



Chapitre 5

Utilisation des nombres complexes

I. Applications à la géométrie

Propriété

Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives a, b, c, d

a. $(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(b - a)$

b. $AB = |b - a|$

c. $(\vec{AB}; \vec{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$

Démonstrations

a. On considère un point E tel que $\vec{OE} = \vec{AB}$. L'affixe de E est $b - a$ donc

$$(\vec{u}; \vec{AB}) = (\vec{u}; \vec{OE}) = \arg(b - a)$$

b. $|b - a| = OE = AB$

c. $(\vec{AB}; \vec{CD}) = (\vec{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{CD}) = (\vec{u}; \vec{CD}) - (\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(d - c) - \arg(b - a) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$

Méthode

Utiliser les nombres complexes en géométrie

Vidéo <https://youtu.be/NjLZfbqRFB0>

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $a = -2 - i, b = 1 - 2i$ et $c = -1 + 2i$

1. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A .

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

Solution

1. $AB = |b - a| = |1 - 2i - (-2 - i)| = |3 - i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$AC = |c - a| = |-1 + 2i - (-2 - i)| = |1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

Donc $AB = AC$ et le triangle ABC est isocèle en A .

2. $(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+9i-3}{3^2-i^2} = \frac{10i}{10} = i$$

$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On en déduit que l'angle $\hat{BAC}$ est droit.

Remarque

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |i| = 1 \text{ donc } AC = AB$$

Méthode

Déterminer un ensemble de points

Vidéo <https://youtu.be/WTXu19XC9Lw>

Soit M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter

1. L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$

2. L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$

3. L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$

4. L'ensemble des points M tels que

$$\frac{|z-i|}{|z|} = 2$$

5. L'ensemble des points M tels que

$$\arg \arg(z) = \frac{\pi}{4}[\pi]$$

6. L'ensemble des points M tels que

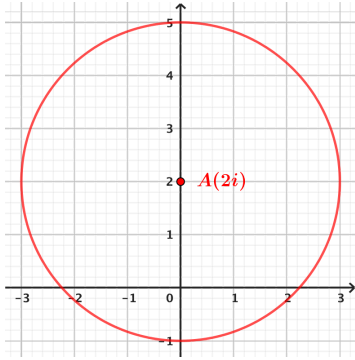
$$\arg \arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Solution

1. Soit A le point d'affixe $2i$

$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 3.

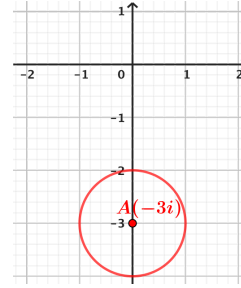


$$2. |iz - 3| = |i(z + 3i)| = |i||z + 3i| = |z + 3i|$$

Soit A le point d'affixe $-3i$

$$|iz - 3| = 1 \Leftrightarrow |z + 3i| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1.

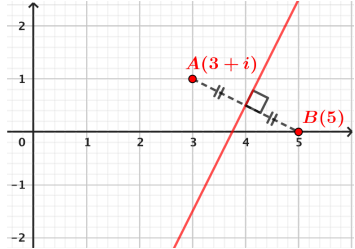


$$3. |\bar{z} - 3 + i| = |\overline{z - 3 + i}| = |z - 3 - i|$$

Soit A le point d'affixe $3 + i$ et B le point d'affixe 5

$$|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5| \Leftrightarrow |z - (3 + i)| = |z - 5| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB]



4. Notons que $z \neq 0$ nécessairement

$$\frac{|z-i|}{|z|} = 2 \Leftrightarrow |z - i| = 2|z| \Leftrightarrow |z - i|^2 = 4|z|^2$$

On pose $z = x + iy$, alors l'équation s'écrit

$$|x + iy - i|^2 = 4|x + iy|^2$$

$$\Leftrightarrow |x + i(y - 1)|^2 = 4|x + iy|^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2$$

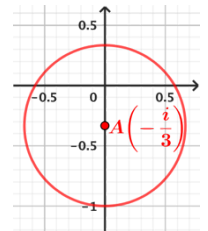
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$$

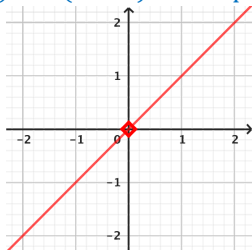
$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A\left(-\frac{i}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$



5. L'ensemble des points M est la première bissectrice d'équation $(i - 1)z + (i + 1)\bar{z} = 0$ privée de l'origine.



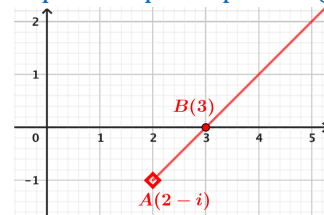
$$* \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i} \Leftrightarrow z + \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{i} \Leftrightarrow i(z + \bar{z}) =$$

$$6. \arg \arg(z - 2 + i) = \arg \arg(z - (2 - i)).$$

Soit A le point d'affixe $2 - i$

$$\arg \arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

L'ensemble des points M est la demi-droite d'origine A privée de A et passant par le point B(3)



Remarque

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans le plan complexe, les équations de droites n'ont pas tout à fait la forme habituelle puisque, dans l'équation $y = ax + b$, ce qui correspond à y correspond à $\operatorname{Im}(z)$ dans le plan complexe et $\operatorname{Re}(z)$ correspond à x . Ainsi, dans le plan complexe, une équation de droite correspond à l'équation

$$\operatorname{Im}(z) = a\operatorname{Re}(z) + b \Leftrightarrow \frac{z - \bar{z}}{2i} = a\frac{z + \bar{z}}{2} + b \Leftrightarrow z - \bar{z} = aiz + ai\bar{z} + 2ib \Leftrightarrow (1 - ai)z - (1 + ai)\bar{z} = 2ib$$

II. Racines énièmes de l'unité

1. Définition

On cherche à déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'égalité $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine énième de l'unité** est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble U_n des racines énièmes de l'unité possède exactement n racines.

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, w_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

Preuve

Existence

Soit $z \in U_n$,

$$z^n = 1 \Rightarrow |z|^n = |z^n| = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

On cherche ainsi les nombres complexes de la forme $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in [0; 2\pi[$.

$$z^n = 1 \Leftrightarrow (e^{i\theta})^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta = 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

On peut ainsi restreindre les valeurs prises par k à l'ensemble des entiers $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ compris entre 0 et $n-1$.
Donc les racines énièmes de l'unité sont données par

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, w_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

Unicité

Supposons qu'il existe $k' \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que

$$w_k = w_{k'} \Leftrightarrow e^{i \frac{2k\pi}{n}} = e^{i \frac{2k'\pi}{n}} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2l\pi \text{ où } l \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2k\pi = 2k'\pi + 2ln\pi \Leftrightarrow k = k' + ln \Leftrightarrow k - k' = ln$$

Donc

$$n | k - k'$$

Or,

$$0 \leq k \leq n-1$$

$$0 \leq k' \leq n-1 \Leftrightarrow -n+1 \leq -k' \leq 0$$

Donc, en sommant les deux inégalités membre à membre,

$$-n+1 \leq -k' \leq n-1$$

Le seul multiple de n compris entre $-n+1$ et $n-1$ est 0. Donc

$$k - k' = 0 \Leftrightarrow k = k'$$

Méthode

Résoudre une équation en utilisant les racines de l'unité

 **Vidéo** https://youtu.be/PZWgjj_7G7c

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a. $(z-1)^3 = 1$

b. $z^5 = -1$

Solution

a. $(z-1)^3 = 1$

$z-1$ est une racine 3^e de l'unité. Donc, soit $k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$,

$$z-1 = e^{i \frac{2k\pi}{3}}$$

On en déduit les solutions de l'équation

$$S = \left\{ 1 + e^0; 1 + e^{i \frac{2\pi}{3}}; 1 + e^{i \frac{4\pi}{3}} \right\} = \left\{ 2; 1 + e^{i \frac{2\pi}{3}}; 1 + e^{-i \frac{2\pi}{3}} \right\}$$

b. $z^5 = -1 \Leftrightarrow z^5 = (-1)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{-1}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow (-z)^5 = 1$

$-z$ est une racine 5^e de l'unité. Donc, soit $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$,

$$-z = e^{i \frac{2k\pi}{5}} \Leftrightarrow z = -e^{i \frac{2k\pi}{5}} \Leftrightarrow z = e^{i\pi} e^{i \frac{2k\pi}{5}} \Leftrightarrow z = e^{i \left(\frac{5\pi + 2k\pi}{5} \right)}$$

On en déduit les solutions de l'équation

$$S = \left\{ e^{i\pi}; e^{i\frac{7\pi}{5}}; e^{i\frac{9\pi}{5}}; e^{i\frac{11\pi}{5}}; e^{i\frac{13\pi}{5}} \right\} = \left\{ -1; e^{-i\frac{3\pi}{5}}; e^{-i\frac{\pi}{5}}; e^{i\frac{\pi}{5}}; e^{i\frac{3\pi}{5}} \right\}.$$

2. Représentation géométrique

Cas $n = 2$

Si on applique le théorème ci-dessus, les solutions de l'équation $z^2 = 1$ sont

$$w_0 = e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{2}} = e^{i0} = 1, w_1 = e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$$

On peut ainsi représenter les racines 2^e de l'unité sur le cercle trigonométrique. En effet, on a vu que les racines énièmes de l'unité ont pour module 1.

Cas $n = 3$

Les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont

$$w_0 = e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{3}} = e^{i0} = 1, w_1 = e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{i\frac{2 \times 2 \times \pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On peut ainsi représenter les racines 3^e de l'unité sur le cercle trigonométrique. Par convention, on note habituellement

$$j = w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$j^2 = w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

On remarquera que

$$1 + j + j^2 = 0$$

Les points dont les affixes sont les racines 3^e de l'unité forment les sommets d'un triangle équilatéral.

Cas $n = 4$

Les solutions de l'équation $z^4 = 1$ sont

$$w_0 = e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{4}} = e^{i0} = 1, w_1 = e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, w_2 = e^{i\frac{2 \times 2 \times \pi}{4}} = e^{i\pi} = -1, w_3 = e^{i\frac{2 \times 3 \times \pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

On peut ainsi représenter les racines 4^e de l'unité sur le cercle trigonométrique. Les points dont les affixes sont les racines 4^e de l'unité forment les sommets d'un carré.

De façon plus générale, les points dont les affixes sont les racines énièmes de l'unité forment les sommets d'un **polygone régulier à n côtés** inscrit dans le cercle trigonométrique. La formule avec j se généralise

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$$

En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et de premier terme 1 donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Méthode

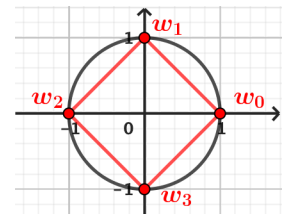
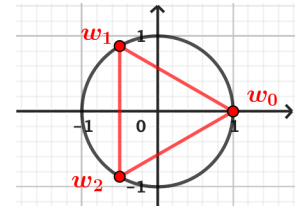
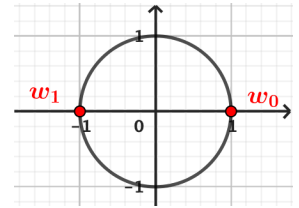
Utiliser les racines de l'unité

 **Vidéo** https://youtu.be/cqK_IGw_0fE

Démontrer que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à

$$P = 10 \sin \sin \left(\frac{\pi}{5} \right)$$

Solution



Les points dont les affixes sont les racines 5^e de l'unité forment les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. Ainsi, pour calculer le périmètre du pentagone, il suffit de calculer la longueur d'un côté du pentagone.

$$|w_1 - w_0| = \left| e^{\frac{i \cdot 2 \times 1 \times \pi}{5}} - 1 \right| = \left| e^{\frac{i \cdot 2\pi}{5}} - 1 \right| = \left| e^{\frac{i \cdot 2\pi}{10}} \right| \times \left| e^{\frac{i \cdot 2\pi}{10}} - e^{-\frac{i \cdot 2\pi}{10}} \right| = \left| e^{\frac{i \cdot \pi}{5}} - e^{-\frac{i \cdot \pi}{5}} \right|$$

Soit, en appliquant une formule d'Euler,

$$|w_1 - w_0| = \left| 2i \sin \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \right| = 2 \sin \sin \left(\frac{\pi}{5} \right)$$

On en déduit que le périmètre du pentagone est égal à $P = 10 \sin \sin \left(\frac{\pi}{5} \right)$

