

## Correction physique G2E 2016 (proposée par I. Bruand et P. Morel)

Remarques : la numération des questions m'a toujours laissée perplexe : pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

Des parties sont très calculatoires et laissent très peu de place au raisonnement physique : la partie 6 en fait partie.

Les candidats sont très (trop) guidés dans les premières parties qui ne laissent pas la place à la prise d'initiative.

### 1. Pression de vapeur saturante

1.1. La variance d'un système diphasé est égale à  $v = 3 - \varphi = 3 - 2 = 1$ . Lorsque la température est imposée, la variance réduite est donc nulle : la pression est constante.

1.2.

1.2.1. Utilisons l'équation d'état des gaz parfaits :  $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$  pour déterminer celle du volume massique d'un gaz :

$$v_g = \frac{RT}{PM}$$

Dans les conditions normales de température et de pression (1 bar, 25°C, pas exigible ?) pour de la vapeur d'eau:  $v_v = \frac{8,3 \times 298}{1,010^5 \times 18.10^{-3}} = 1,4 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

La masse volumique de l'eau liquide est égale à  $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  donc son volume massique vaut :  $v_l = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

$\frac{v_v}{v_l} = 1,4 \cdot 10^3$  : on peut donc négliger  $v_l$  devant  $v_v$ .

1.2.2. La relation de Clapeyron s'écrit alors :

$$l_v = T v_v \frac{dP_s}{dT} = T \frac{RT}{P_s M_e} \frac{dP_s}{dT}$$

On sépare les variables et on intègre entre  $(T_0, P_0)$  et  $(T, P_s)$  :

$$\begin{aligned} \frac{M_e l_v}{R} \frac{dT}{T^2} &= \frac{dP_s}{P_s} \\ \frac{M_e l_v}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} &= \int_{P_0}^{P_s} \frac{dP_s}{P_s} \\ \frac{M_e l_v}{R} \left( -\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0} \right) &= \ln \left( \frac{P_s}{P_0} \right) \end{aligned}$$

Ce qui conduit à l'expression de l'énoncé.

$$1.3. \quad P_s = \exp \left( A - \frac{B}{T} \right)$$

$$P_s(278 \text{ K}) = \exp \left( 13,28 - \frac{4952}{278} \right) = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ bar}$$

$$P_s(300 \text{ K}) = \exp \left( 13,28 - \frac{4952}{300} \right) = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ bar}$$

$$\frac{M_e l_v}{R} = B$$

$$l_v = \frac{BR}{M_e} = \frac{4952 \times 8,3}{18.10^{-3}} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

## 2. Enthalpie de vaporisation

- 2.1. La puissance fournie par le thermoplongeur sert à évaporer une masse  $m$  d'eau mais une partie est perdue :

$$Pt = ml_v + \Phi t$$

2.2.

- 2.2.1. Avec un thermoplongeur :  $Pt = m_1 l_v + \Phi t$

Avec les deux thermoplongeurs :  $2Pt = m_2 l_v + \Phi t$

En faisant la différence membre à membre :

$$Pt = (m_2 - m_1) l_v$$

$$l_v = \frac{Pt}{m_2 - m_1}$$

$$2.2.2. \quad l_v = \frac{350 \times 3 \times 60}{(49 - 21) \cdot 10^{-3}} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En prenant les résultats précédents non arrondis on arrive à un écart relatif de  $\frac{2283 - 2250}{2250} \times 100 = 1,5 \%$ . Il y a donc cohérence.

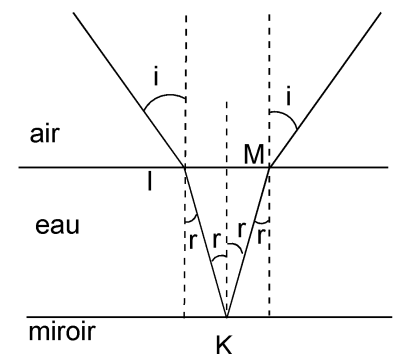
## 3. Hygromètre à condensation

- 3.1. Le rayon  $R_1$  est atténué par rapport à  $R_0$  car il est issu d'une réflexion partielle en I. Il en est de même pour  $R_2$ , subissant une réflexion partielle en M au franchissement du dioptre eau  $\rightarrow$  air. De plus, la traversée de la couche d'eau provoque une atténuation (cf énoncé).

En M le rayon passe d'un milieu plus réfringent (l'eau) vers un milieu moins réfringent (l'air) ; toutefois l'angle d'incidence en M est égal à l'angle entre l'incident et le réfracté en I (loi de la réflexion + angles alternes-internes).

La valeur de  $r$  est donc fixée par celle de  $i$  ; elle ne peut donc pas dépasser  $r \sin \frac{1}{n}$ , ce qui correspond à l'angle limite pour la réflexion totale.

Il ne peut donc pas y avoir réflexion totale en M.



- 3.2. La loi de Snell-Descartes au point I s'écrit :  $\sin i = n \sin r$ .

$$\tan r = \frac{IM}{2e} = \frac{d_1 - d_2}{2e} \text{ et } \tan i = \frac{IN}{2e} = \frac{d_1}{2e}$$

$$d_1 = 2e \tan i$$

$$d_1 - d_2 = 2e \tan r$$

$$d_2 = 2e(\tan i - \tan r)$$

Si l'on se place dans les conditions de Gauss, les angles  $i$  et  $r$  seront faibles ; les relations précédentes peuvent donc être linéarisées en :  $d_1 \approx 2e i$  et  $d_2 \approx 2e(i - r)$ . Pour les petits angles la loi de Snell-Descartes s'écrit  $i \approx nr$  ; la seconde relation devient  $d_2 \approx 2ei(1 - \frac{1}{n})$ . Toutefois de faibles valeurs auront une incertitude relative plus élevée. Si l'on veut conserver des angles élevés pour avoir des incertitudes relatives plus faibles, on se sera pas dans les conditions de Gauss et les relations ne pourront pas être linéarisées.

#### 4. Hygromètre capacitif

4.1. On se place à l'équilibre du pont (courant nul dans le galvanomètre). Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont alors en série :  $\underline{U} = (R_1 + R_2)\underline{I}_1$  d'où  $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1 + R_2}$ .

4.2. De la même façon,  $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{C_1 \omega j} + \frac{1}{C_x \omega j}}$ .

4.3. La tension aux bornes du galvanomètre est nulle si  $\underline{V}_A = \underline{V}_B$  ou si  $\underline{U}_2 = \underline{U}_x$ .

La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_1 = R_2 \frac{\underline{U}}{R_1 + R_2}$$

(remarque : on n'aurait pu obtenir ce résultat à l'aide d'un pont diviseur de tension et s'affranchir des deux premières questions).

$$\underline{U}_x = \frac{1}{C_x \omega j} \underline{I}_1 = \frac{1}{C_x \omega j} \frac{\underline{U}}{\frac{1}{C_1 \omega j} + \frac{1}{C_x \omega j}} = \frac{\underline{U}}{1 + \frac{C_x}{C_1}}$$

Le pont est équilibré lorsque  $R_2 \frac{\underline{U}}{R_1 + R_2} = \frac{\underline{U}}{1 + \frac{C_x}{C_1}}$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{C_x}{C_1}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_x}{C_1}$$

$$C_x = \frac{R_1}{R_2} C_1$$

#### 5. Degré hygrométrique de l'air humide

5.1. La pression partielle est la pression qu'aurait le gaz s'il occupait seul tout le volume à la température d'étude :

$$P_e(T)V = n_e RT = \frac{m_e}{M_e} RT$$

$$P_s(T)V = n_s RT = \frac{m_s}{M_s} RT$$

Le rapport membre à membre mène à :

$$e = \frac{P_e(T)}{P_s(T)} = \frac{m_e}{m_s}$$

5.2. Pour de l'air parfaitement sec,  $m_e = 0$  :  $e = 0$  et pour de l'air saturé en vapeur d'eau,  $m_s = m_e$  :  $e = 1$ .

5.3. Exprimons la pression partielle de la masse d'air sec :

$$P_a(T)V = \frac{m_a}{M_a} RT$$

$P$  est la pression totale :  $P = P_a(T) + P_e(T)$  donc  $(P - P_e(T))V = \frac{m_a}{M_a} RT$

$$\frac{\frac{m_e}{M_e}}{\frac{m_a}{M_a}} = \frac{P_e(T)}{P - P_e(T)}$$

On arrive bien à :

$$x = \frac{m_e}{m_a} = \frac{M_a}{M_e} \frac{P_e(T)}{P - P_e(T)}$$

5.4.

$$5.4.1. \quad x = \delta \frac{e P_s(T)}{P - e P_s(T)} = 0,62 \times \frac{0,40 \times 3969}{1,10^5 - 0,40 \times 3969} = 0,010.$$

$$5.4.2. \quad m_e = 0,40 m_s = 0,40 \frac{P_s(T) V M_e}{RT} = 0,40 \times \frac{3969 \times 300 \times 18}{8,3 \times 300} = 3,4 \text{ kg}$$

$$m_a = \frac{m_e}{x} = 3,4 \cdot 10^2 \text{ kg}$$

$$m_h = m_a + m_e = 3,4 \cdot 10^2 \text{ kg}$$

5.5.

$$5.5.1. \quad P'_e(T)V = \frac{m_e}{M_e} RT' \text{ donc } P'_e(T) = \frac{m_e}{M_e} \frac{RT'}{V} = \frac{3443}{18} \times \frac{8,3 \times 278}{300} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

5.5.2.  $P_s(5^\circ\text{C}) = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 1000 \text{ Pa} < P'_e(T)$  donc l'air est bien saturé en vapeur d'eau.  $e' = 1$  et la masse d'eau vapeur est donnée par :

$$P_s(5^\circ\text{C})V = \frac{m_v}{M_e} \frac{RT'}{V}$$

$$m_v = \frac{P_s(5^\circ\text{C}) V M_e}{RT'} = \frac{1000 \times 300 \times 18}{8,3 \times 300} = 2,3 \text{ kg}$$

La masse d'eau liquéfiée est  $m_l = m_e - m_v = 1,1 \text{ kg}$

5.6. Quand l'eau liquide commence juste à apparaître, on est à la limite de la saturation

donc  $P_e(T_R) = P_s(T_R)$  ; avec la loi des gaz parfaits  $P_e(T_R) = \frac{m_e RT_R}{M_e V}$

soit  $\ln \ln P_e(T_R) = \ln \frac{m_e R}{M_e V} + \ln \ln T_R$ . D'après la loi de Rankine

$$\ln P_s(T_R) = A - \frac{B}{T_R}$$

L'équation vérifiée par  $T_R$  est donc :  $\ln \frac{m_e R}{M_e V} + \ln \ln T_R = A - \frac{B}{T_R}$

Numériquement cela donne  $\ln \ln T_R + \frac{4952}{T_R} = 23,14$ . La solution de cette équation non linéaire peut être approchée graphiquement ou par tâtonnement ; on trouve  $T_R = 283 \text{ K}$  (cette technique est-elle exigible des étudiants) ?

## 6. Formation de nuages

6.1. La loi présentée s'appelle la loi de nivellement barométrique (ce terme est-il exigible des étudiants de BCPST ?) pour une atmosphère isotherme à l'équilibre, assimilée à un gaz parfait. On se place dans la situation  $z \ll H_a$  et on fait un développement limité pour obtenir la loi approchée.

6.2. Par analogie avec l'expression précédente :

$$P_e(z) = P_e^0 \left(1 - \frac{z}{H_e}\right) = e_0 P_s^0 \left(1 - \frac{z}{H_e}\right)$$

$$\text{On a ainsi : } \ln P_e(z) = \ln(e_0) + \ln(P_s^0) + \ln\left(1 - \frac{z}{H_e}\right)$$

En utilisant à nouveau un développement limité, on arrive à l'expression de l'énoncé.

6.3. La loi  $T^\gamma P_a^{1-\gamma} = T_0^\gamma P_a^0^{1-\gamma}$  est la loi de Laplace, valable pour une évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait avec  $\gamma$  constant. On peut la démontrer en partant de la 2<sup>nde</sup> identité thermodynamique :  $dH = TdS - VdP$  ; pour une transformation isentropique  $dS = 0$ , ce qui conduit à  $dH = -VdP$

En utilisant la loi des gaz parfaits, et en exprimant la capacité thermique molaire à pression constante en fonction de  $\gamma$ , on obtient  $\frac{nR\gamma}{\gamma-1}dT = \frac{nRT}{P}dP$

Soit  $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P}$  ; l'intégration entre  $T_0$  et  $T$  d'une part, et  $P_a^0$  et  $P_a$  d'autre part

donne (avec  $\gamma$  constant) :  $\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T}{T_0} = \ln \frac{P_a}{P_a^0}$ , ce qui conduit à  $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{P_a}{P_a^0}$ ,

ce qui permet d'obtenir la relation demandée. On en déduit, en utilisant la question 6.1. et en effectuant un développement limité :

$$T(z) = T_0 \left(\frac{P_a^0}{P_a}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_a^0}{P_a^0 \left(1 - \frac{z}{H_a}\right)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(1 - \frac{z}{H_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \approx T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H_a}\right)$$

Par identification avec l'expression de l'énoncé, nous avons :

$$\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{H_a}$$

6.4. Faisons ce que demande l'énoncé....

$$\ln P_s = A - \frac{B}{T_0(1-\alpha z)} = A - \frac{B}{T_0} (1 + \alpha z)$$

$$\ln P_s^0 = A - \frac{B}{T_0}$$

$$6.5. \quad \ln P_e(z) = \ln(e_0) + \ln(P_s^0) - \frac{z}{H_e} = \ln(e_0) + A - \frac{B}{T_0} - \frac{z}{H_e}$$

$$6.6. \quad A - \frac{B}{T_0}(1 + \alpha z) = \ln(e_0) + A - \frac{B}{T_0} - \frac{z}{H_e}$$

L'altitude  $z$  cherchée est donc telle que:

$$\begin{aligned} -\frac{B}{T_0}\alpha z &= \ln(e_0) - \frac{z}{H_e} \\ \left(\frac{1}{H_e} - \frac{B}{T_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{H_a}\right) z &= \ln(e_0) \\ z &= \frac{\ln(e_0)}{\left(\frac{1}{H_e} - \frac{B}{T_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{H_a}\right)} = \frac{\ln(e_0)}{\frac{1}{H_a} \left(\delta - \frac{B}{T_0} \frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} \end{aligned}$$

Quel est l'intérêt d'introduire  $\delta$  ?

Si on remplace  $H_a$  par son expression et qu'on fait l'AN, on trouve 468m. A priori, ce n'est pas demandé.

$$6.7. \quad H_a = \frac{RT_0}{M_a g} = 8,6 \text{ km. Pour } z \approx 500 \text{ m, l'approximation } z \ll H_a \text{ est valide}$$

$$\left(\frac{z}{H_a} = 0,05\right)$$

## 7. Discussion physique sans modélisation mathématique

La masse de la goutte liquide croît car la vapeur d'eau diffuse dans l'air extérieur vers la goutte. Toutefois la condensation de la vapeur est exothermique, ce qui tend à faire augmenter la température de la goutte. Il y aura donc diffusion thermique depuis la goutte vers l'air extérieur. Les inconnues du problème sont donc la masse  $m(t)$  de la goutte et sa température  $T(t)$  (la conductivité thermique de l'eau étant bien plus grande que celle de l'air on peut raisonnablement supposer que la température est uniforme dans la goutte). La diffusion particulière est régie par la loi de Fick, la diffusion thermique par la loi de Fourier.

Le processus tend à devenir moins « efficace » car l'augmentation de température de la goutte tend à augmenter la pression de vapeur saturante de l'eau au voisinage de la goutte. On se rapproche ainsi de l'équilibre liquide-vapeur.

La prise en compte de la tension superficielle de l'eau liquide, de la présence d'impuretés... est sans doute aussi nécessaire.

Cette question s'inspire peut-être de ce document :

[web.sca.uqam.ca/~eva/SCA3641/documents/doc\\_word/PhysiquedesNuages6\\_8.doc](http://web.sca.uqam.ca/~eva/SCA3641/documents/doc_word/PhysiquedesNuages6_8.doc)

## 8. Analyse de document

8.1. Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir l'équation du mouvement. Le système étudié est une goutte d'eau.

8.2. La vitesse limite est telle que  $\ddot{z} = 0$ , ce qui donne d'après le document :

$$3\dot{z}^2 = g \left( 4 \frac{\rho_0}{\rho} r_0 + z \right)$$

On voit que la vitesse  $\dot{z}$  dépend de  $z$  donc ce n'est pas une vitesse limite.

- 8.3. La poussée d'Archimède n'a pas été prise en compte, ni les frottements de la goutte avec l'air.

## 9. Résolution de problème

*1<sup>ère</sup> proposition de correction (utilisant l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique d'un gaz) :* le paramètre  $\alpha$  peut être estimé en utilisant la loi de Stokes (on la suppose applicable ici, qui est valable pour un écoulement stationnaire rampant autour d'un objet sphérique et qui donne la force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

L'ordre de grandeur de la viscosité dynamique pour un gaz est  $\eta = 1.10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

$$\alpha = 6\pi\eta R = 6\pi \times 1.10^{-5} \times 1,5.10^{-3} = 2,8.10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

Pour estimer la durée du régime transitoire, on peut chercher à exprimer la constante de temps en établissant l'équation du mouvement. Pour cela, on applique le PFD à une goutte soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de frottement (le référentiel terrestre étant supposé galiléen) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \rho_a V \vec{g} - \alpha \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g} - \frac{\rho_a V}{m} \vec{g}$$

Le temps caractéristique est donné par :

$$\tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{4\pi R^3 \rho_e}{3\alpha} = \frac{4\pi \times (1,5.10^{-3})^3 \times 1,00.10^3}{3 \times 2,8.10^{-7}} = 50 \text{ s}$$

*2<sup>nde</sup> proposition de correction (utilisant la valeur de la vitesse limite donnée dans l'énoncé) :*  
Reprenons l'équation différentielle précédente :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g} - \frac{\rho_a V}{m} \vec{g}$$

Ici  $\frac{\rho_a V}{m} = \frac{\rho_a}{\rho_e} \approx 7.10^2$ , on peut donc négliger la poussée d'Archimède devant les autres forces.

En projection sur un axe vertical descendant, l'équation devient donc  $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = g$

Lorsque la vitesse limite est atteinte,  $\frac{dv}{dt} = 0$  ; la vitesse limite vérifie donc  $\frac{\alpha}{m} v_{\text{lim}} = g$ , d'où

$$\alpha = \frac{mg}{v_{\text{lim}}} . \text{ L'application numérique donne } \alpha = 5,6.10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

Le temps caractéristique est donné par :

$$\tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{4\pi R^3 \rho_e}{3\alpha} = \frac{4\pi \times (1,5.10^{-3})^3 \times 1,00.10^3}{3 \times 5,6.10^{-6}} = 0,8 \text{ s}$$

Ces valeurs sont notablement éloignées des précédentes

Supposons la loi de Stokes vérifiée :  $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$  : le paramètre  $\alpha$  vaut donc  $6\pi\eta R$  ; on estime la viscosité dynamique de l'air dans la cadre de ce modèle, ce qui conduit à  $\eta = 2.10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Or cette valeur est très éloignée de la valeur réelle (environ  $1,5 \cdot 10^{-5}$  Pl, valeur non donnée par l'énoncé).

Analyse critique : le modèle de force proportionnelle à la vitesse n'est donc certainement pas adapté (avec une vitesse par rapport à l'air de  $8 \text{ m.s}^{-1}$ , on n'est pas dans les conditions d'un écoulement rampant, le nombre de Reynolds calculé valant  $1,6 \cdot 10^6$  !!).

## 10. Arc en ciel

10.1. On applique les lois de Snell-Descartes :

En I :  $\sin i = n \sin r$

En J :  $r' = r$

En K :  $n \sin r' = \sin i'$

On trouve bien  $i' = i$

10.2. On

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = i - r + \pi - 2r + i - r = 2i + \pi - 4r = 2i + \pi - 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \quad a$$

10.3. On fait appel au minimum de déviation car au voisinage de son minimum D varie assez peu (l'énoncé aurait pu donner cette courbe ou la faire tracer) ; il y aura donc une sorte « d'accumulation de lumière » dans un faible intervalle angulaire.

Au minimum de déviation,  $\frac{dD}{di} = 2 - 4 \frac{dr}{di} = 0$  donc, on a bien  $\frac{dr}{di} = \frac{1}{2}$ .

10.4.  $n \cos r dr = \cos i di$

$$\begin{aligned} n \cos r &= 2 \cos i \\ n^2 (1 - \sin^2 r) &= 4 (1 - \sin^2 i) \\ n^2 - \sin^2 i &= 4 (1 - \sin^2 i) \\ 3 \sin^2 i &= 4 - n^2 \\ \sin^2 i &= \frac{4 - n^2}{3} \end{aligned}$$

10.5. Phénomène de dispersion, l'indice de réfraction de l'eau dépend de la longueur d'onde. Les différentes longueurs d'onde sont déviées différemment, d'où l'observation de couleurs.