I) الترتيب في R :

نشاط 1 :

1) A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي. قارن بين الطول BC والمجموع $AB + AC$. (ناقش وضعيتين).

2) عبر عن الوضعيتين السابقتين بمتباينة واحدة.

3) باعتبار $BC = 4cm$ و $AC = \frac{5}{3}$ و $AB = 2\sqrt{2}$ بدون حساب استنتج إشارة $2\sqrt{2} + \frac{5}{3} - 4$

حل النشاط :

1) الوضعية الأولى : إذا كانت النقطة A تنتمي إلى القطعة $[BC]$ فإن : $AB + AC = BC$

الوضعية الثانية : إذا كانت النقطة A لا تنتمي إلى القطعة $[BC]$ فإن : $AB + AC > BC$

2) التعبير عن الوضعيتين السابقتين بمتباينة واحدة. $AB + AC \geq BC$

3) باعتبار $BC = 4cm$ و $AC = \frac{5}{3}$ و $AB = 2\sqrt{2}$ بدون حساب استنتج إشارة $2\sqrt{2} + \frac{5}{3} - 4$

لدينا : $AB + AC \geq BC$ معناه $2\sqrt{2} + \frac{5}{3} \geq 4$ ومعناه $2\sqrt{2} + \frac{5}{3} - 4 \geq 0$ أي : $2\sqrt{2} + \frac{5}{3} - 4 \in R_+$

1 - مقارنة عددين :

تعريف 1 : a و b عددان حقيقيان

القول أن a أكبر من أو يساوي b معناه $a - b$ عدد موجب ونكتب $a \geq b$

$a \geq b$ معناه $(a-b) \in R_+$.

ملاحظات :

1) $a \geq b$ معناه $a - b \geq 0$

2) $a \leq b$ معناه $a - b \leq 0$ و معناه $b - a \geq 0$

3) العبارة $a > b$ تقرأ a أكبر من b وتعني أن $(a-b) \in R_+^*$ أي : $a - b > 0$.

4) العبارة $a < b$ تقرأ a أصغر من b وتعني $(a-b) \in R_-^*$ أي : $a - b < 0$.

5) إذا كان $a > 0$ و $b < 0$ فإن $a > b$ والعكس غير صحيح.

مثال بين أن : $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 > 2\sqrt{6}$

لدينا : $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5$

بما أن 5 موجب تماما فإن $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} > 0$ معناه $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 > 2\sqrt{6}$.

تعريف 2 : مقارنة عددين a و b معناه التصريح بإحدى الحالات الثلاث التالية :

$a < b$. $a > b$. $a = b$.

تطبيق : 19 صفحة 43

نعتبر العددين الحقيقيين x و y حيث : $x = \pi\sqrt{2}$ و $y = \frac{138}{31}$

احسب بالاستعانة بالحاسبة الفرق $x - y$ ثم استنتج مقارنة x و y.

الحل :

$x - y = \pi\sqrt{2} - \frac{138}{31} = 1,831572404...$ ومنه : $x - y > 0$ إذن : $x > y$.

تطبيق : 18 صفحة 43

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، قارن العددين الحقيقيين $(a^2 - 8a)$ و (-16).

2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $(2-8\sqrt{2})$ و (-16).

الحل :

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، قارن العددين الحقيقيين $(a^2 - 8a)$ و (-16).

لدينا : $(a - 4)^2 = a^2 - 8a + 16$ ومنه : $a^2 - 8a) - (-16)$

إذا كان $a = 4$ فإن : $(a - 4)^2 = 0$ وبالتالي : $(a^2 - 8a) = (-16)$

إذا كان $a \neq 4$ فإن $(a - 4)^2 > 0$ وبالتالي : $(a^2 - 8a) > (-16)$

2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $(2-8\sqrt{2})$ و (-16).

من السؤال السابق بوضع $a=\sqrt{2}$ نجد $a^2-8a=2-8\sqrt{2}$ وبما أن $a \neq 4$ فإن : $(2-8\sqrt{2})>-16$

تطبيق : لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية . بين أنه إذا كان $[a \leq b$ و $b \leq c]$ فإن $a-c \in R^-$ ماذا تستنتج ؟

الحل :

لدينا : $[a \leq b$ و $b \leq c]$ معناه $[a-b \in R^-$ و $b-c \in R^-]$ ولدينا مجموع عددين سالبين هو عدد سالب

إذن : $(a-b)+(b-c) \in R^-$ ومنه : $a-c \in R^-$ وبالتالي : $a \leq c$

مبرهنة 1 : من أجل كل أعداد حقيقية a ، b ، c : إذا كان $[a \leq b$ و $b \leq c]$ فإن : $a \leq c$

نشاط 2 : لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية

1) بين أنه إذا كان $a \geq \sqrt{3}$ فإن $a-\sqrt{2} \geq 0$ هل العكس صحيح ؟

2) بين أنه $a \geq b$ يكافئ $a+c \geq b+c$

3) بين أنه $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$ هل التكافؤ يبقى صحيح إذا كان $c < 0$ ؟

حل النشاط :

1) بين أنه إذا كان $a \geq \sqrt{3}$ فإن $a-\sqrt{2} \geq 0$ هل العكس صحيح ؟

لدينا : $a \geq \sqrt{3}$ وبما أن $\sqrt{3} \geq \sqrt{2}$ حسب المبرهنة 1 نستنتج أن $a \geq \sqrt{2}$ معناه $a-\sqrt{2} \geq 0$

$a-\sqrt{2} \geq 0$ معناه $a \geq \sqrt{2}$ إذا أخذنا $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$ فإن $a \geq \sqrt{3}$ تكون خاطئة وبالتالي العكس غير صحيح

ملاحظة : عكس المبرهنة 1 غير صحيح.

2) بين أنه $a \geq b$ يكافئ $a+c \geq b+c$

$a+c \geq b+c$ يكافئ $(a+c)-(b+c) \geq 0$ معناه $a-b \geq 0$ ولدينا : $a-b \geq 0$ تكافئ $a \geq b$

إذن : $a \geq b$ يكافئ $a+c \geq b+c$

3) بين أنه $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$ هل التكافؤ يبقى صحيح إذا كان $c < 0$ ؟

لدينا : $(ac - bc = c(a - b$ بما أن $c > 0$ فإن العبارتين $ac - bc$ و $(a - b)$ لهما نفس الإشارة

أي : $a-b \geq 0$ يكافئ $ac-bc \geq 0$ وبالتالي : $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$

ملاحظة : إذا كان $c < 0$ فإن العبارتين $ac - bc$ و $(a - b)$ لهما إشارتين متعاكستان ومنه التكافؤ ليس صحيح

بل يكون لدينا : $a-b \geq 0$ يكافئ $ac-bc \leq 0$ وبالتالي : $a \geq b$ و $c < 0$ يكافئ $ac \leq bc$

2 - الترتيب والعمليات :

مبرهنة 2 : من أجل كل الأعداد الحقيقية a ، b ، c لدينا :

- $a \geq b$ يكافئ $a+c \geq b+c$
- $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$
- $a \geq b$ و $c < 0$ يكافئ $ac \leq bc$

ملاحظات :

- لتكن a ، b ، c ، d أعداد حقيقية:

نفرض أن $a \geq b$ و $c \geq d$ يكافئ $a+c \geq b+c$ و $c+b \geq d+b$ وهذا حسب مبرهنة 2
وحسب مبرهنة 1 نستنتج $a+c \geq b+d$

- لتكن a ، b ، c ، d أعداد حقيقية موجبة:

نفرض أن $a \geq b$ و $c \geq d$ يكافئ $ac \geq bc$ و $cb \geq db$ ومنه وحسب مبرهنة 1 نستنتج $ac \geq bd$

مبرهنة 3 :

- من أجل كل الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d لدينا : إذا كان $a \geq b$ و $c \geq d$ فإن $a+c \geq b+d$
- من أجل كل الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d **الموجبة** لدينا : إذا كان $a \geq b$ و $c \geq d$ فإن $ac \geq bd$

3 - قواعد المقارنة :

نشاط 3 :

قارن ، دون استعمال الحاسبة مع التبرير :

$\frac{9}{11}$ و $\frac{7}{11}$ ؛ $\frac{13}{21}$ و $\frac{13}{23}$ ؛ $\frac{5}{8}$ و $\frac{2}{3}$ ؛ $0,25^2$ و $1,25^2$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\frac{1}{2}$

حل النشاط :

$\frac{9}{11}$ و $\frac{7}{11}$ لهما نفس المقام ولدينا : $9 > 7$ إذن $\frac{9}{11} > \frac{7}{11}$

$\frac{13}{21}$ و $\frac{13}{23}$ لهما نفس البسط ولدينا : $21 < 23$ إذن : $\frac{13}{23} < \frac{13}{21}$

$\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{8}$ نوحد مقاميهما : $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ و $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ إذن $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$

؛ $0,25^2$ و $1,25^2$ لدينا $0,25 < 1,25$ و $0,25 < 1,25$ بتطبيق مبرهنة 3 نجد $0,25^2 < 1,25^2$.

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\frac{1}{2}$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{10}$ و $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ ولدينا $25 < 4 \times 5$ إذن $\sqrt{25} > \sqrt{4 \times 5}$ أي : $5 > 2\sqrt{5}$

وبالتالي : $\frac{5}{10} > \frac{2\sqrt{5}}{10}$ أي : $\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{5}}$

مبرهنة 4 : من أجل كل عددين حقيقيين موجبين :

- $a \geq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$
- $a \geq b$ يكافئ $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$

البرهان :

- بالنسبة للأولى تعتمد على : $(a^2 - b^2 = (a - b)(a + b$
بما أن a و b موجبان فإن $(a + b)$ موجب و لدينا $(a - b)$ موجب إذن $a^2 - b^2$ موجب
ملاحظة : إذا كان a و b سالبين فإن $(a + b)$ سالب و لدينا $(a - b)$ موجب إذن $a^2 - b^2$ يكون سالب.

- بالنسبة للثانية تستنتج من الأولى $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ يكافئ $\sqrt{a}^2 \geq \sqrt{b}^2$ أي : $a \geq b$ يكافئ $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$

نتيجة : من أجل كل عددين حقيقيين سالبين : $a \geq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$

نشاط 4 : a عدد حقيقي موجب : ناقش حسب قيم العدد a ترتيب الأعداد a^3 ، a^2 ، a .

حل النشاط : لدينا : $(a^3 - a^2 = a^2(a - 1$ و $(a^2 - a = a(a - 1$

ولدينا a^2 و a عددان موجبان ومنه :

إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإن : $(a - 1)$ سالب ومنه : $a^2 - a$ و $a^3 - a^2$ يكونا سالبين وبالتالي $a^2 \leq a$ و $a^3 \leq a^2$

إذا كان $a \geq 1$ فإن : $(a - 1)$ موجب ومنه : $a^2 - a$ و $a^3 - a^2$ يكونا موجبان وبالتالي $a^2 \geq a$ و $a^3 \geq a^2$

مبرهنة 5 : a عدد حقيقي موجب :

- إذا كان : $0 \le a \le 1$ فإن : $a^3 \le a^2 \le a$
- إذا كان : $a \ge 1$ فإن : $a^3 \ge a^2 \ge a$

ملاحظة : يمكن تعميم ترتيب قوى عدد حقيقي موجب a كما يلي :

إذا كان $0 \le a \le 1$ فإن : قوى العدد a ترتب ترتيبا تنازليا أي : $a^n \le \ldots \le a^2 \le a$

إذا كان $a \ge 1$ فإن : قوى العدد a ترتب ترتيبا تصاعديا $a^n \ge \ldots \ge a^2 \ge a$

تطبيق : *30 صفحة 44*

لتكن c ، b ، a أعداد حقيقية موجبة تماما .

1) بين أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

2) بين أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

الحل :

1) تبيان أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

نفرض أن $a < b$ معناه $a - b < 0$ ولدينا $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ بما أن $a - b < 0$ و $c > 0$ فإن : $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} < 0$

وبالتالي : $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

2) تبيان أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

نفرض أن $a < b$ معناه $a - b < 0$ ولدينا $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{cb - ca}{ab} = \frac{c(b-a)}{ab}$

بما أن $a - b < 0$ فإن $b - a > 0$ ولدينا $c > 0$ فإن : $c(b - a) > 0$

ولدينا $a > 0$ و $b > 0$ إذن $ab > 0$ وبالتالي : $\frac{c(b-a)}{ab} > 0$ أي : $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} > 0$ معناه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$.

نتيجة 1 :

إذا كان لكسرين كل من بسطيهما ومقاميهما موجب تماما، وإذا كان لهما نفس البسط فإن الكسر الأصغر منهما هو الذي له أكبر مقام.

إذا كان لكسرين كل من بسطيهما ومقاميهما موجب تماما ، وإذا كان لهما نفس المقام فإن الكسر الأصغر منهما هو الذي له أصغر بسط.

تطبيق : *16 صفحة 43*

قارن ، دون استعمال الحاسبة ، كل عددين فيما يلي :

$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ ؛ $-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$ ؛ -10^{-3} و -10^{-4} .

الحل :

$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ لهما نفس البسط ومنه : $\frac{17}{23} < \frac{17}{22}$

$-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$ نقارن أولا بين الكسرين $\frac{9}{11}$ و $\frac{8}{11}$ لهما نفس المقام و $9 > 8$ إذن : $\frac{9}{11} > \frac{8}{11}$ ومنه: $-\frac{9}{11} < -\frac{8}{11}$

- 10^{-3} و - 10^{-4} يمكن كتابتهما على شكل كسور كما يلي : $-\frac{1}{10^3}$ و $-\frac{1}{10^4}$

نقارن أولا بين $\frac{1}{10^3}$ و $\frac{1}{10^4}$ لدينا : $10^4 > 10^3$ إذن : $\frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^3}$ و منه : $-\frac{1}{10^4} > -\frac{1}{10^3}$

تطبيق : *17* صفحة *43*

قارن ، دون استعمال الحاسبة ، كل عددين فيما يلي :

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ و $\sqrt{2}-1$ ؛ $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ ؛ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

الحل :

- $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ لدينا : $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ وبما أن : $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فإن : $\frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{\sqrt{3}}{6}$

وبالتالي : $\frac{1}{3\sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$

- $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ لدينا : $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$
- $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ لدينا : $(1+\sqrt{7})^2 = 8+2\sqrt{7}$ يكافئ $1+\sqrt{7} = \sqrt{8+2\sqrt{7}}$
- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ لدينا : $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$ ومنه : $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

تطبيق : *24* صفحة *24*

رتب تصاعديا الأعداد a^3 ، a^2 ، a في كل حالة من الحالتين الآتيتين :

- $a = \sqrt{2}-1$
- $a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

الحل :

- $a = \sqrt{2}-1$: لدينا : $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ ومنه $0 < a < 1$ إذن $a^3 < a^2 < a$
- $a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ لدينا : $a = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه $a > 1$ إذن : $a < a^2 < a^3$.