

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

Resolución

Sean $x, y \geq 0$ los números buscados. Como $x + y = 1$, entonces $y = 1 - x$.

Se trata de maximizar la función $p(x) = x\sqrt{y} = x\sqrt{1-x}$

$$p'(x) = 1\sqrt{1-x} + x \frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1) = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow 2-3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Si $0 \leq x < \frac{2}{3}$, $p'(x) > 0$ [$p(x)$ creciente] y si $x > \frac{2}{3}$, $p'(x) < 0$ [$p(x)$ decreciente]

Para $x = \frac{2}{3}$ la función $p(x)$ es máxima. Sustituyendo, $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Por tanto, los números buscados son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$

Sabiendo que $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f :

a) Comprueba que f es creciente.

Resolución

Por el teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = f(x) \Rightarrow 2xe^{x^2} = f(x)$

Observa que $f'(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2}2x = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0$. Luego, f es creciente

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

Resolución

Sabemos que $f(x) = 2xe^{x^2}$ es creciente. Como $f(x) = 2xe^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, la gráfica sólo corta a los ejes en $(0, 0)$.

Además, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{x^2} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$;

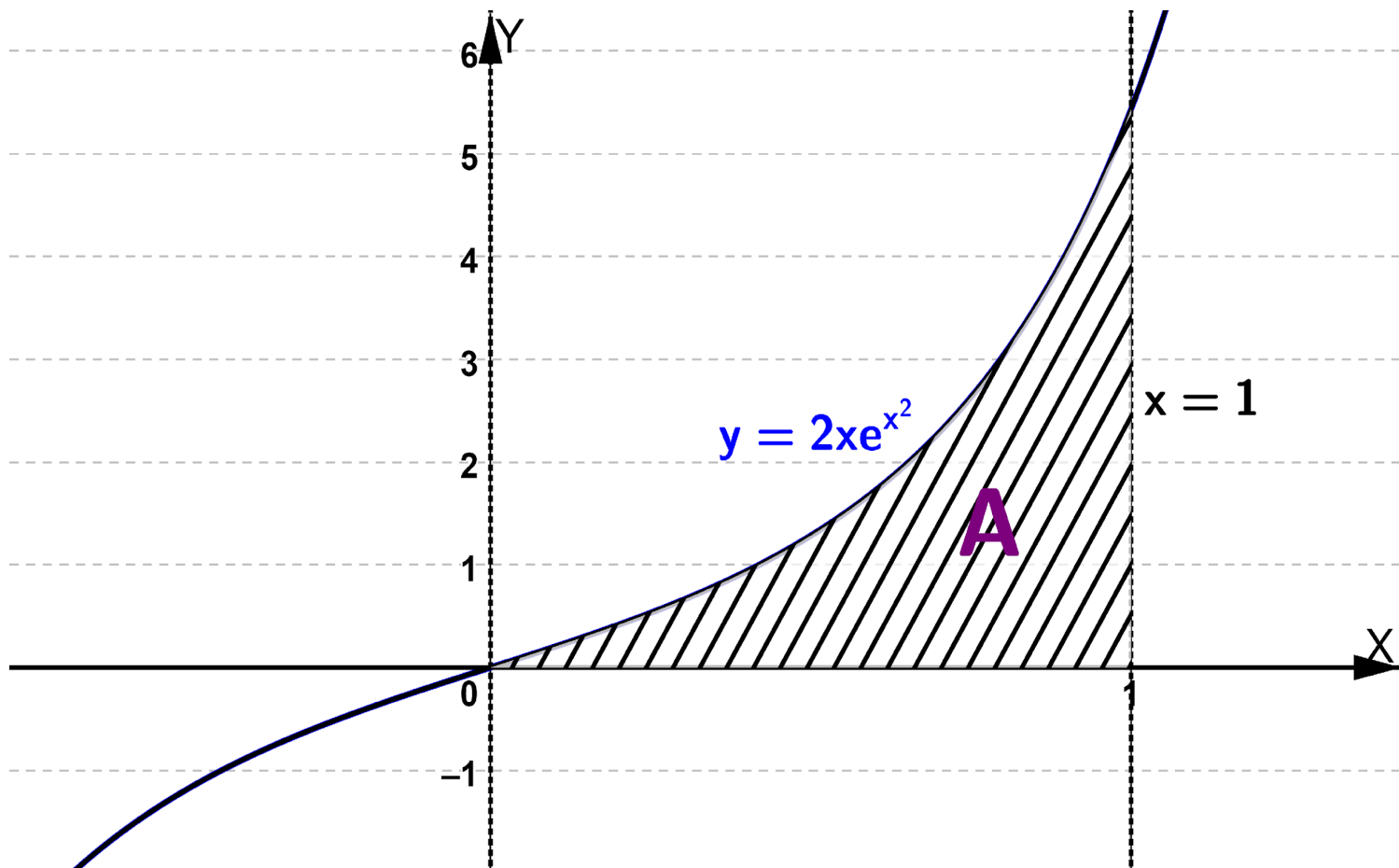
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{x^2} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$

Luego, no hay asíntotas horizontales

Como $\frac{f(x)}{x} = \frac{2xe^{x^2}}{x} = 2e^{x^2} = +\infty$ no hay asíntotas oblicuas

Además, la recta $x = 1$ es la vertical que pasa por $(1, 0)$ y $f(1) = 2 \cdot 1e^{1^2} = 2e \approx 5,4$

Un esbozo del recinto cuya área se pide es



El área que se pide es $A = \int_0^1 f(x)dx$. Y como $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f

Por la regla de Barrow, $A = F(1) - F(0) = e^{1^2} - e^{0^2} = e - 1 \cong 1,72 u^2$

(prueba ordinaria) Sabiendo que $\frac{\text{sen } x - ax + 2 - 2\text{coscos } x}{e^x - x\text{cos } x - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Resolución

$$\frac{\text{sen } x - ax + 2 - 2\text{coscos } x}{e^x - x\text{cos } x - 1} = \frac{\text{sen } 0 - a \cdot 0 + 2 - 2\text{coscos } 0}{e^0 - 0\text{cos } 0 - 1} = \frac{2-2}{1-1} \cdot \frac{0}{0} \text{ Indeterminación. A mos}$$

$$\frac{\text{sen } x - ax + 2 - 2\text{coscos } x}{(e^x - x\text{cos } x - 1)} = \frac{-\text{coscos } x - a + 2\text{sen } x}{e^x - \text{coscos } x + x\text{sen } x} = \frac{-\text{coscos } 0 - a + 2\text{sen } 0}{e^0 - \text{coscos } 0 + 0\text{sen } 0} = \frac{1-a}{0}$$

Como queremos que el límite sea finito, debe ser $1 - a = 0$ (o sea $a = 1$) porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Quedaría otra vez una indeterminación $\frac{0}{0}$ y $\frac{\text{coscos } x - 1 + 2\text{sen } x}{e^x - \text{coscos } x + x\text{sen } x} = \frac{0}{0}$

Veamos si podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\frac{(\cos x - 1) + 2 \sin x}{(e^x - \cos x) + 2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2 \cos x}{e^x + \sin x + 2 \cos x} = \frac{-\sin 0 + 2 \cos 0}{e^0 + 2 \sin 0 + 2 \cos 0} = \frac{2}{1} = 2$$

Conclusión: debe ser $a = 1$ y, en tal caso, el límite vale 2

(prueba ordinaria) Sea la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \frac{\ln \ln x}{x^2}$

a) Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f .

Resolución

Como $1 = f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(a + \frac{\ln \ln x}{x^2} \right) = a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{x^2} = a + 0 = a$ (el límite vale 0 porque x^2 es

un infinito de orden superior a $\ln x$). Conclusión: debe ser $a = 1$

b) Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

Para $a = 0$, $f(x) = \frac{\ln \ln x}{x^2}$;

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{1/2}$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(0, e^{1/2})$	$e^{1/2}$	$(e^{1/2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente

f es creciente en $(0, e^{1/2})$ y decreciente en $(e^{1/2}, +\infty)$

Máximo relativo: $x = e^{1/2} = \sqrt{e} \cong 1,65$, $y = f(e^{1/2}) = \frac{\ln \ln e^{1/2}}{(e^{1/2})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e} \cong 0,18$; punto $(\sqrt{e}, \frac{1}{2e})$

No hay mínimos relativos.

(prueba ordinaria) Halla la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2 \ln 2)$ y $(1, 0)$

y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$

Resolución

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (e^{x-1} - \frac{1}{x}) dx = e^{x-1} - \ln \ln x + a, \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (e^{x-1} - \ln \ln x + a) dx = e^{x-1} - \int \ln \ln x dx + ax + b$$

Usamos el método de integración por partes para hallar $\int \ln \ln x dx$:

$$\left[u = \ln \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] ;$$

$$\int \ln \ln x dx = x \ln \ln x - \int 1 dx = x \ln \ln x - x + k$$

Sustituyendo, $f(x) = e^{x-1} - x \ln \ln x + x + ax + c \Rightarrow f(x) = e^{x-1} + x(1 - \ln \ln x + a) + c$

Hallemos a y c:

La gráfica pasa por $(1, 0) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow e^{1-1} + 1(1 - \ln \ln 1 + a) + c = 0 \Rightarrow 1 + 1 + a + c = 0$

Luego, $a + c = -2$

La gráfica pasa por $(2, e - 2 - 2 \ln 2) \Rightarrow$

$f(2) = e - 2 - 2 \ln \ln 2 \Rightarrow e^{2-1} + 2(1 - \ln \ln 2 + a) + c = e - 2 - 2 \ln \ln 2$

Operamos: $e + 2 - 2 \ln \ln 2 + 2a + c = e - 2 - 2 \ln \ln 2 \Rightarrow 4 + 2a + c = 0 \Rightarrow 2a + c = -4$

Queda el sistema $\{a + c = -2, 2a + c = -4\}$, restando las ecuaciones queda $a = -2$; $-2 + c = -2, c = 0$

La función que se pide es $f(x) = e^{x-1} + x(1 - \ln \ln x - 2) \Rightarrow f(x) = e^{x-1} - x(\ln \ln x + 1)$

(prueba extraordinaria) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$.

Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, \frac{\pi}{4})$

Resolución

El conjunto de todas las primitivas de f $F_k(x) = \int f(x) dx$. Como $x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$ el

denominador no tiene raíces reales; $F_k(x) = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \text{artg}(x+1) + c$

Si la primitiva pasa por $(0, \frac{\pi}{4})$, $\frac{\pi}{4} = F_k(0) = \text{artg}(0+1) + c = \frac{\pi}{4} + c$. Luego, $c = 0$

Por tanto, la primitiva que se pide es $F(x) = \text{artg}(x+1)$

(prueba extraordinaria) Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = 2$

Resolución

Hallemos una primitiva $p(x)$ de $e^{x-k}(x-2)$ usando la integración por partes:

$[u = x - 2, dv = e^{x-k}, du = dx, v = e^{x-k}]$; $p(x) = (x-2)e^{x-k} - \int e^{x-k} dx = (x-2-1)e^{x-k} = (x-3)e^{x-k}$

Por la regla de Barrow, $2 = \int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = p(3) - p(1) = (3-3)e^{3-k} - (1-3)e^{1-k} = 2e^{1-k}$

Luego, $e^{1-k} = 1$ y, por tanto $1-k=0$. O sea, $k=1$

(prueba extraordinaria) Calcula a y b sabiendo que $\frac{x \sin x + a(e^x - 1) + \sin x}{bx^2 + x - \sin x} = 1$

Resolución

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + a(e^x - 1) + \sin x}{bx^2 + x - \sin x} = \frac{0 \sin 0 + a(e^0 - 1) + \sin 0}{b0^2 + 0 - \sin 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación. Aplicamos L'Hôpital:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin x + a(e^x - 1) + \sin x)'}{(bx^2 + x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x + ae^x + \cos x}{2bx + 1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 0 + 0 \cos 0 + ae^0 + \cos 0}{2b0 + 1 - \cos 0} = \frac{a+1}{0}$$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital, el límite es $\frac{a+1}{0}$

Como queremos que el límite sea finito pues debe valer 1, debe ser $a+1=0$ porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Luego, $a+1=0 \Rightarrow a=-1$

$$\text{Como } a=-1, \text{ nos queda, } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x - 1e^x + \cos x}{2bx + 1 - \cos x} = \frac{\sin 0 + 0 \cos 0 - 1e^0 + \cos 0}{2b0 + 1 - \cos 0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

Aplicamos de nuevo L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x - 1e^x + \cos x)'}{(2bx + 1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x - e^x - \sin x}{2b + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x \sin x - e^x - \sin x}{2b + \sin x} = \frac{2 \cos 0 - 0 \sin 0 - e^0 - \sin 0}{2b + \sin 0} = \frac{1}{2b}. \text{ Por L'Hôpital, } \frac{1}{2b} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Conclusión: debe ser $a=-1, b = \frac{1}{2}$

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)e^x$.

a) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Resolución

$$f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = xe^x ; f''(x) = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1. \text{ Si } x < -1, f''(x) < 0$$

(f cóncava) y si $x > -1, f''(x) > 0$ (f convexa). Luego, para $x=-1$ hay un punto de inflexión

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ y la de la recta normal es } rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

$$\text{En este caso, } x_0 = -1 ; f'(x_0) = f'(-1) = -e^{-1} ; f(x_0) = f(-1) = (-1-1)e^{-1} = -2e^{-1}.$$

$$rtg: y = -e^{-1}(x+1) - 2e^{-1} \Rightarrow rtg: y = \frac{-x-3}{e} ;$$

$$rn: y = \frac{-1}{-e^{-1}}(x+1) - 2e^{-1} \Rightarrow rn: y = e(x+1) - \frac{2}{e}$$

b) Estudia y calcula las asíntotas de la función

Resolución

Como f es continua, no hay asíntotas verticales

$$f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty \Rightarrow \text{No hay AH en } +\infty.$$

Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$: AO: $y = mx + n$; $m = \frac{f(x)}{x}$, $n = [f(x) - mx]$

$$m = \frac{(x-1)e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminación}$$

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\frac{1e^x + (x-1)e^x}{1} = xe^x = +\infty \Rightarrow \text{No hay asíntota oblicua}$$

$$f(x) = f(-x) = (-x-1)e^{-x} = \frac{-x-1}{e^x} = 0 \text{ porque } e^x \text{ es un infinito de}$$

orden superior a $-x-1$. Luego, f tiene asíntota horizontal en $-\infty$, A.H: $y = 0$ (el eje X)

Conclusión: f sólo tiene una asíntota horizontal en $-\infty$, A.H: $y = 0$ (el eje X)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$.

a) Esboza el recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ con $a > 0$.

b) Calcula $a > 0$ para que el área del recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ sea $4/3$ unidades cuadradas

Resolución

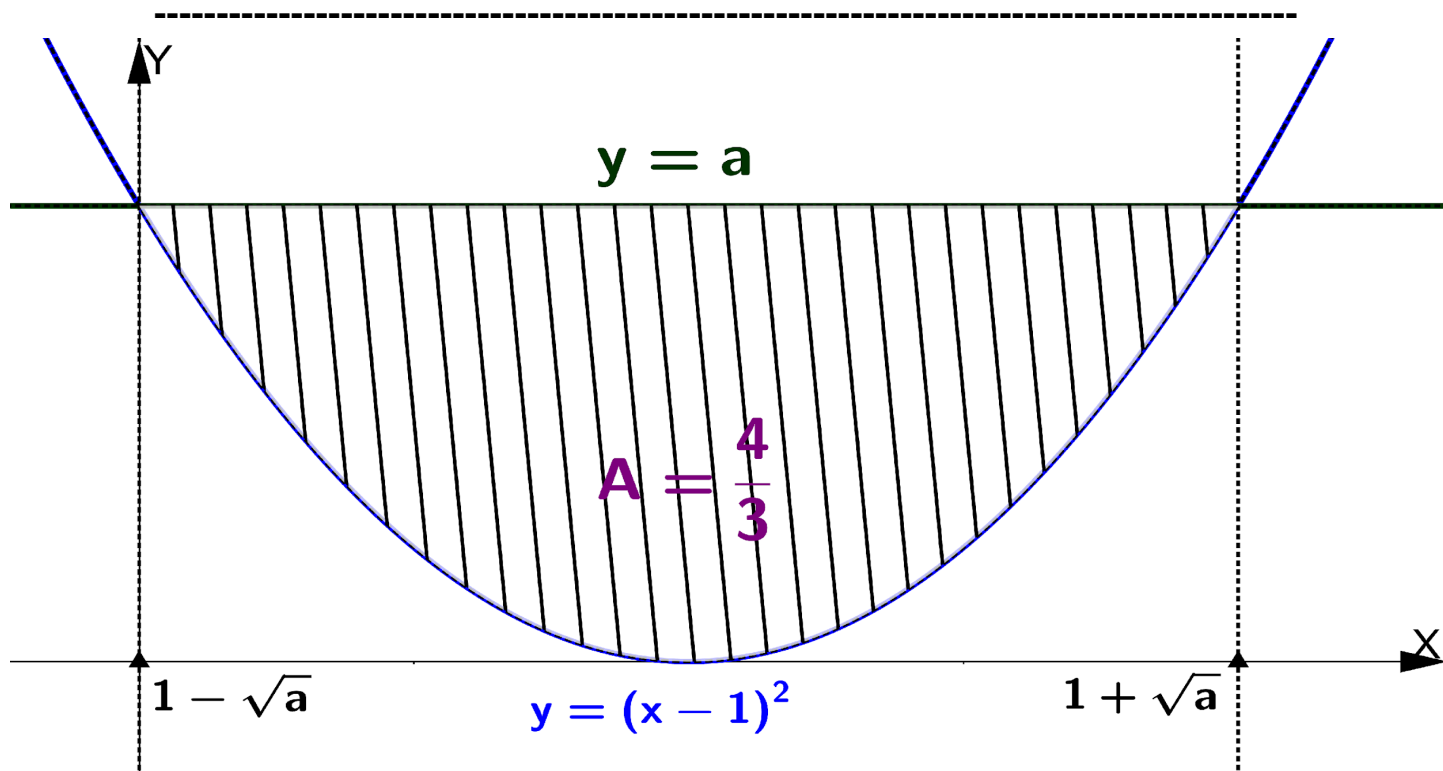
Como $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f(0) = (0-1)^2 = 1$; $f'(x) = 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, la gráfica de f es la parábola convexa de vértice $(1, 0)$ que corta al eje Y en $(0, 1)$. Además, $y = a$ es la recta horizontal que pasa por $(0, a)$

Puntos de corte de la parábola y la recta:

$$\{y = (x-1)^2, y = a\} \Rightarrow (x-1)^2 = a \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{a} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{a}$$

Se cortan en $(1 - \sqrt{a}, a)$ y $(1 + \sqrt{a}, a)$

El recinto cuya área se dice que vale $4/3$ u² es:



Por simetría respecto a la recta $x = 1$, el área es

$$A = \frac{4}{3} = 2 \int_1^{1+\sqrt{a}} [a - (x-1)^2] dx = \int_1^{1+\sqrt{a}} [2a - 2(x-1)^2] dx$$

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = 2ax - \frac{2(x-1)^3}{3} = \frac{6ax - 2(x-1)^3}{3}$. Por la regla de

$$\text{Barrow, } A = \frac{4}{3} = p(1 + \sqrt{a}) - p(1) = \frac{6a(1 + \sqrt{a}) - 2(\sqrt{a})^3}{3} - \frac{6a1 - 2(1-1)^3}{3} = \frac{6a + 6a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} - 6a}{3}$$

$$\text{Luego, } \frac{4}{3} = \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Rightarrow a\sqrt{a} = \sqrt{a^3} = 1 \Rightarrow a = 1$$

Considera la función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(2x), & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(\pi x) - 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcula $\int_{-\pi/4}^1 f(x) dx$

Resolución

Usando la linealidad de la integral definida respecto al intervalo de integración

$$\int_{-\pi/4}^1 f(x) dx = \int_{-\pi/4}^0 x \operatorname{sen}(2x) dx + \int_0^1 [\cos(\pi x) - 1] dx$$

Hallemos una primitiva de $x \operatorname{sen}(2x)$ usando el método de integración por partes:

$$\left[u = x \quad dv = \operatorname{sen}(2x) \quad v = -\frac{1}{2} \cos(2x) \right] \Rightarrow$$

$$\frac{-x \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = \frac{-x \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + a$$

$$\text{Luego, una primitiva de } x \operatorname{sen}(2x) \text{ es } p(x) = \frac{-x \cos(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} = \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x \cos(2x)}{4}$$

$$\text{Una primitiva de } \cos(\pi x) - 1 \text{ es } q(x) = \frac{(\pi x)}{\pi} - x = \frac{(\pi x) - \pi x}{\pi}.$$

Por la regla de Barrow, $\int_{-\pi/4}^1 f(x) dx = p(0) - p(-\pi/4) + q(1) - q(0) =$

$$= \frac{\sin(2 \cdot 0) - 2 \cdot 0 \cos(2 \cdot 0)}{4} - \frac{\sin(-2\pi/4) - [-2\pi/4 \cos(-2\pi/4)]}{4} + \frac{(\pi \cdot 1) - \pi \cdot 1}{\pi} - \frac{(\pi \cdot 0) - \pi \cdot 0}{\pi}$$

$$\int_{-\pi/4}^1 f(x) dx = 0 - \frac{-1-0}{4} + \frac{-\pi}{\pi} - 0 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

Sea la función $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$

a) Estudia la derivabilidad de f .

Resolución

Usando la definición de valor absoluto, $f(x) = \left\{ \frac{1-x}{1+x}, \text{ si } -1 < x < 0; \frac{1+x}{1-x}, \text{ si } 0 \leq x < 1 \right\}$

Si $x \neq 0$, f es continua y derivable por serlo las funciones racionales

$$f'(x) = \left\{ \frac{-1(1+x) - (1-x)1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \text{ si } -1 < x < 0; \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}, \text{ si } 0 \leq x < 1 \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1+|0|}{1-|0|} = 1. \text{ Luego, } f \text{ es continua en } x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{-2}{(1+0)^2} = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{2}{(1-0)^2} = 2. \text{ Luego, } f \text{ NO es derivable en } x = 0$$

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

Observa que $f'(x) = \left\{ \frac{-2}{(1+x)^2} < 0, \text{ si } -1 < x < 0; \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \text{ si } 0 \leq x < 1 \right\}$.

Luego, f es decreciente en el intervalo $(-1, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, 1)$

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$.

a) Esboza las gráficas de dichas funciones.

b) Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Resolución

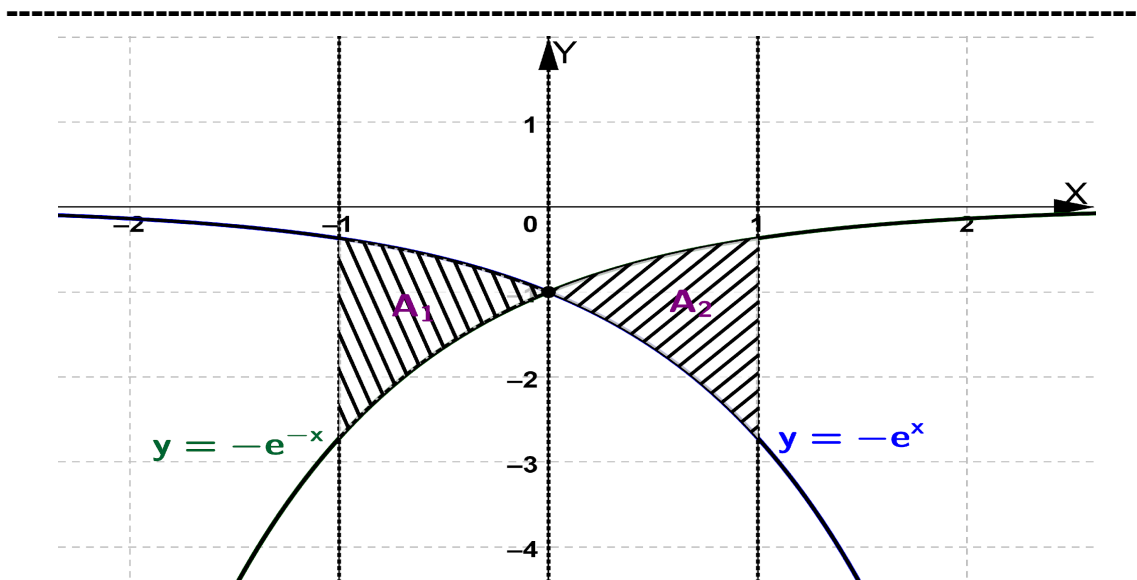
Para la gráfica de f tenemos en cuenta que

$$f(x) = -e^x < 0, f(0) = -e^0 = -1, f'(x) = -e^x < 0 \text{ (} f \text{ es decreciente)}, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Para la gráfica de g tenemos en cuenta que

$$g(x) = -e^{-x} < 0, g(0) = -e^0 = -1, g'(x) = e^{-x} > 0 \text{ (} g \text{ es creciente)}, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\{y = -e^x, y = -e^{-x}\} \Rightarrow -e^x = -\frac{1}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0, y = -1. \text{ Las gráficas se cortan el punto } (0, -1)$$



Por simetría respecto $A_1 = A_2$. El área es $A = A_1 + A_2 = 2 \int_0^1 [-e^{-x} - (-e^x)] dx = \int_0^1 (2e^x - 2e^{-x}) dx$

Una primitiva es $p(x) = 2e^x - 2e^{-x}(-1) = 2e^x + 2e^{-x}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(1) - p(0) = 2e^1 + 2e^{-1} - (2e^0 + 2e^0) = 2e + 2e^{-1} - 4 \cong 2,17 u^2$

Sea $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 - e, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
a) Estudia la derivabilidad de f .

Resolución

Si $x \neq 1$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} -e^x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$f(x) = 1 - e^1 = 1 - e = f(x) = f(1) = 2 \cdot 1 - 1 - e = 1 - e$. Luego, f es continua en $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -e^1 = -e \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2$. Luego, f NO es derivable en $x = 1$

Conclusión: f es derivable en $[0, 2] - \{1\}$

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

Para $x \neq 1$, como $f'(x) = \begin{cases} -e^x < 0, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 > 0, & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ f es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente

en el intervalo $(1, 2)$. Y como f es continua, f tiene un mínimo relativo en $x = 1$

Valoremos f en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ para así encontrar los extremos absolutos de f :

$f(0) = 1 - e^0 = 0$; $f(1) = 1 - e \cong -1,71$; $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 - e = 3 - e \cong 0,79$

Mínimo absoluto: $x = 1$, $y = 1 - e$

Máximo absoluto: $x = 2$, $y = 3 - e$

Calcula $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{4x}{x^4 - 6x^2 + 10} dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x^2 - 3$).

Resolución

Observa que $(x^2 - 3)^2 + 1 = x^4 - 6x^2 + 9 + 1 = x^4 - 6x^2 + 10$. Se pide $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2 + 1} dx$

Fíjate que, sin necesidad de hacer el cambio de variable, una primitiva de la función del integrando es $p(x) = 2 \arctg((x^2 - 3))$.

$$\begin{aligned} \text{Por la regla de Barrow, } \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{4x}{x^4 - 6x^2 + 10} dx &= p(2) - p(\sqrt{3}) = 2\arctg(2^2 - 3) - 2\arctg(\sqrt{3}^2 - 3) = \\ &= 2\arctg(1) - 2\arctg(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Sean las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = -x^2 + 1$.

a) Halla los puntos de corte (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto acotado y limitado por las gráficas de f y g .

Resolución

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1, f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ corta a los ejes en } (0, 0), (-1, 0) \text{ y } (1, 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}; f''(x) = 6x; f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0 \text{ (máximo)}, f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0 \text{ (mínimo)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1, g(0) = -0^2 + 1 = 1; g'(x) = -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ la gráfica de } g \text{ es la parábola cóncava de vértice } (0, 1) \text{ que corta a los ejes en } (-1, 0), (1, 0) \text{ y } (0, 1).$$

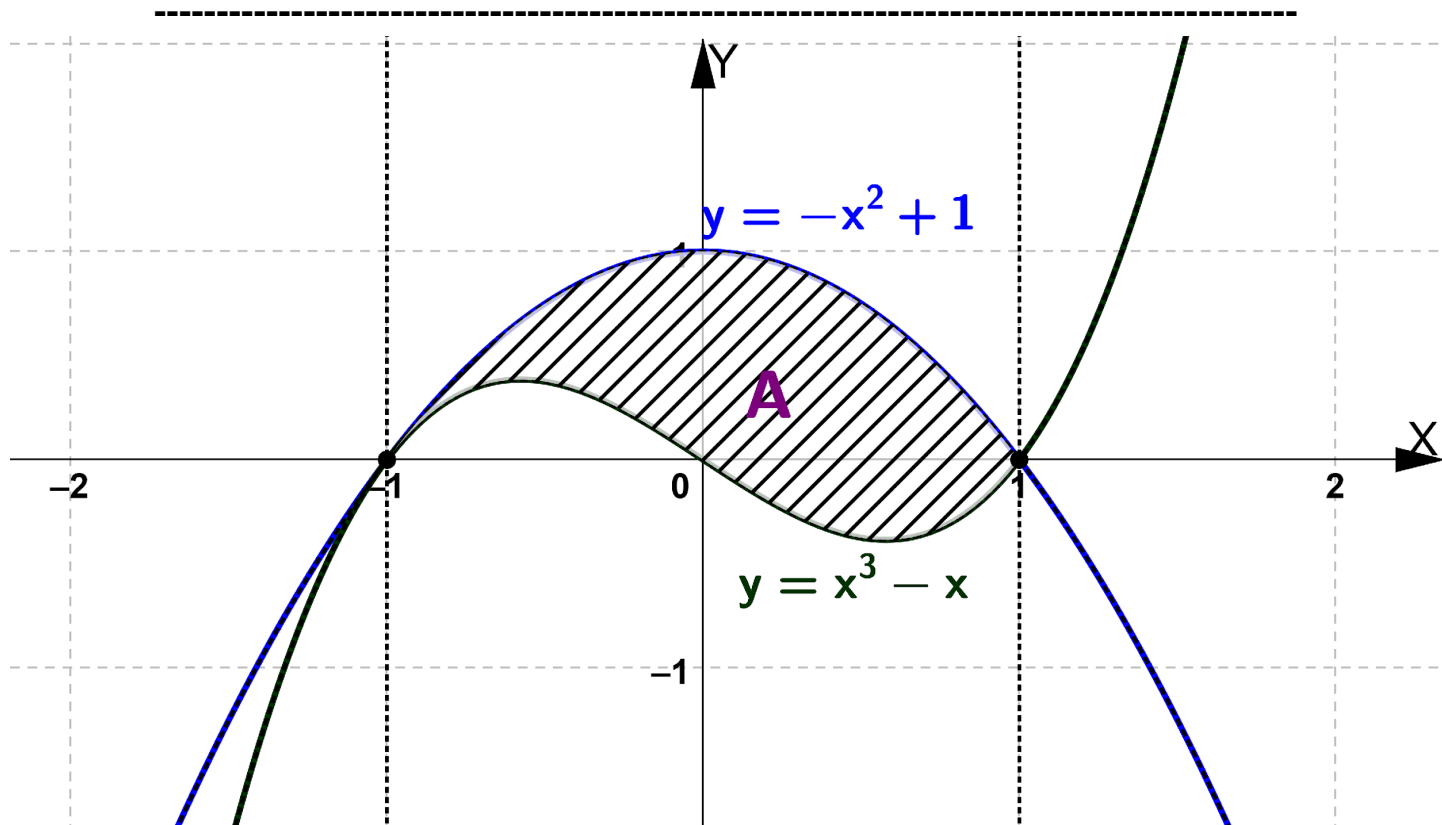
Puntos de corte de las gráficas:

$$\{y = x^3 - x, y = -x^2 + 1\} \Rightarrow x^3 - x = -x^2 + 1 \Rightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{Factoricemos usando la regla de Ruffini: } \begin{array}{r|rrrrrrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}; (x-1)((x^2+2x+1)) = (x-1)(x+1)^2 = 0$$

$$x = 1, y = -1^2 + 1 = 0, x = -1, y = -(-1)^2 + 1 = 0. \text{ Se cortan en } (-1, 0) \text{ y } (1, 0)$$

Las gráficas y el recinto cuya área se pide es:



El área es $A = \int_{-1}^1 [-x^2 + 1 - (x^3 - x)]dx = \int_{-1}^1 (x + 1 - x^2 - x^3)dx$

Una primitiva es $p(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} = \frac{6x^2 + 12x - 4x^3 - 3x^4}{12}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(-1) - p(1) = \frac{6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^4}{12} - \frac{6(-1)^2 + 12(-1) - 4(-1)^3 - 3(-1)^4}{12}$

$A = \frac{11}{12} - \frac{-5}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \cong 1,33 u^2$