

Дисциплина: ОГСЭ.08 Высшая математика

Занятие № 25

Группа ТД 2/1-9/24

Дата: 18.11.2025

Тип занятия: практическое занятие 12

Преподаватель: Бережная В.А.

По теме: «Закон распределения случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины»

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для формирования у учащихся практических навыков работы с законами распределения случайных величин; умения вычислять математическое ожидание и дисперсию дискретных случайных величин.

Содержательная:

- способствовать формированию представления студентов о понятии закона распределения случайной величины и его основных видах;
- способствовать освоению студентами методики построения ряда распределения дискретной случайной величины;
- расширить понятийный аппарат студентов за счет включения в него понятий: математического ожидания как среднего значения случайной величины, дисперсии случайной величины;
- изучить свойства математического ожидания и дисперсии;
- проработать практические задания на вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины.

План занятия:

1. Закон распределения случайной величины.
2. Математическое ожидание случайной величины.
3. Дисперсия случайной величины.

Ход занятия

1. Закон распределения случайной величины

Обычно рассматривают два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное множество значений.

Дискретная случайная величина используется при описании измерений, принимающих целочисленные значения: число дефектных изделий, число телефонных вызовов, число неисправностей в приборе и т.д. и может быть записана в виде последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Для некоторых случайных величин число возможных значений, принимаемых этой величиной, бывает настолько велико, что удобнее представлять их в виде непрерывных случайных величин, которые принимают любое значение в некотором интервале, например, продолжительность работы электрической лампы, дальность полета снаряда, уровень воды в половодье и т.д.

Для полного описания дискретной случайной величины необходимо:

- Указать все её возможные значения.
- Задать вероятности, с которыми принимаются эти значения.

Соотношения между возможными значениями дискретных случайных величин и их соответствующими вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Удобен табличный способ задания закона распределения: в первой строке таблицы указывают значения случайной величины, во второй строке – вероятности этих значений.

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n	\dots
P	P_1	P_2	\dots	P_i	\dots	P_n	\dots

Эту таблицу называют рядом распределения дискретной случайной величины. Так как дискретная случайная величина обязательно примет одно из своих значений x_i , то события $\{X = x_i\}$ образуют полную группу событий,

поэтому справедливо условие нормировки $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Полагают, что $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < x_{i+1} \dots$.

2. Математическое ожидание случайной величины

Пусть дискретная случайная величина задана своим рядом распределения:

X	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
P	p_1	p_2	p_3	\dots	p_n

Если число значений случайной величины конечно и равно n , то математическое ожидание равно конечной сумме:

$$m_X = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Математическое ожидание случайной величины – это среднее значение случайной величины. Оно помогает предсказать, какие значения можно ожидать в будущем.

Свойства математического ожидания:

1. $M[C] = C$, т.е. математическое ожидание постоянной равно самой постоянной;
2. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C ;
3. $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$ для произвольных случайных величин X, Y ;
4. $M[X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot \dots \cdot M[X_n]$ для n независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n .

Математическое ожидание случайной величины – это среднее значение случайной величины, которое она принимает в долгосрочной перспективе при многократном повторении эксперимента. Также математическое ожидание называют ожидаемым значением случайной величины, средним значением.

Значение в экономике – математическое ожидание помогает предсказывать, какие значения можно ожидать в будущем, и принимать обоснованные решения в условиях неопределённости.

3. Дисперсия случайной величины

Дисперсией или рассеянием случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от своего математического ожидания:

$$D[x] = M[(X - M[X])^2]$$

Из свойств математического ожидания и определения дисперсии имеем

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2 - 2X \cdot M[X] + (M[X])^2] = M[X^2] - 2M[X] \cdot M[X] + (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Свойства дисперсии:

1. $D[C] = 0$, где $C = \text{const}$;
2. $D[X] > 0$;
3. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C ;
4. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$ для независимых случайных величин X и Y .

Дисперсия случайной величины – это показатель разброса данных вокруг их среднего значения. Высокая дисперсия указывает на большой разброс, низкая – на близость данных друг к другу.

Понятие дисперсии встречается в статистике, а её значение в экономике – в анализе финансовых показателей и оценке рисков инвестиций.

Выделяют выборочную и генеральную дисперсию:

- выборочная (вычисляется на основе части совокупности);
- генеральная (рассчитывается для всей совокупности данных, когда известны значения всех элементов).

Дисперсия используется для анализа доходов, расходов, цен на товары и других финансовых показателей. Например:

1. Если компания анализирует доходы по сезонам, малая дисперсия укажет на стабильность доходов, а высокая — на значительные колебания. Аналитики могут использовать эту информацию для планирования бюджета и разработки стратегии ценообразования.

2. В финансах дисперсия помогает оценивать риски инвестиций. Так, высокая дисперсия доходности активов указывает на повышенные риски и волатильность. Например, акции технологических компаний могут иметь большую дисперсию по сравнению с облигациями, что делает их покупку более рискованной.

Задачи

Задача 1. Дана таблица, где в верхней строке указаны возможные значения случайной величины X , а в нижней – их вероятности.

X	1	2	3	4	5
P	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4

Может ли эта таблица быть рядом распределения X ?

Ответ: Да, так как $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$

Задание 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-2	-1	3	8	9
p_i	4p	0,2	0,3	p	0,4

Найти: p

Решение:

Найдем неизвестное значение p .

Случайная величина X может принимать только 5 значений, поэтому:

$$4p + 0,2 + 0,3 + p + 0,4 = 1$$

$$0,9 + 5p = 1$$

$$5p = 0,1$$

$$p = 0,02$$

Ответ: $p = 0,02$

Задание 3. Дан ряд распределения дискретной случайной величины X :

x	10	20	30	40
p	0.2	0.15	0.25	0.4

Найти математическое ожидание, дисперсию.

Решение:

$$\text{Проверка: } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,2 + 0,15 + 0,25 + 0,4 = 1$$

Находим математическое ожидание:

$$M[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 10 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,25 + 40 \cdot 0,4 = 28,5$$

Найдем дисперсию:

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2 = (10^2 \cdot 0,2 + 20^2 \cdot 0,15 + 30^2 \cdot 0,25 + 40^2 \cdot 0,4) - (28,5)^2 = 945 - 812,25 = 132,75.$$

Ответ: $M[X] = 28,5$, $D[X] = 132,75$.

Задание 4. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ дискретной случайной величины X , заданной законом распределения в таблице:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение.

$$\text{Проверка: } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,4 + 0,3 + 0,1 + 0,2 = 1$$

Математическое ожидание X вычисляется по формуле:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = (-5) \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3.$$

Найдем дисперсию:

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2 = ((-5)^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,2) - (-0,3)^2 = 15,3 - 0,09 = 15,21$$

Ответ: $M[X] = -0,3$, $D[X] = 15,21$.

Задание 5. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

Напишем возможные значения

$$X: x_1 = 50, x_2 = 1, x_3 = 0.$$

Вероятности этих возможных значений таковы:

$$\text{Событие } A \text{ – получен билет с выигрышем 50 рублей: } P(A) = p_1 = 1/100 = 0,01,$$

$$\text{Событие } B \text{ – получен билет с выигрышем 1 рубль: } P(B) = p_2 = 10/100 = 0,1,$$

$$\text{Событие } C \text{ – получен билет без выигрыша: } P(C) = p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0,89$$

Напишем закон распределения:

X	50	10	0
P	0,01	0,1	0,89

$$\text{Контроль: } 0,01 + 0,1 + 0,89 = 1$$

Домашнее задание

1. Контрольные вопросы (письменно)

1. Что называется законом распределения случайной величины? Опишите способы его задания.
2. Что такое ряд распределения дискретной случайной величины? Как он записывается в виде таблицы?
3. Дайте определение математического ожидания случайной величины. В чём заключается его экономический смысл?
4. Перечислите основные свойства математического ожидания.
5. Что такое дисперсия случайной величины? Как она вычисляется?
6. В чём заключается экономический смысл дисперсии? Приведите примеры её применения в финансовой сфере.
7. Перечислите основные свойства дисперсии.

2. Задачи для самостоятельного решения (письменно)

Задача 1. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ дискретной случайной величины X , заданной законом распределения в таблице:

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

Задача 2. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ дискретной случайной величины X , заданной законом распределения в таблице:

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,3	0,2	0,06	0,1	0,006	0,1	0,034

3. Конспект занятия в тетради (кратко)

Отчетность

Работы принимаются до 25 ноября 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание домашней работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОГСЭ.08 Высшая математика 18.11.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОГСЭ.08 Высшая математика 18.11.25 (Иванов Иван, ТД 2/1-9/24)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+ZftDEg43YX41YTRi>



С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература:

1. Башмаков, М.И. Математика : учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 8-е изд., стер. – Москва : Издательский центр «Академия», 2021. – 256 с. – ISBN 978-5-0054-0339-1.
2. Григорьев, В.П. Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 5-е изд., стер. – Москва : Образовательно-издательский центр «Академия», 2023. – 368 с. – ISBN 978-5-0054-0482-4.
3. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – 5-е изд., стер. – Москва : Образовательно-издательский центр «Академия», 2023. – 192 с. – ISBN 978-5-0054-1208-9.