Краевая олимпиада по математике_2022

1. Целые числа от 1 до 11 записаны в строку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и числа записанного под ним есть точный квадрат?

2. Решить уравнение: $2\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x^2=1$.

3. Найдите все пары вещественных чисел (x; y), удовлетворяющих уравнению $\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x}$.

4. Катеты AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 1. Окружность, вписанная в угол BAC, делит гипотенузу BC на 3 равные части. Найдите радиус окружности.

5. На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?

6. Ручка дороже 3 карандашей на целое число рублей, а карандаш стоит дешевле 1 рубля. Комплект из ручки и 12 карандашей стоит ровно 5 рублей. Сколько стоит ручка? (Примечание. Карандаш стоит целое число копеек.)

Решение краевой математической олимпиады_2022

1. *Целые числа от 1 до 11 записаны в строку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и числа записанного под ним есть точный квадрат?*

Ответ. Нет. **Решение.** Нетрудно видеть, что под числом 11 может быть записано только число 5, но под числом 4 тоже может быть записано только число 5. Противоречие.

2. *Решить уравнение:* $2\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x^2=1$.

Ответ: 2.

3. Найдите все пары вещественных чисел (x; y), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x}$$

Ответ: (-3; 2). Уравнение сводится к виду $(x+3)^2+(y-2)^2=0$.

4. *Катеты AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 1. Окружность, вписанная в угол BAC, делит гипотенузу BC на 3 равные части. Найдите радиус окружности.*

Решение. Введем систему координат с началом в точке A и осями AB и AC. Уравнение окружности $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$. По условию точка с координатами $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ лежит на окружности. Подставляя в уравнение, получаем $r=\frac{1}{3}$ или $r=\frac{5}{3}$.

5. *На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?*

Ответ: 7. **Решение**. Клетки, не лежащие на краю доски 8×8, образуют квадрат 6×6. Разобьём его на квадраты 2×2. В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $3^2 = 9$. Поэтому на краю доски стоят не менее 16–9 = 7 королей. Теперь разобьём на квадраты 2×2 всю доску 8×8, и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 16 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 7.

6. *Ручка дороже 3 карандашей на целое число рублей, а карандаш стоит дешевле 1 рубля. Комплект из ручки и 12 карандашей стоит ровно 5 рублей. Сколько стоит ручка? (Примечание. Карандаш стоит целое число копеек.)*

Решение. Заменяя ручку на три карандаша, получаем, что 15 карандашей стоят целое число рублей, меньшее 5. Следовательно, это число делится на 3, значит, равно ровно 3, и каждый карандаш стоит 20 копеек. Три карандаша стоят 60 коп, а ручка на 2 рубля дороже, то есть 2 руб. 60 копеек.