………………………………………. 10.SINIF MATEMATİK DERS PLANI

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	**Tarih**	**24-28 Şubat 2025**
Sınıf	10	**Süre**	**6 ders saati**
Alt Öğrenme Alanı	**İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER**		
Konu	Karmaşık Sayıların Gösterimi		

BÖLÜM II

Kazanım	10.4.1.3. Bir karmaşık sayının a+ib (a,b ∈ ℝ) biçiminde ifade edildiğini açıklar.
Değerler	YARDIMSEVERLİK - İşbirliği Yapma, Merhametli Olma
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

KARMAŞIK SAYILARIN GÖSTERİMİ

Bilgi

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminde $\Delta=b^2-4ac<0$ ise bu denklemin $\mathbb{R}$ de (gerçek sayılarda) çözüm kümesi yoktur. Örneğin $x^2+9=0$ denkleminin çözüm kümesi, $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x_1=-\sqrt{-9}$ veya $x_2=\sqrt{-9}$ olur. $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$ olduğundan bu denklemin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesi boş kümedir.

Bu denklemde $a=1$, $b=0$ ve $c=9$ olduğundan $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\cdot1\cdot9=-36<0$ olur. Bu durumda verilen denklemde $\Delta<0$ ise bu denklemin gerçek sayılar kümesini de kapsayan yeni bir sayı kümesine ihtiyaç vardır. Bu yeni sayı kümesine **karmaşık sayılar kümesi** denir ve karmaşık sayıların kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir. $\sqrt{-9}$ sayısı karmaşık sayılar kümesinin bir elemanıdır.

$\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3\cdot\sqrt{-1}$ olur.
i sanal sayı birimi $(\sqrt{-1}=i)$ olmak üzere $\sqrt{-9}=3\cdot\sqrt{-1}=3i$ bulunur.
Buradan verilen denklemin çözüm kümesi, $x_1=-\sqrt{-9} \Rightarrow x_1=-3i$ veya $x_2=\sqrt{-9} \Rightarrow x_2=3i$ ve $ÇK=\{-3i, 3i\}$ olur.

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi $(i^2=-1)$ olmak üzere $z=a+bi$ şeklindeki sayılara **karmaşık sayılar**, bu sayıların oluşturduğu kümeye ise **karmaşık sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{C}$ sembolü ile gösterilir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}=\{z \mid z=a+bi \text{ ve } a, b \in \mathbb{R}, i=\sqrt{-1}\}$ şeklindedir.

$$z=a+bi$$

$b \rightarrow$ imajiner kısım (İm(z))
$a \rightarrow$ gerçek kısım (Re(z))

a sayısına **z karmaşık sayısının gerçek kısmı** denir ve $Re(z)=a$ ile gösterilir.
b sayısına **z karmaşık sayısının imajiner (sanal) kısmı** denir ve $İm(z)=b$ ile gösterilir.
Her gerçek sayı aynı zamanda bir karmaşık sayıdır, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen karmaşık sayıların gerçek ve sanal (imajiner) kısımlarını bulunuz.

a) $z_1 = 5 + 3i$ **b)** $z_2 = -6 - 7i$ **c)** $z_3 = 3i$ **ç)** $z_4 = 8$

Çözüm

a) $z_1 = 5 + 3i \Rightarrow \text{Re}(z_1) = 5$ ve $\text{İm}(z_1) = 3$ olur.

b) $z_2 = -6 - 7i \Rightarrow \text{Re}(z_2) = -6$ ve $\text{İm}(z_2) = -7$ olur.

c) $z_3 = 3i \Rightarrow \text{Re}(z_3) = 0$ ve $\text{İm}(z_3) = 3$ olur.

ç) $z_4 = 8 \Rightarrow \text{Re}(z_4) = 8$ ve $\text{İm}(z_4) = 0$ olur.

Örnek

$z = -5 + 2i$ ve $w = 2 + 7i$ karmaşık sayıları veriliyor. $\text{Re}(z) - 2 \cdot \text{İm}(w)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$z = -5 + 2i \Rightarrow \text{Re}(z) = -5$ ve $w = 2 + 7i \Rightarrow \text{İm}(w) = 7$ olarak bulunur. Bu değerler $\text{Re}(z) - 2 \cdot \text{İm}(w)$ ifadesinde yerine yazılırsa $\text{Re}(z) - 2 \cdot \text{İm}(w) = -5 - 2 \cdot 7 = -5 - 14 = -19$ olur.

Örnek

$\text{Re}(x - 5i) + \text{İm}(3 - 4i + 2xi) = 11$ olduğuna göre x gerçek sayısını bulunuz.

Çözüm

$\text{Re}(x - 5i) + \text{İm}(3 - 4i + 2xi) = 11$ eşitliği $\text{Re}(x - 5i) + \text{İm}(3 + (-4 + 2x)i) = 11$ şeklinde düzenlenirse $\text{Re}(x - 5i) = x$ ve $\text{İm}(3 + (-4 + 2x)i) = -4 + 2x$ bulunur. Bu değerler $\text{Re}(x - 5i) + \text{İm}(3 - 4i + 2xi) = 11$ ifadesinde yerine yazılırsa $x - 4 + 2x = 11 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$ olur.

Örnek

$z = 12 - \sqrt{-25}$ karmaşık sayısı veriliyor. $\text{Re}(z) + \text{İm}(z)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$z = 12 - \sqrt{-25} = 12 - \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \cdot \sqrt{25} = 12 - 5i$ olarak bulunur. Buradan

$z = 12 - 5i \Rightarrow \text{Re}(z) = 12$ ve $\text{İm}(z) = -5$ değerleri $\text{Re}(z) + \text{İm}(z)$ ifadesinde yerine yazılırsa $\text{Re}(z) + \text{İm}(z) = 12 + (-5) = 7$ olur.

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi$ karmaşık sayısının sanal kısmının işareti değiştirilerek oluşturulan $a - bi$ karmaşık sayısına $a + bi$ **karmaşık sayısının eşleniği** denir ve $\overline{z} = a - bi$ ile gösterilir.

Örnek

Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $z_1 = 2 + 7i$ **b)** $z_2 = -5 + i$ **c)** $z_3 = -4 - 7i$ **ç)** $z_4 = 2i$ **d)** $z_5 = -19$

Çözüm

a) $z_1 = 2 + 7i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_1} = 2 - 7i$ olur.

b) $z_2 = -5 + i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_2} = -5 - i$ olur.

c) $z_3 = -4 - 7i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_3} = -4 + 7i$ olur.

ç) $z_4 = 2i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_4} = -2i$ olur.

d) $z_5 = -19$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_5} = -19$ olur.

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminde $\Delta < 0$ ise denklemin sanal kökleri vardır.

Kökler $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ olur ve bu kökler birbirinin eşleniğidir. Bir başka ifadeyle $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere sanal köklerden biri $m + ni$ ise diğeri $m - ni$ olur.

Örnek

$x^2 + 2x + 2 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$ bulunur. Dolayısıyla bu denklemin sanal kökleri vardır. Bu kökler;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot (-1 + i)}{\cancel{2}} = -1 + i,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot (-1 - i)}{\cancel{2}} = -1 - i \text{ olur.}$$

Buradan $ÇK = \{-1 + i, -1 - i\}$ olarak bulunur.

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

1. $z=\sqrt{-25}+\sqrt[3]{-27}$ sayısını $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z=a+bi$ şeklinde yazınız.

2. $z=\sqrt{-36}-\sqrt[3]{-8}$ ifadesini $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z=a+bi$ şeklinde yazıp $a \cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $z_1=4-3i$

b) $z_2=-5i+2$

c) $z_3=6i$

ç) $z_4=7$

4. $z=-5+3i$ karmaşık sayısı için $\text{Re}(z)-\text{İm}(z)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $x^2-4x+8=0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

6. $x^2-4x+6=0$ denklemi ile ilgili

I. İki farklı sanal kökü vardır.

II. Sanal köklerinden birisi $-2-\sqrt{6}i$ dir.

III. Kökler birbirinin eşleniğidir.

ifadelerinden hangisi ya da hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

7. $z=\sqrt[3]{a-1}-\sqrt{-a}$ karmaşık sayısının eşleneğinin sanal kısmı 3 olduğuna göre z karmaşık sayısını bulunuz.

8. x, y birer gerçek sayı olmak üzere $z=(x^2+1)+(y+x)i$ karmaşık sayısının gerçek kısmı 5, sanal kısmı 8 olduğuna göre y nin alabileceği değerlerin çarpımını bulunuz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi	---

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar	Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

....
....
Matematik Öğretmeni

.../..../2025
UYGUNDUR
Okul Müdürü
....