

Краевая олимпиада по математике_2022

1. Целые числа от 1 до 11 записаны в строку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и числа записанного под ним есть точный квадрат?

2. Решить уравнение: $2\sqrt{x-1} - \frac{1}{4}x^2 = 1$.

3. Найдите все пары вещественных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}.$$

4. Катеты АВ и АС равнобедренного прямоугольного треугольника АВС равны 1. Окружность, вписанная в угол ВАС, делит гипотенузу ВС на 3 равные части. Найдите радиус окружности.

5. На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?
6. Ручка дороже 3 карандашей на целое число рублей, а карандаш стоит дешевле 1 рубля. Комплект из ручки и 12 карандашей стоит ровно 5 рублей. Сколько стоит ручка? (Примечание. Карандаш стоит целое число копеек.)

Решение краевой математической олимпиады_2022

1. Целые числа от 1 до 11 записаны в строку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и числа записанного под ним есть точный квадрат?

Ответ. Нет. **Решение.** Нетрудно видеть, что под числом 11 может быть записано только число 5, но под числом 4 тоже может быть записано только число 5. Противоречие.

$$2\sqrt{x-1} - \frac{1}{4}x^2 = 1$$

2. Решить уравнение:

Ответ: 2.

3. Найдите все пары вещественных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}$$

Ответ: $(-3; 2)$. Уравнение сводится к виду $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 0$.

4. Катеты AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 1. Окружность, вписанная в угол BAC , делит гипотенузу BC на 3 равные части. Найдите радиус окружности.

Решение. Введем систему координат с началом в точке A и осями AB и AC .

Уравнение окружности $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. По условию точка с координатами $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ лежит на окружности. Подставляя в уравнение, получаем $r = \frac{1}{3}$ или $r = \frac{5}{3}$.

5. На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?

Ответ: 7. **Решение.** Клетки, не лежащие на краю доски 8×8 , образуют квадрат 6×6 . Разобьем его на квадраты 2×2 . В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $3^2 = 9$. Поэтому на краю доски стоят не менее $16 - 9 = 7$ королей. Теперь разобьем на квадраты 2×2 всю доску 8×8 , и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 16 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 7.

6. Ручка дороже 3 карандашей на целое число рублей, а карандаш стоит дешевле 1 рубля. Комплект из ручки и 12 карандашей стоит ровно 5 рублей. Сколько стоит ручка? (Примечание. Карандаш стоит целое число копеек.)

Решение. Заменяя ручку на три карандаша, получаем, что 15 карандашей стоят целое число рублей, меньшее 5. Следовательно, это число делится на 3, значит, равно ровно 3, и каждый карандаш стоит 20 копеек. Три карандаша стоят 60 коп, а ручка на 2 рубля дороже, то есть 2 руб. 60 копеек.

