

Centrale PSI Physique - Chimie 2001

*Partie I – Hydroxydes et oxydes en présence d'eau***I.A – Dissolution des hydroxydes en milieu tamponné**

I.A.1) $[\text{Fe}^{3+}] = 10^{-2} \text{ M}$

$[\text{OH}^-] = (10^{-38}/[\text{Fe}^{3+}])^{1/3} = 10^{-12} \text{ M}$

$\text{Fe}(\text{OH})_3$ précipite lorsque $\text{pH} \geq 2$.

I.A.2) 99,9 % des ions Fe^{3+} ont précipités.

Alors $[\text{Fe}^{3+}] = 10^{-5} \text{ M}$ $[\text{OH}^-] = (\text{Ke}/[\text{Fe}^{3+}])^{1/3} = 10^{-11} \text{ M}$

$\text{pH} = 3$

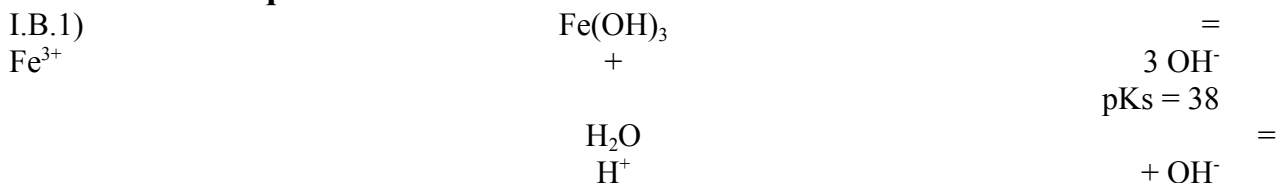
I.A.3) $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-2} \text{ M}$

$[\text{OH}^-] = (10^{-16}/[\text{Fe}^{2+}])^{1/2} = 10^{-7} \text{ M}$

$\text{Fe}(\text{OH})_2$ précipite lorsque $\text{pH} \geq 7$.

I.A.4) On ne peut à priori rien prévoir. En effet, $\text{pKs}(\text{Fe}(\text{OH})_3) > \text{pKs}(\text{Fe}(\text{OH})_2)$, $\text{Fe}(\text{OH})_2$ serait plus soluble, cependant il libère moins d'ions OH^- .

Pour des nombres de mol dissous égaux, il faut comparer les valeurs du rapport $\text{pKs}/\text{"nb d'ions OH"}^-$. N'est-ce pas déjà entreprendre un calcul numérique ?

I.B – Solution aqueuse saturée

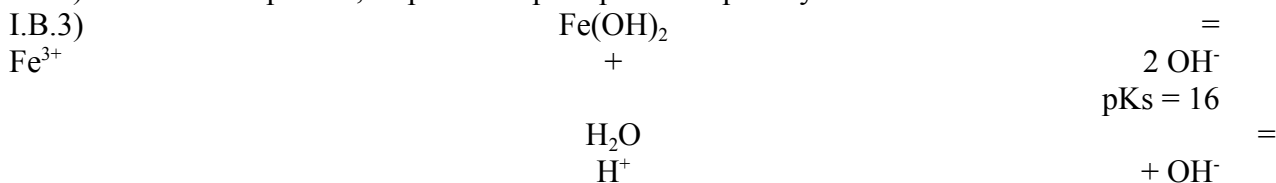
$\text{pKe} = 14$

On peut supposer que l'autoprotolyse de l'eau est la réaction prépondérante. Dans ce cas,

$[\text{OH}^-] = 10^{-7} \text{ M} = [\text{H}^+] \quad [\text{Fe}^{3+}] = 10^{-38}/[\text{OH}^-]^3 = 10^{-17} \text{ M}$

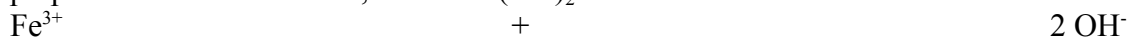
On vérifie que l'avancement de la réaction de dissolution de l'hydroxyde de fer(III) (10^{-17} M) est très inférieur à celui de la réaction d'autoprotolyse de l'eau (10^{-7} M).

I.B.2) $\text{pH} = 7$, ce pH est imposé par l'autoprotolyse de l'eau.



$\text{pKe} = 14$

On suppose que la réaction de dissolution de l'hydroxyde de fer(II) est la réaction prépondérante. Dans ce cas,



x

$2x$

$\text{Ks} = 4x$

3

$[\text{Fe}^{3+}] = x = (\text{Ks}/4)^{1/3} = 2,92 \cdot 10^{-6} \text{ M}$

$[\text{OH}^-] = 2x$

$x \gg 10^{-7}$, donc la dissolution est bien prépondérante.

$$[\text{Fe}^{3+}] = 2,92 \cdot 10^{-6} \text{ M}$$

$$[\text{OH}^-] = 5,85 \cdot 10^{-6} \text{ M}$$

$$[\text{H}^+] = 1,71 \cdot 10^{-9} \text{ M}$$

I.B.4) $\text{pH} = 8,8$, l'hydroxyde de fer(II) est plus soluble (basique) que l'hydroxyde de fer(III).

I.C – Stabilité de l'hydroxyde de fer(III)

I.C.1) + III dans les deux.

I.C.2) $2 \text{Fe}(\text{OH})_3$ =

Fe_2O_3 + $3 \text{H}_2\text{O}$

I.C.3) Il faut sans doute lire "en présence" là où l'énoncé mentionne "en équilibre".

L'activité des deux solides et celle du solvant valent 1.

$$A = A^\circ = 2 \Delta_f^\circ(\text{Fe}(\text{OH})_3) - \Delta_f^\circ(\text{Fe}_2\text{O}_3) - 3 \Delta_f^\circ(\text{H}_2\text{O}) = 59 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

I.C.4) Le système est instable ($A \neq 0$) et évolue dans le sens de la formation de Fe_2O_3 ($A > 0$).

I.C.5) Il y a d'abord formation d'hydroxyde de fer(III) sous contrôle cinétique, hydroxyde qui se transforme peu à peu en oxyde (contrôle thermodynamique).

Partie II – Matériau magnétique conducteur à basse fréquence

II.A – Équation du champ magnétique

II.A.1) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$ $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{B}$ $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ fréquence f 1 kHz 1 MHz 1 GHz 1 THz

alliage 4.1013 4.1010 4.107 4.104

ferrite 2.104 20 0,02 2.107

II.A.2) Pour avoir $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ll \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ou $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, il faut choisir $f < 1$ GHz.

II.A.3)

INCORPORER Equation.3

INCORPORER Equation.3 équation de la diffusion de particules

ou INCORPORER Equation.3 équation de la diffusion de la chaleur

ou INCORPORER Equation.3 pour un écoulement incompressible laminaire.

Cette équation n'est pas invariante par la transformation $t \rightarrow -t$ (renversement du temps).

Ici, il y a dissipation d'énergie par effet Joule dans le milieu magnétique.

Dans les exemples, il y a diffusion irréversible du plus dense vers le moins dense, du plus chaud vers le plus froid ou dissipation d'énergie par frottement visqueux.

Une équation de propagation de d'Alembert : $c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$.

II.A.4) L'équation du II.A.3) a) montre que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \frac{1}{2} = L$.

Hz 50 1 kHz 0,5 mm 0,1 mm 2 m 0,5 m

L'alliage est imperméable au champ magnétique, le champ reste localisé en surface.

II.B – Tracé du cycle d'hystérésis

I.B.1)

Hc : excitation coercitive (# 1 à 106 A/m)

Br : champ rémanent (# 10-3 à 1 T)

I.B.2)

a) Tout plan contenant l'axe de révolution de tore est plan de symétrie pour la distribution de courant : $\vec{J}$ est donc orthogonal à la section du tore. Le milieu est linéaire et isotrope, donc $\vec{J}$ est colinéaire à $\vec{B}$.
Le système est invariant par rotation autour de l'axe du tore. Les champs ne dépendent pas de la coordonnée ϕ d'un système de coordonnées cylindriques défini par rapport à l'axe du tore. Ils dépendent de r et de z (et du temps t).

Dans le plan d'une section du tore, la position d'un point peut être repérée par les coordonnées r et z ou bien par r et ϕ .

L'hypothèse $L \gg R$ permet de considérer localement le tore comme un cylindre infiniment long et donc d'affirmer que $\vec{J}$ et $\vec{B}$ sont indépendants de ϕ . On a donc $\vec{J}(r, t)$ et $\vec{B}(r, t)$: la distribution de champ magnétique est à symétrie cylindrique.

Les courants induits $\vec{J}_{\text{ind}}$ dans le milieu de conductivité σ , sont $\vec{J}_{\text{ind}} = \sigma \vec{E}$, avec $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$.
Tout plan contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de champ magnétique, d'où $\vec{J}_{\text{ind}} = j_{\text{ind}}(r, t) \vec{e}_\phi$: les courants s'enroulent autour de $\vec{e}_\phi$. Les lignes de courants sont donc des cercles concentriques.

Appliquons le théorème d'Ampère à un contour fermé circulaire situé dans un plan orthogonal à l'axe du tore et centré sur cet axe, de rayon tout juste supérieur à $L/2$ - R (contour représenté en pointillé).

Ce contour n'enlace aucun courant induit, seulement le courant $i(t)$ parcourant les N spires de l'enroulement.

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N i(t)$.

Comme $L \gg R$, $H(R, t) = (N/L) i(t)$.

En procédant comme au b), mais avec un contour circulaire situé dans un plan orthogonal à l'axe du tore et centré sur cet axe, de rayon tout juste inférieur à $L/2$ - R (représenté en pointillé), on obtient – à condition que les spires soient réellement à la surface du tore - $\vec{B}_{\text{ext}}$ et $\vec{B}_{\text{int}}$ nuls.

Considérons pour cette question B uniforme dans le tore. Les amplitudes de B et de son flux Φ à travers les N spires sont $B_0 = \mu_0 N I_0 / L$ et $\Phi_0 = B_0 R^2 N = \mu_0 R^2 N^2 I_0 / L$.

A.N. :

alliage

ferrite

B_0

1 T

0,1 T

Φ_0

4.10-2 Wb

4.10-3 Wb

Ces valeurs sont usuelles.

II.B.3)

a)

b) On suppose que H et B sont uniformes. D'après le théorème d'Ampère, $H L = N_1 i_1 + N_2 i_2$, où N_1 et N_2 sont les nombres de spires au primaire et au secondaire. On se place dans une situation telle que $i_1 \gg i_2$ ($r_1 \gg r$).

Au primaire, on a $U_1 = r_1 i_1$, ce qui donne INCORPORER Equation.3 .

Pour obtenir B , il est nécessaire d'avoir recours à un intégrateur : INCORPORER Equation.3 lorsque le montage à AO fonctionne en intégrateur, c'est-à-dire pour $r_2 C_2 \omega f \gg 1$.

U_1 et U_2 sont de l'ordre de quelques centaines de mV, N_1 et N_2 de l'ordre de 100, i_1 de l'ordre de 0,1 A.

Il faut donc choisir $r \neq 1$ ■■

$r_1 C$ est de l'ordre de 10 ms pour la ferrite et de 100 ms pour l'alliage.

On peut choisir $C \neq 1 \mu F$ et $r_1 \neq 10 k\Omega$ ou 100 k Ω .

La condition $r_2 C_2 \omega f \gg 1$ impose à 50 Hz de choisir $r_2 > 50 k\Omega$.

II.B.4)

a) En posant $r = \frac{r_2}{r_1} \frac{C_2}{C_1} \omega f$, dans INCORPORER Equation.3 , il vient INCORPORER Equation.3 puis $\sqrt{2} = -2i$ d'où $\sqrt{2} = \pm (1 - i)$.

b) En multipliant l'équation satisfaite par B par y , on obtient INCORPORER Equation.3 qui donnerait $dB(0)/dt = 0$, si l'on était sûr que $|d^2B(0)/dt^2|$ reste borné.

Voir II.A.4).

II.B.5)

On constate que :

pour $R/\omega < 3$, $|B(r/\omega)| \approx |B(0)|$, $|B|$ reste sensiblement uniforme à l'intérieur du tore

pour $R/\omega > 8$, $|B(r/\omega)| \approx |B(0)| \exp(r/\omega - 6)$.

Pour la ferrite, $R/\omega \approx 4.10^{-3} \ll 1$. Le flux de B est donc proportionnel à B . On peut tracer le cycle d'hystérésis avec un tel dispositif.

Pour l'alliage, $R/\omega \approx 20 > 3$. Le flux mesuré n'est pas proportionnel à B . On peut imaginer d'augmenter ω en diminuant la fréquence (les valeurs des composants de l'intégrateur vont alors poser problème) ou en diminuant R (en feuilletant le matériau).

II.B.6)

$B(t) = N \frac{R_2}{R_1} h(R/\omega) B(R, t)$

b) $h(R/\omega)$ vaut d'après les courbes environ $0,07 \exp(-i\pi/4)$. Le flux de B est alors déphasé d'un huitième de période par rapport au champ B . Ceci déforme le cycle qui s'en trouve arrondi.

A moins d'interposer un déphaseur au secondaire, il est impossible d'observer le cycle réel.

Partie III – Étude structurale d'une ferrite

III.A –

III.B – 4

III.C – $r_t = r_{O^{2-}} \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} - 1 \right) = 31 \text{ pm}$

III.D – $r_o = r_{O^{2-}} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 58 \text{ pm}$

III.E – $r_{Fe^{2+}}$ et $r_{Fe^{3+}}$ sont supérieurs à r_t et à r_o , il est donc impossible de placer les ions fer dans les

sites interstitiels sans déformation de l'empilement des ions oxydes.

III.F – Il y a deux ions Fe^{3+} et un ion Fe^{2+} par maille.

Les 8 sites tétraédriques sont occupés par la moitié des ions Fe^{2+} , soit un taux d'occupation de $(1/2)/8$ c'est-à-dire 6,25 %.

Les 4 sites octaédriques sont occupés par tous les ions Fe^{3+} et par la moitié des ions Fe^{2+} , soit un taux d'occupation de $2/4 + (1/2)/4$ c'est-à-dire 62,5 %.

(L'énoncé commet ici une imprécision, en réalité, les ions Fe^{2+} se placent dans des sites octaédriques et les ions Fe^{3+} occupent pour moitié des sites octaédriques et pour moitié des sites tétraédriques. Dans ce cas, 50 % des sites octaédriques et 12,5 % des sites tétraédriques sont occupés.)

III.G – Ce sont les ions Fe^{2+} placés dans les sites tétraédriques qui déforment le plus la maille.

Si on suppose que celle-ci reste cubique, son arête vaut $4(r_{O^{2-}} + r_{Fe^{2+}})/\sqrt{3} = 499 \text{ pm}$.

(Si on tient compte de l'erreur de l'énoncé, on trouve 471 pm.)

Partie VI –

IV.A – Utilisation d'une ferrite dans un hacheur « dévolteur »

IV.A.1) $\frac{E}{L} = \frac{E'}{L} i$ et $E' = \frac{E}{2} i$

$\frac{E}{L} i = E' i$ traduit la conversion électromécanique de puissance.

IV.A.2) $\frac{E}{L} = \frac{E'}{L} i = 6,4 \text{ N.m}$

IV.A.3) On conserve le couple, donc le courant i . La vitesse est divisée par 2, donc $E' = E/2 = 50 \text{ V}$.

La résistance à placer en série avec le moteur vaut $R = E/2i = 5 \text{ }\Omega$. La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance vaut $Ri^2 = 500 \text{ W}$, ce qui est énorme (rendement 50 %).

IV.A.4)

a) Il a un rendement de 100 %.

$E' = \gamma E$ où γ est le rapport cyclique. Il vaut donc 1/2.

IV.A.5) De $t = 0$ à $t = T/2$, $E - E' = L \frac{di}{dt} / (T/2)$

D'où $L = (E - E')T/2 \frac{di}{dt}$ A.N. : $L = 50 \text{ mH}$

Il faut ajouter à L une bobine d'autoinductance au moins égale à 40 mH en série avec le moteur.

IV.A.6) Question assez vague, il faudrait que l'énoncé précise une contrainte supplémentaire.

On peut choisir par exemple d'imposer un fonctionnement quasi-linéaire. On lit alors sur la courbe,

$$\dot{B} = B/H \approx 2.10^{-3} \text{ pour } H \leq 200 \text{ A.m}^{-1}.$$

En notant l la longueur de la bobine, l'autoinductance est $L = BSN^2/Hl$.

Avec $N = 100$ et $l = 25 \text{ cm}$ on obtient un volume $V = S.l \approx 100 \text{ cm}^3$.

IV.B – Utilisation d'une ferrite à haute fréquence dans une ligne triplaque – Étude locale des champs

IV.B.1) a) INCORPORER Equation.3

IV.B.1) b)

IV.B.2) INCORPORER Equation.3 INCORPORER Equation.3 satisfait à la même équation.

IV.B.3) a) INCORPORER Equation.3 d'où INCORPORER Equation.3

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
 b) Dans le cas de tels champs, on peut choisir un potentiel vecteur INCORPORER

Equation.3
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
 La circulation dans un plan perpendiculaire à l'axe des z depuis un point d'une

plaque à un point du ruban de même coordonnée z vaut INCORPORER Equation.3
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
. On peut donc écrire la différence de potentiel entre le ruban conducteur et le plan conducteur sous la forme $v(z, t) = V_0.f(z, t)$. IV.C – Étude de modèle de la ligne à « constantes réparties » IV.C.1) a) INCORPORER Equation.3

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
 INCORPORER Equation.3
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
 IV.C.1) b) INCORPORER

Equation.3
$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$
 C'est rigoureusement la même équation qu'au IV.B car $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$

IV.C.2) $k^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ k étant complexe, le milieu est absorbant, les ondes qui s'y propagent ont une amplitude qui décroît. IV.C.3) a) A l'aide des équations du IV.C.1) a), on détermine $Z_c = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$. Alors, $Z_c^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$

b) $P_{\text{ferrite}} = \text{Re}(I/Z_c) \cdot V_{12}/2$ $P_{\text{ferrite}} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $P_{\text{ferrite}} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ Pour une même amplitude de l'onde, la puissance nécessaire est plus faible. IV.C.4) $k = k' - ik''$ avec $k^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$

$k^2 = k'^2 - k''^2 - 2ik'k''$ En supposant $k'^2 \gg k''^2$, on obtient $k'' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $k'' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ On détermine la distance caractéristique d'atténuation $\alpha' = 1/k'' \approx 20 \text{ m}$. On a bien $k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$

$k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ b) $Z_c = l\omega/k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $Z_c = l\omega/k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $Z_c = l\omega/k' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$