

Câu1: (Chuyên Đại Học Vinh) Cho khai triển

$$(3 - 2x + x^2)^9 = a_0x^{18} + a_1x^{17} + a_2x^{16} + \dots + a_{18}.$$

Giá trị của a_{15} bằng

- A.** -804816 **B.** 218700 **C.** -174960 **D.** 489888

Đáp án A

Phương pháp:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Sử dụng khai triển nhị thức Newton

Hệ số a_{15} là hệ số của số hạng chứa x^3 . Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 .

Cách giải:

Ta có:

$$(3 - 2x + x^2)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot 3^{9-k} \cdot (x^2 - 2x)^k$$

Hệ số a_{15} thuộc số hạng $a_{15}x^3$ nên với $k \geq 4$ thì sẽ không thỏa mãn.

Với $k = 2 \Rightarrow C_9^k \cdot 3^{9-k} \cdot (x^2 - 2x)^k = 78732(x^2 - 2x)^2 = 78732(x^4 - 4x^3 + 4x^2)$

Với

$$k = 3 \Rightarrow C_9^k \cdot 3^{9-k} \cdot (x^2 - 2x)^k = 61236(x^2 - 2x)^3 = 61236(x^6 - 3x^4 \cdot 2x + 3x^2 \cdot (2x)^2 - 8x^3)$$

Do đó $a_{15} = 78732 \cdot (-4) + 61236 \cdot (-8) = -804816$

Câu 2: (Chuyên Đại Học Vinh) Giả sử a, b là các số thực sao cho

$$x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z} \text{ đúng với mọi các số thực dương } x, y, z \text{ thỏa mãn } \log(x + y) = z$$

và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A.** $-\frac{31}{2}$ **B.** $-\frac{25}{2}$ **C.** $\frac{31}{2}$ **D.** $\frac{29}{2}$

Đáp án D

Phương pháp:

$$\begin{cases} \log(x + y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10^{z+1} = 10 \cdot 10^z \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 10(x + y)$$

Thay $10^z = x + y$ vào $x^3 + y^3 = a.10^{3z} + b.10^{2z}$, biến đổi, thế và đồng nhất hệ số.

Cách giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2+y^2) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ x^2+y^2 = 10^{z+1} = 10.10^z \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 10(x+y)$$

$$\text{Khi đó } x^3+y^3 = a.10^{3z} + b.10^{2z} \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) = a.(10^z)^3 + b.(10^z)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) = a.(x+y)^3 + b.(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2 = a.(x+y)^2 + b.(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2 = a.(x^2+2xy+y^2) + \frac{b}{10}.(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2-xy = \left(a+\frac{b}{10}\right).(x^2+y^2) + 2a.xy$$

$$\text{Đồng nhất hệ số, ta được } \begin{cases} a+\frac{b}{10} = 1 \\ 2a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 15 \end{cases} \text{ Vậy } a+b = \frac{29}{2}$$

Câu 3: (Chuyên Đại Học Vinh) Cho $k, n \mid (k < n)$ là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ B. $A_n^k = n!.C_n^k$ C. $A_n^k = k!.C_n^k$ D. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Đáp án D

Câu 4: (Chuyên ĐH Sư Phạm Hà Nội) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} - \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \right)^{10}$

với $x > 0, x \neq 1$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của P .

A. 200. B. 100. C. 210. D. 160.

Đáp án C.

$$\text{Ta có: } \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} - \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{x}+1) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Suy ra } P = \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-k} (-1)^k \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-1)^k x^{\frac{20-5k}{6}}.$$

$$\text{Số hạng không chứa } x \Leftrightarrow 20-5k=0 \Leftrightarrow k=4 \Rightarrow a_4 = C_{10}^4 (-1)^4 = 210.$$

Câu 5: (Chuyên ĐH Sư Phạm Hà Nội) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức

Newton $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, biết tổng các hệ số của khai triển bằng 128
A. 37. B. 36. C. 35. D. 38.
Đáp án C.

Ta có $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x\sqrt{x})^{n-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{\frac{9n-11k}{6}}.$

Suy ra tổng các hệ số của khai triển bằng $\sum_{k=0}^n C_n^k = 128.$

Mặt khác $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \Rightarrow \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n = 128 \Rightarrow n = 7.$

Suy ra $\frac{9n-11k}{6} = 5 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 7 - 11k}{6} = 5 \Leftrightarrow k = 3 \Rightarrow a_3 = C_7^3 x^5 = 35x^5.$

Câu 6: (Chuyên ĐH Sư Phạm Hà Nội) Tổng của n số hạng đầu tiên của một dãy số $(a_n), n \geq 1$ là $S_n = 2n^2 + 3n$. Khi đó

- A.** (a_n) là cấp số cộng với công sai bằng 1. **B.** (a_n) là cấp số cộng với công sai bằng 4.
C. (a_n) là cấp số nhân với công bội bằng 1. **D.** (a_n) là cấp số nhân với công bội bằng 4.

Đáp án B.

Dễ thấy u_n phải là cấp số cộng:

Ta có: $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n \Leftrightarrow \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = 2n^2 + 3n \Leftrightarrow n(nd + 2a_1 - d) = n(4n + 6)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ 2a_1 - d = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a_1 = 5 \end{cases}.$

Câu 7: (Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa 2018) Cho dãy số (U_n) xác định bởi $U_1 = \frac{1}{3}$ và

$U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n.$ Tổng $S = U_1 + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \dots + \frac{U_{10}}{10}$ bằng

- A.** $\frac{3280}{6561}$ **B.** $\frac{29524}{59049}$ **C.** $\frac{25942}{59049}$ **D.** $\frac{1}{243}$

Đáp án B

Đặt $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n \\ V_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$ suy ra $S = \sum_1^{10} V_n$ trong đó V_n là cấp số nhân với công sai $q = \frac{1}{3}$.

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{29524}{59049}$$

Do đó

Câu 8: (Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa 2018) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn:

$$A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6. \quad \text{Hệ số của số hạng chứa } x^9 \text{ của khai triển biểu thức}$$

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n \text{ bằng:}$$

A. 18564

B. 64152

C. 192456

D. 194265

Đáp án C

Do

$$A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6 \Rightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 4n + 6 \Leftrightarrow n(n-1) = 10n + 12 \Rightarrow n = 12$$

Số hạng tổng quát của khai triển $P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12}$ là:

$$C_{12}^k (x^2)^k \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^{12-k} = C_{12}^k \cdot x^{2k} \cdot 3^{12-k} \cdot x^{k-12} = C_{12}^k \cdot x^{3k-12} \cdot 3^{12-k}$$

Số hạng chứa x^9 tương ứng với $3k - 12 = 9 \Leftrightarrow k = 7 \Rightarrow$ hệ số của số hạng chứa x^9 là :

$$C_{12}^7 \cdot 3^5 = 192456$$

Câu 9: (Chuyên Biên Hòa-Hà Nam) Tính tổng $S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \dots + 2018.2^{2017}$

A. $S = 2017.2^{2018} + 1$

B. $S = 2017.2^{2018}$.

C. $S = 2018.2^{2018}$.

D.

$S = 2019.2^{2018} + 1$.

Đáp án A.

Ta có $2S = 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \dots + 2018.2^{2018}$

Khi đó $2S - S = 2018.2^{2018} + (1-2).2 + (2-3).2^2 + (3-4).2^3 + \dots - 1.$

$$= 2018.2^{2018} - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2017}) = 2018.2^{2018} - \frac{2^0(1-2^{2018})}{1-2} = 2018.2^{2017} + 1.$$

Câu 10: (Chuyên Thái Bình Lần 3-2018) Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Newton $(1+2x)(3+x)^{11}.$

A. 4620.

B. 1380.

C. 9405.

D. 2890.

: **Đáp án C.**

Ta có
$$(1+2x)(3+x)^{11} = (1+2x) \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k 3^{11-k} x^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k 3^{11-k} x^k + 2 \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k 3^{11-k} x^{k+1}.$$

Số hạng chứa x^9 là $C_{11}^9 3^2 x^9 + 2C_{11}^8 3^3 x^9 = 9405x^9.$

Câu 11: (Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-1-2018) Tìm hệ số của x^9 trong khai triển

biểu thức
$$\left(2x^4 - \frac{3}{x^3}\right)^4.$$

A. -96

B. -216

C. 96

D. 216

Đáp án A

Ta có
$$\left(2x^4 - \frac{3}{x^3}\right)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k (2x^4)^{4-k} (-3)^k (x^{-3})^k = \sum_{k=0}^4 C_4^k 2^{4-k} (-3)^k x^{16-7k}.$$

Số hạng chứa $x^9 \Leftrightarrow 16-7k=9 \Rightarrow k=1 \Rightarrow a_1 = C_4^1 2^{4-1} (-3)^1 x^9 = -96x^9.$

Câu 12: (Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-1-2018) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên k sao cho $C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính tích tất cả các phân tử của S.

A. 16 B. 20 C. 32 D. 40

Đáp án C

$$2C_{14}^{k+1} = C_{14}^k + C_{14}^{k+2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{14!}{(k+1)!(13-k)!} = \frac{14!}{k!(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(14-k)}{(k+1)!(14-k)!} = \frac{k+1}{(k+1)!(14-k)!} + \frac{(13-k)(14-k)}{(k+2)(k+1)!(14-k)!}$$

$$\Leftrightarrow 2(14-k) = k+1 + \frac{(13-k)(14-k)}{k+2} \Leftrightarrow (28-2k)(k+2) = (k+1)(k+2) + (13-k)(14-k)$$

$$\Leftrightarrow -2k^2 + 24k + 56 = k^2 + 3k + 2 + k^2 - 27k + 182 \Leftrightarrow 4k^2 - 48k + 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ k=8 \end{cases} \Rightarrow 4.8 = 32$$

Câu 13: (Chuyên Thái Nguyên Lần 1) Tìm hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức

Newton $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ với $x > 0$, biết n là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn $A_n^5 \leq 18A_{n-2}^4$

A. 8064 B. 3360 C. 13440 D. 15360

Đáp án A

Điều kiện: $n \geq 6$. Ta có $A_n^5 \leq 18A_{n-2}^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!} \leq 18 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-6)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{n-5} \leq 18$

$$\Leftrightarrow n^2 - n \leq 18(n-5) \Leftrightarrow n^2 - 19n + 90 \leq 0 \Leftrightarrow 9 \leq n \leq 10 \rightarrow n = 10$$

Với $n = 10$, xét khai triển $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{10-k} \cdot x^{10-\frac{6k}{5}}$

Hệ số của x^4 ứng với $10 - \frac{6k}{5} = 4 \Rightarrow k = 5$. Vậy hệ số cần tìm là $C_{10}^5 \cdot 2^5 = 8064$

Câu 14: (Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ) Trong khai triển biểu thức $(x+y)^{21}$, hệ số của số hạng chứa $x^{13}y^8$ là

A. 116280 B. 293930 C. 203490 D. 1287

Đáp án C

Số hạng tổng quát thứ $k+1$: $T_{k+1} = C_{21}^k x^{21-k} y^k$ ($0 \leq k \leq 21; k \in \mathbb{N}$) ứng với số hạng chứa $x^{13}y^8$ thì $k=8$. Vậy hệ số của số hạng chứa $x^{13}y^8$ là $a^8 = C_{21}^8 = 203490$

Câu 15. (Chuyên Thái Bình- 2018) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức

Newton $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}, (x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$

A. $2^7 C_{21}^7$ B. $2^8 C_{21}^8$ C. $-2^8 C_{21}^8$ D. $-2^7 C_{21}^7$

Đáp án D

Ta có: $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k x^k \left(-\frac{2}{x^2}\right)^{21-k} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k x^{k-2(21-k)} (-2)^{21-k}$

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k \cdot x^k \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right)^{21-k} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k \cdot x^{k-2(21-k)} (-2)^{21-k}$$

Số hạng không chứa x $\Leftrightarrow k - 2(21 - k) = 0 \Leftrightarrow k = 14$

Số cần tìm là $C_{21}^{14}(-2)^{21-14} = C_{21}^7(-2)^7$ (theo tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$ $C_n^k = C_n^{n-k}$)

Câu 16: (Chuyên Thái Bình- 2018) Biết rằng hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức Newton

$(2 - x)^n, (n \in \mathbb{N}^*)$ bằng 60. Tìm n .

- A. $n = 5$ B. $n = 6$ C. $n = 7$ D. $n = 8$

Đáp án B

$$(2 - x)^n, (n \in \mathbb{N}^*)$$

Số hạng tổng quát trong khai triển là $(-1)^k C_n^k 2^{n-k} \cdot (x)^k, (n \in \mathbb{N}^*)$

Theo yêu cầu bài toán ta có $k = 4$

Vậy hệ số x^4 của trong khai triển $(-1)^4 C_n^4 2^{n-4} = 60$

Giải phương trình $C_n^4 2^{n-4} = 60 \Leftrightarrow n = 6$

Câu 17: (Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2) Tìm tất cả các số a trong khai triển của

$(1 + ax)(1 + x)^4$ có chứa số hạng $22x^3$.

- A. $a = 3$ B. $a = 2$ C. $a = -3$ D. $a = 5$

Đáp án A

Phương pháp: Sử dụng khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$, tìm ra hệ số của x^3 trong khai triển trên và cho hệ số đó bằng 22.

$$(1 + ax)(1 + x)^4 = (1 + ax) \sum_{k=0}^4 C_4^k x^k + a \sum_{k=0}^4 C_4^k x^{k+1}$$

Cách giải:

Hệ số có chứa x^3 trong khai triển trên là $C_4^3 + aC_4^2 = 4 + 6a = 22 \Leftrightarrow a = 3$

Câu 18: (Chuyên Quang Trung -2018) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển

$$P(x) = (x+1)^6 + (x+1)^7 + \dots + (x+1)^{12}$$

A. 1715.

B. 1711.

C. 1287.

D. 1716.

Đáp án A

Phương pháp

Hệ số của x^5 trong khai triển $(x+1)^k$ ($k \geq 5$) là C_k^5 . Lấy tổng các hệ số này lại để ra kết quả.

Lời giải chi tiết.

Hệ số của x^5 trong khai triển $(x+1)^k$ ($k \geq 5$) là C_k^5 . Do đó hệ số của x^5 trong khai triển của $P(x)$ là $C_6^5 + C_7^5 + C_8^5 + C_9^5 + C_{10}^5 + C_{11}^5 + C_{12}^5 = 1715$

Câu 19: (Chuyên Bắc Ninh-2018) Cho đa thức

$p(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa

thức: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_8

A. 720

B. 700

C. 715

D. 730

Đáp án C

Phương pháp: Áp dụng công thức khai triển tổng quát: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Đối với bài toán này ta áp dụng công thức $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot x^k$. Sau đó dựa vào khai triển bài toán cho $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$ ta tìm được hệ số a_8 (đi theo x^8)

Cách giải:

$$+) (1+x)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot 1^{8-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_8^8$$

$$+) (1+x)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot 1^{9-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_9^8$$

$$+) (1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 1^{10-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_{10}^8$$

$$+) (1+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 1^{11-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_{11}^8$$

$$+) (1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 1^{12-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_{12}^8$$

Vậy Hệ số cần tìm là: $a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8 = 1 + 9 + 45 + 165 + 495 = 715$

Câu 20: (Chuyên Bắc Ninh-2018) Cho đa thức

$p(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa

thức: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tính tổng các hệ số $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, 12$
A. 5 **B. 7936** **C. 0** **D. 7920**

Đáp án B

Phương pháp:

Sử dụng công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Áp dụng khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Sử dụng tổng $(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

Cách giải:

$$\begin{aligned} p(x) &= (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} \\ &= \frac{(1+x)^8 [(1+x)^5 - 1]}{1+x-1} = \frac{(1+x)^{13} - (1+x)^8}{x} = \frac{(1+x)^{13}}{x} - \frac{(1+x)^8}{x} \\ &= \frac{\sum_{m=0}^{13} C_{13}^m x^m}{x} = \frac{\sum_{n=0}^8 C_8^n x^n}{x} = \sum_{m=0}^{13} C_{13}^m x^{m-1} - \sum_{n=0}^8 C_{13}^n x^{n-1} \\ &\Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = (C_{13}^1 - C_8^1) + (C_{13}^2 - C_8^2) + \dots + (C_{13}^8 - C_8^8) + C_{13}^9 + \dots + C_{13}^{13} \\ &\quad \sum_{a=1}^{13} C_{13}^a - \sum_{b=1}^8 C_8^b \\ \text{Xét tổng } (1+x)^2 &= \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \Rightarrow \sum_{a=1}^{13} C_{13}^a = 2^8 - C_8^0 = 2^8 - 1 \\ &\Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 2^{13} - 1 - 2^8 + 1 = 7936 \end{aligned}$$

Câu 21: (Chuyên Lam Sơn – Lần 2) Tìm hệ số h của số hạng chứa x^5 trong khai triển

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^7 ?$$

A. $h = 84$ **B. $h = 672$** **C. $h = 560$** **D. $h = 280$**

Đáp án D

Phương pháp: Sử dụng khai triển nhị thức Newton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Cách giải: Ta có: $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k 2^k x^{14-3k}$

Hệ số của $x^5 \Leftrightarrow 14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$

Vậy $h = C_7^3 2^3 = 280$

Câu 22: (Chuyên Thái Bình-Thái Bình-Lần 2) Biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$A_n^3 + 2A_n^2 = 100$. Hệ số của x^5 trong khai triển

$(1-3x)^{2n}$ bằng:

A. $-3^5 C_{10}^5$

B. $-3^5 C_{12}^5$

C. $3^5 C_{10}^5$

D. $6^5 C_{10}^5$

Đáp án A

$$A_n^3 + 2A_n^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 100$$

Điều kiện: $n \geq 3$. Ta có

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 2n(n-1) = 100 \Leftrightarrow n^3 - n^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow n = 5 \text{ (điều kiện : } n \geq 3 \text{)}.$$

Với $n = 5$, xét khai triển $(1-3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 1^{10-k} \cdot (-3x)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (-3)^k \cdot x^k$.

Hệ số của x^5 ứng với $x^k = x^5 \rightarrow k = 5$. Vậy hệ số cần tìm là $C_{10}^5 \cdot (-3)^5 = -3^5 \cdot C_{10}^5$.

Câu 23: Cho tổng $S = C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + \dots + C_{2017}^{2017}$. Giá trị tổng S bằng:

A. 2^{2018}

B. 2^{2017}

C. $2^{2017} - 1$

D. 2^{2016}

Đáp án C

Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + x.C_n^1 + x^2.C_n^2 + \dots + x^n.C_n^n$ (*)

Thay $\begin{cases} x=1 \\ n=2017 \end{cases}$ vào (*), ta được $2^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + \dots + C_{2017}^{2017} \Rightarrow S = 2^{2017} - 1$.

Câu 24: (Chuyên Hùng Vương-Bình Dương) Tính tổng $S = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1011} + \dots + C_{2018}^{2018}$ (trong tổng đó, các số hạng có dạng C_{2018}^k với k nguyên dương nhận giá trị liên tục từ 1009 đến 2018).

A. $S = 2^{2018} - C_{2018}^{1009}$

B. $S = 2^{2017} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$

C. $S = 2^{2017} - \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$

D. $S = 2^{2017} - C_{2018}^{1009}$

Đáp án B

Ta có:
$$(1+x)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018}.$$

Chọn $x=1 \Rightarrow 2^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{2018}.$

Vì $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow 2^{2018} = 2(C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1011} + C_{2018}^{2018}) + C_{2018}^{1009} = 2S + C_{2018}^{1009} \Rightarrow S = 2^{2017} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}.$

Câu 25: (Viên Khoa Học và Thương Mại Quốc Tế) Hệ số của x^9 sau khi khai triển và rút gọn

đa thức $f(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$ là:

A. 2901

B. 3001

C. 3010

D. 3003

Đáp án D

Phương pháp: Sử dụng khai triển
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

Cách giải: Ta có :
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

Do đó hệ số của x^9 trong khai triển trên là $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + \dots + C_{14}^9 = 3003.$

Câu 26: (Chuyên Sư Phạm Hà Nội Lần 2) Cho $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} a_k x^k,$ với $a_k \in \mathbb{Z}.$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a_{25} = 2^{25} C_{40}^{25}$

B. $a_{25} = \frac{1}{2^{25}} C_{40}^{25}$

C. $a_{25} = \frac{1}{2^{15}} C_{40}^{25}$

D. $a_{25} = C_{40}^{25}$

Đáp án C

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tổng quát của khai triển nhị thức Newton là
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Lời giải: Xét khai triển
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^{40} = \left(\frac{1}{2} + x\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{40-k} x^k$$

Hệ số của x^{25} ứng với $x^k = x^{25} \Rightarrow k = 25.$ Vậy
$$a_{25} = C_{40}^{25} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{2^{15}} C_{40}^{25}$$

Câu 27: (Cụm 5 trường chuyên) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $P(x) = (x+1)^{20}$

A. C_{20}^7

B. A_{20}^7

C. A_{20}^{13}

D. P_7

Đáp án A

Phương pháp: Sử dụng khai triển nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Cách giải: $P(x) = (x+1)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot x^k$.

Để tìm hệ số của x^7 ta cho $k=7$, khi đó hệ số của x^7 là C_{20}^7

Câu 28: (Chuyên Chu Văn An-2018) Trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + x^5\right)^{12}$ với $x \neq 0$. Số hạng chứa x^4 là:

A. $924x^4$

B. 792

C. $792x^4$

D. 924

Đáp án C.

Phương pháp: Sử dụng khai triển nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Cách giải: $\left(\frac{1}{x^3} + x^5\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k \cdot (x^5)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot \frac{1}{x^{3k}} \cdot x^{60-5k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^{60-8k}$

$60-8k=4 \Leftrightarrow k=7 \Leftrightarrow$ Số hạng chứa x^4 là $C_{12}^7 \cdot x^4 = 792x^4$.

Câu 29: (Chuyên Sơn La- Lần 1) Với n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^k + 2A_n^2 = 100$

(A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử). Số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $(1+3x)^{2n}$ là:

A. 61236

B. $256x^3$

C. 252

D. $61236x^3$

Đáp án D

Phương pháp: Chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Cách giải:

$A_n^k + 2A_n^2 = 100 \Rightarrow 2A_n^2 < 100 \Leftrightarrow A_n^2 < 50$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} < 50 \Leftrightarrow n(n-1) < 50 \Leftrightarrow n^2 - n - 50 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{1+\sqrt{201}}{2}$

Mà $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow n \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$,

Thay lần lượt $n = 2; 3; 4; 5; 6; 7$ vào $A_n^k + 2A_n^2 = 100$:

n	2	3	4	5	6	7
k	Loại	Loại	Loại	3	Loại	Loại

Vậy $n = 5$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển ứng với $i = 5$. Số hạng đó là: $C_{10}^5 \cdot 3^5 \cdot x^5 = 61236x^5$

Câu 30: (Chuyên Trần Phú – Lần 2) Trong khai triển $(a - 2b)^8$, hệ số của số hạng chứa a^4b^4 là:

A. 70

B. 168

C. 1120

D. -1120

Đáp án C

Phương pháp: Sử dụng khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

$$(a - 2b)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k a^k \cdot (-2b)^{8-k} = \sum_{k=0}^8 C_8^k (-2)^{8-k} a^k \cdot b^{8-k}$$

Cách giải:

Để tìm hệ số của số hạng chứa a^4b^4 ta cho $\begin{cases} k = 4 \\ 8 - k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4$

Vậy hệ số của số hạng chứa a^4b^4 là $C_8^4 \cdot (-2)^4 = 1120$

$$(1 + 3x)^{2n} = (1 + 3x)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (3x)^i = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i 3^i x^i$$

Khi đó,

Câu 31: (Chuyên Hùng Vương-Gia Lai) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển Nhị

thức Niu ton của $\left(\frac{n}{2x} + \frac{x}{2}\right)^{2n} (x \neq 0)$, biết số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^3 + A_n^2 = 50$.

A. $\frac{297}{512}$

B. $\frac{29}{51}$

C. $\frac{97}{12}$

D. $\frac{279}{215}$

Đáp án A

$$C_n^3 + A_n^2 = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + n(n-1) = 50 \Rightarrow n = 6$$

Ta có

$$\text{Suy ra } \left(\frac{3}{x} + \frac{x}{2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\frac{3}{x}\right)^{12-k} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 3^{12-k} 2^{-k} x^{2k-12}$$

$$\text{Số hạng chứa } x^8 \Rightarrow 2k - 12 = 8 \Leftrightarrow k = 10 \Rightarrow a_{10} = C_{12}^{10} 3^2 2^{-10} x^8 = \frac{297}{512} x^8$$

Câu 32: (Chuyên Hùng Vương-Gia Lai) Biết rằng khi khai triển nhị thức Niuton

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n = a_0 \cdot \sqrt{x}^n + a_1 \cdot \sqrt{x}^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + a_2 \cdot \sqrt{x}^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 + a_3 \cdot \sqrt{x}^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^3 \dots$$

(với n là số nguyên lớn hơn 1) thì ba số a_0, a_1, a_2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Hỏi trong khai triển trên, có bao nhiêu số hạng mà lũy thừa của x là một số nguyên.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Đáp án C

$$\Leftrightarrow a_0 = 1, a_1 = \frac{C_n^1}{2}, a_2 = \frac{C_n^2}{4} \text{ lập thành cấp số cộng}$$

$$\text{Khi và chỉ khi } 1 + \frac{C_n^2}{4} = C_n^1 \Leftrightarrow 1 + \frac{n(n-1)}{8} = n \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow n = 8$$

$$T_k = C_8^k \cdot (\sqrt{x})^{8-k} \cdot \frac{1}{2^k \cdot (\sqrt[4]{x})^k} = \frac{C_8^k}{2^k} \cdot x^{\frac{16-3k}{4}}$$

Do đó, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\text{Số hạng mà lũy thừa của } x \text{ là số nguyên ứng với } \frac{16-3k}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3k \equiv 16 \pmod{4} \text{ mà } k \in \{0; 1; \dots; 8\}$$

Suy ra $k = \{0; 4; 8\} \rightarrow$ Có 3 số hạng lũy thừa của x là số nguyên.

Câu 33: (Chuyên Hoàng Văn Thụ- Lần 2) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn

$$A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n. \text{ Xét khai triển } P(x) = (x-2)^n. \text{ Hệ số chứa } x^{10} \text{ trong khai triển là:}$$

A. 384384

B. -3075072

C. -96096

D. 3075072

Đáp án C

Phương pháp:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot x^i \cdot y^{n-i}$$

+) Công thức khai triển nhị thức Newton:

$$+) A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cách giải:

$$A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - 3n = 11n \Leftrightarrow n(n-1) - 14n = 0 \Leftrightarrow n^2 - 15n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \text{ (Loại)} \\ n=15 \end{cases}$$

Với $n=15: P(x) = (x-2)^n = (x-2)^{15} = \sum_{i=0}^{15} C_n^i x^i (-2)^{15-i}$

Hệ số chứa x^{10} ứng với $i=10$ và bằng $C_{15}^{10} (-2)^{15-10} = -96096$

Câu 34: (Chuyên Thoại Ngọc Hầu-An Giang) Giả sử có khai triển

$$(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \text{ Tìm } a_5 \text{ biết } a_0 + a_1 + a_2 = 71$$

A. -672

B. 672

C. 627

D. -627

Đáp án A

Ta có $(1-2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-2)^k x^k = 1 + C_n^1 (-2)x + C_n^2 (-2)^2 x^2 + \dots + C_n^n (-2)^n x^n$

Suy ra $a_0 + a_1 + a_2 = 71 = 1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 71 \Rightarrow n = 7$

Suy ra $a_5 = C_7^5 (-2)^7 = -672$

Câu 35: (Chuyên Đại Học Vinh-2018) Cho khai triển

$$(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, n \geq 1. \text{ Tìm số giá trị nguyên của } n \text{ với } n \leq 2018$$

sao cho tồn tại $k (0 \leq k \leq n-1)$ thỏa mãn $a_k = a_{k+1}$

A. 2018

B. 673

C. 672

D. 2017

Đáp án B

Phương pháp: Sử dụng khai triển nhị thức Newton.

Cách giải: Ta có $(1+2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k x^k (k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k &= C_n^k 2^k; a_{k+1} = C_n^{k+1} 2^{k+1} \\ \Leftrightarrow C_n^k 2^k &= C_n^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} 2^{k+1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n-k} &= \frac{2}{k+1} \\ \Leftrightarrow k+1 &= 2n-2k \Leftrightarrow n = \frac{3k+1}{2} \end{aligned}$$

Ta có $n \in [1; 2018] \Rightarrow k \in \left[\frac{1}{3}; 1345 \right]$

Do n là số nguyên nên $3k+1$ là số chẵn $\Rightarrow k$ là số lẻ, thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3}; 1345 \right] \Rightarrow$ có 673 số nguyên k thỏa mãn.

Với mỗi số nguyên k xác định 1 số nguyên n . Vậy có 673 số nguyên n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: (Chuyên Ngoại Ngữ - Lần 1) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển của biểu thức $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2} \right)^5$.

A. -810.

B. 826.

C. 810.

D. 421.

Đáp án A.

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tổng quát của khai triển nhị thức Newton là $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Lời giải: Xét khai triển $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2} \right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (3x^3)^{5-k} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} \right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 3^{5-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{15-5k}$.

Hệ số của số hạng chứa x^{10} ứng với $15-5k=10 \Leftrightarrow k=1$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_5^1 \cdot 3^4 \cdot (-2) = -810$.

Câu 37: (Chuyên Lê Quý Đôn-Lần 3) Trong khai triển $(1+3x)^{20}$ với số mũ tăng dần, hệ số của số hạng đứng chính giữa là

A. $3^{11} C_{20}^{11}$

B. $3^{12} C_{20}^{12}$

C. $3^{10} C_{20}^{10}$

D. $3^9 C_{20}^9$

Đáp án A

Phương pháp giải:

Khai triển với số mũ n là số chẵn thì số hạng chính giữa là $\frac{1+n}{2}$

$$(1+3x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot 1^{20-k} \cdot (3x)^k = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot 3^k \cdot x^k$$

Lời giải: Xét khai triển

$$k = \frac{1+21}{2} = 11$$

Số hạng đứng chính giữa của khai triển ứng với

Vậy hệ số của số hạng cần tìm là $3^{11} C_{20}^{11}$

Câu 38: (Chuyên Thái Bình- Lần 5) Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $A = (1-x)^{10}$ là:

A. 30

B. -120

C. 120

D. -30

Đáp án B

Phương pháp

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Sử dụng khai triển nhị thức Newton

Cách giải

$$A = (1-x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-1)^k \cdot (x)^k$$

$$\Rightarrow \text{Hệ số của số hạng chứa } x^3 \text{ là } C_{10}^3 (-1)^3 = -120$$

Câu 39: (Chuyên ĐH Vinh – Nghệ An – Lần 3) Tìm hệ số của x^3 sau khi khai triển và

rút gọn các đơn thức đồng dạng của $\left(\frac{1}{x} - x + 2x^3\right)^9, x \neq 0$.

A. -2940

B. 3210.

C. 2940.

D. -3210

Đáp án A

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{x} - x + 2x^3\right)^9 = \frac{(1-x^2+2x^3)^9}{x^9}$$

Ta cần tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $P = (1-x^2+2x^3)^9$.

$$P = \sum_{k=0}^9 C_9^k (2x^3 - x^2)^k \Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ k=5 \\ k=4 \end{cases} \text{ thỏa mãn.}$$

Ta có

$$+) \text{ Với } k=6 \Rightarrow \text{hệ số } C_9^6 \cdot (-1)^6 = 84.$$

$$+) \text{ Với } k=4 \Rightarrow \text{hệ số } C_9^4 \cdot 2^4 = 2016.$$

$$k = 5 \Rightarrow C_9^k (2x^3 - x^2)^k = 126x^{10} (2x - 1)^5 = 126x^{10} \sum_{k'=0}^5 C_5^{k'} \cdot (2x)^{k'} \cdot (-1)^{5-k'}$$

+) Với

$$k' = 2 \Rightarrow \text{hệ số } 126 \cdot C_5^2 \cdot 2^2 \cdot (-1)^{5-2} = -5040.$$

Vậy hệ số cần tìm là $84 + 2016 - 5040 = -2940$.

Câu 40: (Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 3) Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai

triển của $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^9$ với $x \neq 0$

A. 4608

B. 128

C. 164

D. 36

Đáp án A

$$\text{Ta có: } \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (2x)^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot x^{9-3k}$$

Số hạng chứa x^3 ứng với k thỏa mãn: $9 - 3k = 3 \Rightarrow k = 2$

Hệ số x^3 trong khai triển là: $C_9^2 \cdot 2^7 = 4608$

Câu 41: (Chuyên Thái Bình – Lần 6) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị

thức Newton $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}, (x \neq 0)$

A. $2^7 C_{21}^7$

B. $2^8 C_{21}^8$

C. $-2^8 C_{21}^8$

D. $-2^7 C_{21}^7$

Đáp án D

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21} = \left(x - 2x^{-2}\right)^{21} \quad \text{có SH tổng quát:}$$

$$C_{21}^k \cdot x^{21-k} \cdot (-2x^{-2})^k = C_{21}^k \cdot x^{21-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{-2k} = C_{21}^k \cdot (-2)^k \cdot x^{21-3k}$$

Số hạng không chứa x là $C_{21}^k \cdot (-2)^k \cdot x^{21-3k}$ sao cho

$$21 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 7 \Rightarrow C_{21}^7 (-2)^7 = -2^7 C_{21}^7$$

Câu 42: (Chuyên Vĩnh Phúc – lần 2) Tính tổng $S = C_{10}^0 + 2 \cdot C_{10}^1 + 2^2 \cdot C_{10}^2 + \dots + 2^{10} \cdot C_{10}^{10}$

A. $S = 2^{10}$

B. $S = 3^{10}$

C. $S = 4^{10}$

D. $S = 3^{11}$

Đáp án B

Phương pháp: Chọn khai triển phù hợp sau đó chọn x .

Cách giải:

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k = C_{10}^0 \cdot x^0 + C_{10}^1 \cdot x^1 + C_{10}^2 \cdot x^2 + \dots + C_{10}^{10} \cdot x^{10}$$

Chọn $x = 2$ ta có: $(1+2)^{10} = 3^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 \cdot 2 + C_{10}^2 \cdot 2^2 + \dots + C_{10}^{10} \cdot 2^{10}$

Câu 43: (Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi – Lần 1) Cho $P(x) = (1 + 3x + x^2)^{20}$. Khai

triển $P(x)$ thành đa thức ta được $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{40}x^{40}$. Tính

$$S = a_1 + 2a_2 + \dots + 40a_{40}$$

A. $S = -20.5^{19}$

B. $S = 20.5^{21}$

C. $S = 20.5^{19}$

D. $S = 20.5^{20}$

Đáp án

Phương pháp:

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \dots + C_n^n y^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i$$

Công thức nhị thức Newton

Cách giải:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{40}x^{40}.$$

$$P'(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_{40}x^{39}.$$

Ta có $P(x) = (1 + 3x + x^2)^{20} \Rightarrow P'(x) = 20(1 + 3x + x^2)^{19} (3 + 2x)$

$$\Rightarrow 20(1 + 3x + x^2)^{19} (3 + 2x) = P'(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_{40}x^{39}$$

Cho $x = 1$

$$\Rightarrow 20(1 + 3 + 1)^{19} (3 + 2 \cdot 1) = a_1 + a_2 + \dots + 40a_{40}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{40} = 20.5^{20} \Rightarrow S = 20.5^{20}$$

$$S \in MN \Rightarrow S(1+t; 1; 1-t)$$

$$S \in (P) \Rightarrow (1+t) + 1 - (1-t) = 2 \Leftrightarrow 1 + 2t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$$

Vậy, biểu thức A đạt GTNN tại $\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x_0 + y_0 = \frac{5}{2}$

Câu 44: (Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi – Lần 1) Rút gọn tổng sau

$$S = C_{2018}^2 + C_{2018}^5 + C_{2018}^8 + \dots + C_{2018}^{2018}$$

A. $S = \frac{2^{2018} - 1}{3}$

B. $S = \frac{2^{2019} + 1}{3}$

C. $S = \frac{2^{2019} - 1}{3}$

D. $S = \frac{2^{2018} + 1}{3}$

Đáp án A

$$A_{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^3 + \dots + C_{2018}^{2016}$$

$$B_{2018} = C_{2018}^1 + C_{2018}^4 + \dots + C_{2018}^{2017}$$

$$C_{2018} = C_{2018}^2 + C_{2018}^5 + \dots + C_{2018}^{2018}$$

Ta có kết quả sau $A_{2018} = C_{2018} = B_{2018} - 1$

(Có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, tổng quát

$$A_{6k+2} = C_{6k+2} = B_{6k+2} - 1; A_{6k+5} = C_{6k+5} = B_{6k+5} - 1)$$

Mặt khác ta có

$$A_{2018} + B_{2018} + C_{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{2018}$$

$$(1+1)^{2018} = 2^{2018}$$

$$\Rightarrow S + (S+1) + S = 2^{2018} \Rightarrow S = \frac{2^{2018} - 1}{3}$$

Câu 45: (Cụm 5 trường chuyên) Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho

$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$ là một số có 1000 chữ số.

A. 3

B. 1

C. 0

D. 2

Đáp án A

Phương pháp :

+) Nhóm các tổ hợp có chỉ số dưới bằng nhau.

$$(1+n)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

+) Sử dụng tổng

+) Sử dụng công thức tính tổng của cấp số nhân.

+) Để S là số có 1000 chữ số thì $10^{999} \leq S \leq 10^{1000}$

Cách giải:

$$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$$

$$S = 2 + (C_1^0 + C_1^1) + (C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) + (C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3) + \dots + (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n)$$

$$(1+n)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Xét tổng

$$S = 2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2 + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1}$$

Từ đó ta có:

Để S là số có 1000 chữ số thì

$$10^{999} \leq 2^{n+1} \leq 10^{1000} \Leftrightarrow \log_2 10^{999} - 1 \leq n \leq \log_2 10^{1000} - 1 \Leftrightarrow 3317,6 \leq n \leq 3320,9$$

n là số nguyên dương $\Rightarrow n \in \{3318; 3319; 3320\}$

Câu 46: (Chuyên Hùng Vương-Gia Lai) Giả sử

$$(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+x^2+\dots+x^n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

Tính $\sum_{r=0}^m a_r.$

A. 1

B. n

C. $(n+1)!$

D. $n!$

Đáp án C

$$\sum_{r=0}^m a_r = f(1) = 2.3\dots(n+1) = (n+1)!$$

Câu 47: (Chuyên Hạ Long – Lần 3) Tổng

$$S = 1^2.C_{2018}^1.2^0 + 2^2.C_{2018}^2.2^1 + 3^2.C_{2018}^3.2^2 + \dots + 2018^2.C_{2018}^{2018}.2^{2017} = 2018.3^a.(2b+1), \text{ với}$$

a, b là các số nguyên dương và $(2b+1)$ không chia hết cho 3. Tính $a+b$.

A. 2017

B. 4035

C. 4034

D. 2018

Đáp án C

Xét $f(x) = (1+x)^n =$ (1)

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k . x^k \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=0}^n k . C_n^k . x^{k-1}$$

Nhân x vào 2 vế ta có:

$$x.f'(x) = \sum_{k=0}^n k . C_n^k . x^k$$

$$\Rightarrow (x.f'(x))' = \sum_{k=0}^n k^2 . C_n^k . x^{k-1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow [x.n(x+1)^{n-1}]' = \sum_{k=0}^n k^2 . C_n^k . x^{k-1}$

$$\Leftrightarrow n(x+1)^{n-1} + n(n-1)x(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^n k^2 . C_n^k . x^{k-1}$$

Cho $\begin{cases} x = 2 \\ n = 2018 \end{cases}$ ta được:

$$2018.3^{2017} + 2.2018.2017.3^{2016} = \sum_{k=0}^{2018} k^2 . C_{2018}^k . 2^{k-1}$$

Theo bài:

$$2018.3^{2016} (3 + 2.2017) = 2018.3^a (2b+1)$$

Đồng nhất thức: $2018.3^{2016} (2.2018+1) = 2018.3^a (2b+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2016 \\ b = 2018 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4034$$

Tóm lại: +) Đạo hàm (1)

+) Nhân với x (2)

+) Lại đạo hàm (3)

Câu 48: (Chuyên Lương Thế Vinh- Đồng Nai) Giả sử

$(1-x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$. Đặt $s = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$, khi đó, s bằng

A. $\frac{3^n + 1}{2}$.

B. $\frac{3^n - 1}{2}$.

C. $\frac{3^n}{2}$.

D. $2^n + 1$.

Đáp án A (lời giải câu 30)

- Thay $x = 1$ vào giả thiết đã cho, ta được

$$a_0 + a_1 + a_1 + \dots + a_{2n} = 1. \quad (1)$$

- Thay $x = -1$ vào giả thiết đã cho, ta được

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} = 3^n. \quad (2)$$

- Cộng (1) và (2), ta có

$$3^n + 1 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$$

Hay $s = \frac{3^n + 1}{2}$.

Câu 49: (Chuyên Thoại Ngọc Hầu-An Giang) Giả sử có khai triển

$(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tìm a_5 biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$

A. -672

B. 672

C. 627

D. -627

Đáp án A

Ta có $(1-2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-2)^k x^k = 1 + C_n^1 (-2)x + C_n^2 (-2)^2 x^2 + \dots + C_n^n (-2)^n x^n$

Suy ra $a_0 + a_1 + a_2 = 71 = 1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 71 \Rightarrow n = 7$

Suy ra $a_5 = C_7^5 (-2)^7 = -672$