentielle tend vers 0 par valeurs positives en $-\infty$.



$$e^x = 0$$

Par ailleurs,

$$e^x = +\infty$$

La croissance de l'exponentielle est tellement forte que, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$x^n e^x = 0$$

Dérivée de la fonction e^u

Soit une fonction u continue et dérivable sur un intervalle I , la fonction $f = e^u$ est dérivable sur l'intervalle I .

$$\forall x \in I, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Exemple

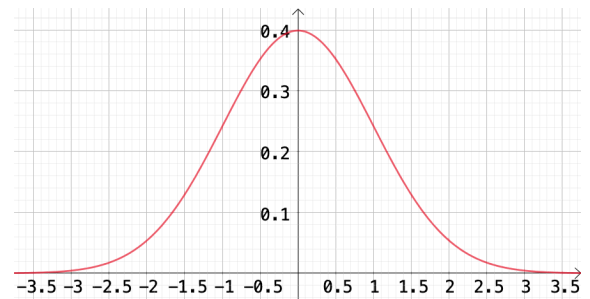
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$f'(x)$ est donc du même signe que $-x$. On en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est très utilisée en statistiques. C'est une **fonction gaussienne centrée réduite**. C'est la densité d'une **loi normale**.



II. Suites géométriques

Une **suite** u de nombres est une **famille de nombres** (les **termes** de la suite) indexée par l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Ainsi, $u(0) = u_0$ est le premier terme de la suite, $u(1) = u_1$ est le deuxième terme de la suite... On note cette suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore (u_n) .

Par exemple, La **suite des nombres pairs** se note

$$(0; 2; 4; 6; \dots)$$

Ou encore

$$(2n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Le premier de cette suite est 0 et on note

$$u(0) = u_0 = 0$$

Le deuxième terme de cette suite est

$$u(1) = u_1 = 2$$

Et ainsi

$$u(2) = u_2 = 4$$

$$u(3) = u_3 = 6$$

...

On en déduit que, si n désigne un entier naturel,

$$u(n) = u_n = 2 \times n = 2n$$

Remarques

- Les écritures $u(n)$ et u_n sont équivalentes. On écrit plutôt la deuxième dans la littérature mathématique.
- La notion de suite est analogue à celle d'une fonction définie uniquement sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Pour certaines suites, le passage d'un terme au suivant revient à **multiplier toujours par le même nombre**. On parle alors de **suite géométrique**. Par exemple, la suite des puissances de 3

$$(3^0; 3^1; 3^2; 3^3; \dots) = (1; 3; 9; 27; \dots)$$

est une suite géométrique. En effet, on multiplie par 3 pour passer d'un terme à l'autre.

$$\begin{aligned} u(0) &= 1 \\ u(1) &= 3 = u(0) \times 3 \\ u(2) &= 9 = u(1) \times 3 \\ u(3) &= 27 = u(2) \times 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Et, en généralisant, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u(n) = 3^n = u(n-1) \times 3$$

Le nombre que l'on rajoute s'appelle la **raison** de la suite.

Pour résumer, la suite (u_n) est une **suite géométrique de raison q** si, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Que l'on peut aussi écrire

$$u(n+1) = u(n) \times q$$

Cette définition d'une suite géométrique est une **relation de récurrence** car elle lie des termes consécutifs d'une suite.

On peut retrouver la valeur d'un terme d'une suite géométrique de raison q , sans calculer tous les termes, grâce à la formule (**forme explicite**)

$$u(n) = u(0) \times q^n$$

Exemples

- 1; 2; 4; 8; 16; ... est le début d'une suite géométrique de **premier terme** $u(0) = 1$ et de **raison 2**.
- 1; -1; 1; -1; ... est le début d'une suite géométrique de **premier terme** $u(0) = 1$ et de **raison -1**.
- 2; 1; 0,5; 0,25; ... est le début d'une suite géométrique de **premier terme** $u(0) = 2$ et de **raison 0,5**.
- Si l'on considère la suite géométrique de **raison 4** et de **premier terme** $u(0) = 5$, alors

$$u(10) = 5 \times 4^{10} = 5\,242\,880$$

- Si l'on considère la suite géométrique de **raison -0,5** et de **premier terme** $u(0) = 100\,000$, alors

$$u(7) = 100\,000 \times (-0,5)^7 = -781,25$$

Remarque

La suite définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = e^n$$

est une suite géométrique de raison e et de premier terme 1.

Exemple d'application

Si l'on place 10 000€ sur un livret bleu rémunéré à 3% par an, le capital au bout de n années égale

$$10\,000 \times 1,03^n$$

La suite est géométrique de raison 1,03 et de premier terme 10 000.

Ainsi, au bout de 10 ans, le capital sera de

$$10\,000 \times 1,03^{10} \approx 13\,439\text{€}$$

Remarque

Les taux peuvent être différents chaque année. On peut calculer le taux moyen à l'aide la **moyenne géométrique** qui est adaptée aux phénomènes à croissance exponentielle (plutôt que la moyenne arithmétique utilisée habituellement). Ainsi, si mon capital augmente de 2% la première année et de 4% la deuxième année, on peut faire la moyenne géométrique des deux coefficients correspondants.

$$\sqrt{1,02 \times 1,04} \approx 1,2995$$

Ce qui correspond à une augmentation moyenne annuelle de 2,995%.

On peut remarquer que le résultat est proche de la moyenne arithmétique (3%) mais c'est loin d'être toujours le cas...

Par exemple, deux augmentations successives de 20% et de 80%, correspondent à une augmentation moyenne de 47% (ce qui n'est pas si proche de 50% suivant ce qui est en jeu...).

$$\sqrt[1]{1,2 \times 1,8} \approx 1,47$$

On peut évidemment généraliser la formule pour n valeurs $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$m = \sqrt[n]{c_1 \times c_2 \times \dots \times c_n} = (c_1 \times c_2 \times \dots \times c_n)^{\frac{1}{n}}$$

Somme des termes d'une suites géométriques

On peut calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ à l'aide de la formule

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple : un problème historique

Selon la légende, le jeu d'échecs aurait été inventé en Inde au Vie siècle par le sage Sissa pour distraire son roi. Pour le remercier, il eut droit de demander une faveur que le roi accepta. Pour chacune des 64 cases de l'échiquier, Sissa demanda un grain de blé pour la première case, 2 pour la suivante, 4 pour la troisième et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de blé à chaque case. Ainsi, Sissa devait récupérer environ $1,8 \times 10^{19}$ grains de blé, ce qui représente environ 740 milliards de tonnes de blé, soit environ 1 130 fois la production mondiale actuelle ! Le roi ne put évidemment pas accéder à sa demande.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1,8 \times 10^{19}$$