

Concours communs polytechniques
Epreuve spécifique filière PSI- Session 2004
Mathématiques I : 4 heures

Calculatrices autorisées.

Notations et but du problème

E_0 est le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0) = 0$.

E_1 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

E_2 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note :

$$N_1(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{pour } f \in E_1 ; \quad N_2(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} (f'(t))^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{pour } f \in E_2 ;$$

Le but du problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.

Les parties I et II sont consacrées à deux exemples, la partie III aborde le problème de comparaison de façon plus générale.

Partie I – Exemple I

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \text{Arc tan } t$.

1. Montrer que f appartient à E_1 .

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $H_x : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'en particulier f appartient à E_2 .

3. Calcul de $N_2(f)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}_+} H_x(t) dt$.

3.1. Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de la

variable T , $\frac{1}{(T+1)(T+x^2)}$.

3.3. En déduire l'expression explicite de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$.

3.4. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

4. Etudier le signe de $u - \text{Arc tan } u$ pour $u \in \mathbb{R}_+$.

5. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \frac{\text{Arc tan}(xt)}{t(t^2+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Calcul de $N_1(f)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $\theta(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} G_x(t) dt$.

6.1. Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

6.2. Montrer que la fonction θ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

6.3. Expliciter $\theta'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

6.4. Expliciter $\theta(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

6.5. Etablir une relation entre $[N_1(f)]^2$ et $\theta(1)$.

6.6. En déduire la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie II - Exemple 2

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$.

1. Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. En déduire que f est élément de E_2 . Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

2. Déterminer un équivalent (simple !) de $f(t)$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ (respectivement lorsque $t \rightarrow +\infty$).

3. Montrer que f appartient à E_1 .

4. **Calcul d'une intégrale.**

4.1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{-\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

On note désormais $J = \int_{]0,1[} \frac{-\ln t}{1-t^2} dt$.

4.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto -t^{2k} \ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de $J_k = \int_{]0,1[} (-t^{2k} \ln t) dt$.

4.3. Justifier avec soin l'égalité $J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} (-t^{2k} \ln t) dt$.

4.4. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J , sachant que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Calcul de $N_1(f)$.

$$I = [N_1(f)]^2 = \int_{R_+^*} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt$$

Pour simplifier on note

On rappelle que $shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, $chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ pour $u \in R$, et la relation $ch^2u - sh^2u = 1$.

$$I = 2 \int_{R_+^*} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$

5.1. Montrer que

$$u = f(t) = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$$

5.2. Justifier le changement de variable dans l'intégrale obtenue dans la question II.5.1 ; que devient I quand on effectue ce changement ?

Même question pour le changement de variable $v = e^u$.

5.3. En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part les ensembles E_1 et E_2 , d'autre part les fonctions N_1 et N_2 .

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe C^1 et telle que

$$f(0)=0$$

). On associe à f deux fonctions g et h définies sur R_+^* par $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et

$$h(t) = \frac{f(t)}{t} \text{ pour tout } t > 0. \text{ On pose } \alpha = f'(0).$$

1.1. Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t \rightarrow 0^+$?

1.2. Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in R_+^*$.

1.3. Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t) \times g'(t)$) lorsque $t \rightarrow 0^+$?

(on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$).

1.4. Etablir, pour $x > 0$, la relation :

$$(R) : \int_{[0,x]} (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2} (g(x))^2 + \int_{[0,x]} (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_{[0,x]} (h(t))^2 dt$$

(après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0, x]$ de chacune des fonctions qui interviennent)

2. **Comparaison de E_1 et E_2 .**

2.1. Dédurre de la relation (R) l'inclusion $E_2 \subset E_1$.

2.2. Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$)

3. **Comparaison de N_1 et N_2 .**

3.1. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E_0 .

On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2 .

3.2. Justifier l'inégalité $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.

3.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$.

Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.

3.4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes sur E_2 ?

4. Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$; quelle et cette limite ?

Fin de l'énoncé