

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	23-27 Aralık 2024
Sınıf	10	Süre	3 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	POLİNOMLAR		
Konu	Polinomlarla Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemleri		

BÖLÜM II

Kazanım	10.3.1.2. Polinomlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yapar.
Değerler	VATANSEVERLİK – Çalışkan Olma ve Dayanışma
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

POLİNOMLARLA TOPLAMA, ÇIKARMA, ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİ

Polinomlarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri



Bilgi

Polinomlarla toplama ya da çıkarma işlemleri yapılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

Örneğin $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$P(x)$ polinomunun bir terimi $a \cdot x^m$, $Q(x)$ polinomunun bir terimi $b \cdot x^m$ ise

$a \cdot x^m + b \cdot x^m = (a + b) \cdot x^m$ terimi $P(x) + Q(x)$ polinomunun bir terimidir.

$a \cdot x^m - b \cdot x^m = (a - b) \cdot x^m$ terimi $P(x) - Q(x)$ polinomunun bir terimidir.



Örnek

$P(x) = -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10$ ve $Q(x) = -4x^3 + 3x^2 + x - 2$ polinomları veriliyor.

- $P(x) + Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $P(x) - Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $3 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

Polinomlarda toplama ya da çıkarma işlemleri yapılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları kendi aralarında toplanır ya da çıkarılır.

- $$P(x) + Q(x) = -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10 - 4x^3 + 3x^2 + x - 2$$

$$= -7x^4 + (5 - 4)x^3 + (-8 + 3)x^2 + x + 10 - 2$$

$$= -7x^4 + x^3 - 5x^2 + x + 8 \text{ olur.}$$
- $$P(x) - Q(x) = -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10 - (-4x^3 + 3x^2 + x - 2)$$

$$= -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10 + 4x^3 - 3x^2 - x + 2$$

$$= -7x^4 + (5 + 4)x^3 + (-8 - 3)x^2 - x + 10 + 2$$

$$= -7x^4 + 9x^3 - 11x^2 - x + 12 \text{ olur.}$$
- $$3 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x) = 3 \cdot (-7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10) - 4(-4x^3 + 3x^2 + x - 2)$$

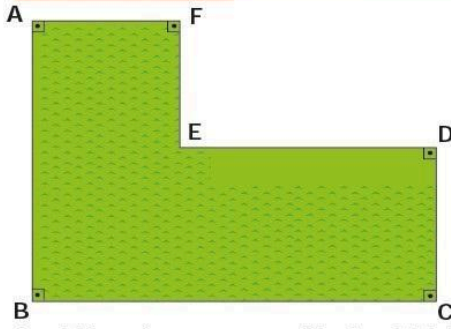
$$= -21x^4 + 15x^3 - 24x^2 + 30 + 16x^3 - 12x^2 - 4x + 8$$

$$= -21x^4 + (15 + 16)x^3 + (-24 - 12)x^2 - 4x + 30 + 8$$

$$= -21x^4 + 31x^3 - 36x^2 - 4x + 38 \text{ olur.}$$



Örnek



Aysel Hanım'ın arsasının şekli yukarıdaki gibidir. Aysel Hanım arsasının $[FE]$, $[ED]$, $[DC]$ kenarlarına bir sıra duvar ördürmek istiyor. $|AF| = 2x^5 + 3x^3 + 2x^2$, $|AB| = -x^5 + 10x^3 + x^2 + 200$ ve $|BC| = 3x^5 - 2x^3 + 3x^2$ metredir. Aysel Hanım'ın ördüreceği duvarın uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.



Çözüm

$|FE| + |DC| = |AB|$ olduğundan $|FE| + |DC| = -x^5 + 10x^3 + x^2 + 200$ metredir.

$|ED| = |BC| - |AF|$ olduğundan

$$\begin{aligned} |ED| &= (3x^5 - 2x^3 + 3x^2) - (2x^5 + 3x^3 + 2x^2) \\ &= 3x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^5 - 3x^3 - 2x^2 \\ &= x^5 - 5x^3 + x^2 \text{ metredir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Buradan } |FE| + |ED| + |DC| &= -x^5 + 10x^3 + x^2 + 200 + x^5 - 5x^3 + x^2 \\ &= 5x^3 + 2x^2 + 200 \text{ metredir.} \end{aligned}$$

Aysel Hanım'ın ördüreceği duvarın uzunluğu $5x^3 + 2x^2 + 200$ metredir.

Polinomlarla Çarpma İşlemi



Bilgi

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere $P(x) \cdot Q(x)$ işlemi yapılırken $P(x)$ polinomunun her terimi $Q(x)$ polinomunun her terimiyle çarpılır ve elde edilen ifadelerin cebirsel toplamı x değişkeninin azalan ya da artan kuvvetlerine göre sıralanarak yazılır. Örneğin $P(x)$ polinomuna ait herhangi bir terim $a \cdot x^m$ ve $Q(x)$ polinomuna ait herhangi bir terim $b \cdot x^n$ ise $a \cdot x^m \cdot b \cdot x^n = a \cdot b \cdot x^{m+n}$ terimi $P(x) \cdot Q(x)$ polinomunun bir terimidir.



Örnek

$P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 5$ ve $Q(x) = -2x^2 + 5x$ olarak veriliyor. $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$ olduğuna göre $R(x)$ polinomu ve derecesini bulunuz.



Çözüm

$$\begin{aligned} R(x) &= (6x^3 - 4x^2 + 5) \cdot (-2x^2 + 5x) \\ &= -12x^5 + 30x^4 + 8x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 25x \\ &= -12x^5 + 38x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 25x \text{ olur. } R(x) \text{ polinomunun derecesi ise } \text{der}[R(x)] = 5 \text{ olur.} \end{aligned}$$



Örnek

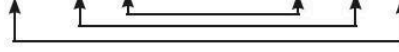
$P(x) = -5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7$ polinomu veriliyor. $P^2(x)$ polinomunun x^6 lı teriminin katsayısını bulunuz.



Çözüm

$P^2(x) = P(x) \cdot P(x)$ olur. Buradan

$P^2(x) = (-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7) \cdot (-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7)$ yazılıp bu çarpım sonucunda içinde x^6 lı terimler bulunduran ifadeler belirlenir. $(-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7) \cdot (-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7)$ çarpımından



elde edilecek x^6 lı terim $-5x^4 \cdot (-x^2) + 6x^3 \cdot 6x^3 - x^2 \cdot (-5x^4) = 5x^6 + 36x^6 + 5x^6 = 46x^6$ olur.

Buradan $P^2(x)$ polinomunun x^6 lı teriminin katsayısı 46 dır.

Polinomlarla Bölme İşlemi



Bilgi

$P(x)$ ve $Q(x) \neq 0$ polinomları için $\deg[P(x)] \geq \deg[Q(x)]$ olmak üzere $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölümü aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ B(x) \cdot Q(x) & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

$P(x)$: Bölünen polinom,

$Q(x)$: Bölen polinom,

$B(x)$: Bölüm polinomu,

$K(x)$: Kalan polinomudur.

Yukarıda verilen bölme işleminde

- $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ olur. Bu eşitliğe bölme eşitliği denir.
- $K(x) = 0$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam (kalansız) bölünüyor denir.
- $\deg[K(x)] < \deg[Q(x)]$ olur.
- $\deg[B(x)] = \deg[P(x)] - \deg[Q(x)]$ olur.



Örnek

$P(x)$ polinomunun $Q(x) = 2x - 1$ polinomuna bölümünde, bölüm $4x + 1$ ve kalan 5 olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.



Çözüm

Bölünen $P(x)$, bölen $Q(x)$, bölüm $B(x)$, kalan $K(x)$ polinomu olmak üzere $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ olur. Verilen değerler $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$P(x) = (2x - 1) \cdot (4x + 1) + 5$$

$$P(x) = 8x^2 + 2x - 4x - 1 + 5$$

$$P(x) = 8x^2 - 2x + 4 \text{ olur.}$$



Örnek

$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 2$ ve $Q(x) = x^2 + x - 1$ polinomları veriliyor. $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.



Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^2 + x - 2 & x^2 + x - 1 \\ 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 2x + 1 \\ \hline -2x^3 - x^2 + x - 2 & \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x & \\ \hline x^2 - x - 2 & \\ x^2 + x - 1 & \\ \hline -2x - 1 & \end{array}$$

$x^2 = x^2 \cdot 1$ “ x^2 ile 1 in çarpımı 5. satırdaki polinomun ilk terimini verir.”

$-2x^3 = -2x \cdot x^2$ “ x^2 ile $-2x$ in çarpımı 3. satırdaki polinomun ilk terimini verir.”

$2x^4 = x^2 \cdot 2x^2$ “ x^2 ile $2x^2$ nin çarpımı bölünen polinomun ilk terimini verir.”

Bölme işlemi sonucunda elde edilen bölüm polinomu $B(x) = 2x^2 - 2x + 1$, kalan polinomu ise $K(x) = -2x - 1$ olur.



Bilgi

- Bir $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır.
- $P(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır.
- $x = a$ için $P(a) = 0$ ise $x = a$ sayısına, $P(x)$ polinomunun sıfırı (bir kökü) denir.



Örnek

$P(x) = 7x^3 + 6x^2 + 8x + 9$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.



Çözüm

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ değeri, $P(x)$ polinomunda yerine yazılırsa

$$P(-1) = 7 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 9$$

$$P(-1) = -7 + 6 - 8 + 9$$

$$P(-1) = 0 \text{ olur.}$$

$P(x)$ polinomu $x + 1$ ile tam bölündüğünden $x = -1$ sayısının $P(x) = 0$ denkleminin sıfırı olduğuna ve $P(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$ şeklinde yazılabileceğine dikkat ediniz.



Örnek

$P(x + 3) = -x^2 + 6x + 11$ polinomunun $x - 5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.



Çözüm

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ değeri $P(x + 3)$ polinomunda x yerine yazılırsa

$$P(5 + 3) = -5^2 + 6 \cdot 5 + 11 \Rightarrow P(8) = -25 + 30 + 11 \Rightarrow P(8) = 16 \text{ olur.}$$



Örnek

Bir $P(x)$ polinomu için aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

- $P(x)$ polinomu 3. dereceden bir polinomdur.
- $P(x)$ polinomunun sıfırları (kökleri) 2, -2 ve -1 dir.
- $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamı 12 dir.

Verilen bu bilgilere göre

- $P(x)$ polinomunu yazınız.
- $P(x^2 + 3)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.



Çözüm

- $P(x)$ polinomunun sıfırları 2, -2 ve -1 olduğundan bu polinom $(x - 2)$, $(x + 2)$ ve $(x + 1)$ ifadelerinin her birine tam bölünür. Dolayısıyla bu üç ifade $P(x)$ polinomunun çarpanlarıdır.

Buradan $P(x) = Q(x) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$ olarak ifade edilebilir.

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$ çarpımı 3. dereceden olduğundan $Q(x)$ polinomu bir sabit polinomdur.

Buradan $Q(x) = c$ yazılabilir. Bu durumda $P(x) = c \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$ olur.

$P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 12 olduğundan $P(1) = 12$ olur.

$$P(1) = c \cdot (1 - 2) \cdot (1 + 2) \cdot (1 + 1) = 12$$

$$-6 \cdot c = 12$$

$$c = -2 \text{ için } P(x) = -2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \text{ olur.}$$

- $P(x^2 + 3)$ polinomunun sabit terimi $P(0^2 + 3) = P(3)$ olur. Buradan $P(3) = -2 \cdot (3 - 2) \cdot (3 + 2) \cdot (3 + 1) \Rightarrow P(3) = -40$ olur.



Örnek

$P(x-1) = 2x^5 + 6x^4 - 3x + 7$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(2x+3)$ polinomunun $2x+6$ ile bölümünden kalanı bulunuz.



Çözüm

$2x+6=0 \Rightarrow x=-3$ olur.

$x=-3$ değeri $P(2x+3)$ polinomunda x yerine yazılarak kalan bulunur.

Kalan $P(2 \cdot (-3) + 3) = P(-3)$ olur.

$x-1=-3$ için $x=-2$ değeri $P(x-1)$ polinomunda yerine yazılırsa

$$P(-2-1) = 2 \cdot (-2)^5 + 6 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2) + 7$$

$$P(-3) = -64 + 96 + 6 + 7 \Rightarrow P(-3) = 45 \text{ olur.}$$

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

- $P(x) = -3x^3 + 6x^2 - 7x + 2$ ve $Q(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x$ polinomları veriliyor. Buna göre
 - $x \cdot P(x) + 3 \cdot Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.
 - $-2 \cdot P(x) + x^2 \cdot Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $a \neq 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(-4x^5 + ax^4 - 2x^3 + 3) \cdot (x^2 - 3x + 4)$ çarpımından elde edilen ifadede x^5 li terimin katsayısı -6 olduğuna göre a sayısının değerini bulunuz.
- $P(x) = -5x^5 + 3x^4 - x^2 - 6x + 4$ polinomunun $Q(x) = x^3 - x^2 + 2$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm polinomu ve kalan polinomunun toplamını bulunuz.
- $$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline - & B(x) \\ \hline 2x^3 - x^2 + 1 & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde $Q(x)$ ve $B(x)$ polinomlarının derecesi eşit olduğuna göre $\deg[P^2(x) \cdot Q(x)]$ in alabileceği en küçük değeri bulunuz.
- $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$ polinomu veriliyor. Buna göre
 - $P(x)$ polinomunun $x+2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
 - $P(x-3)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
 - $x^2 \cdot P^2(x-2)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x-2) \cdot P(x+3) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$ eşitliğini sağlayan $P(x+3)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- $P(x) = -2x^9 + 6x^6 - 3x^5 + x^3 + 9x^2 + 1$ polinomunun $x - \sqrt[3]{3}$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- $P(x) = x + 4$ polinomu veriliyor. $24 \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \cdot \dots \cdot P(24)$ çarpımının sonucunu bulunuz.

Dersin Diğer Derlerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

.../.../2024

UYGUNDUR

Okul Müdürü