Лекция №7. Алгоритмы и способы их описания.

Алгоритмизация наряду с моделированием выступает в качестве общего метода информатики. Алгоритмы являются объектом систематического исследования граничащего с математикой и информатикой, это исследование является научной дисциплиной близкой к математической логике и называется *теорией алгоритмов*.

Само слово «*алгоритм*» происходит от латинского написания имени математика 19-го века Аль-Хорезми, который сформулировал правила выполнения алгоритмических действий. Первоначально под алгоритмами понимали только правила выполнения четырех арифметических действий.

Понятие *исполнителя* алгоритма можно определить с помощью какой-либо формализации. Исполнителем может быть человек, группа людей, робот, станок, компьютер и т.д. Важнейшим свойством, характеризующим любого из этих исполнителей, является то, что исполнитель умеет выполнять некоторые команды. Так, исполнитель – человек умеет выполнять различные команды, такие как «встать», «сесть», «лечь спать» и т.д. Вся совокупность команд, которые данный исполнитель умеет исполнять, называется *системой команд исполнителя.*

Исполнитель, как правило, не вникает в смысл того, что он делает, но получает необходимый результат. В таком случае говорят, что исполнитель действует формально, т.е. отвлекается от содержания поставленной задачи и только строго выполняет некоторые правила, инструкции.

Наличие алгоритма формализует процесс решения задачи, исключает рассуждение исполнителя.
Использование алгоритма дает возможность решать задачу формально, механически исполняя команды алгоритма в указанной последовательности. Целесообразность предусматриваемых алгоритмом действий обеспечивается точным анализом со стороны того, кто составляет этот алгоритм.

Введение в рассмотрение понятия «*исполнитель*» позволяет определить

алгоритм *как точное и понятное предписание исполнителю совершить последовательность действий, направленных на достижение поставленной цели.*

Наиболее распространенными и привычными являются алгоритмы работы с величинами – числовыми, символьными, логическими и т.д.

Алгоритм, составленный для некоторого исполнителя, можно представить различными способами: *графического и словесного описания, в виде таблицы, последовательностью формул, записанным на алгоритмическом языке* (язык программирования).

Свойства алгоритмов

Алгоритм должен быть составлен таким образом, чтобы исполнитель, в расчете на котором он создан, мог однозначно и точно следовать командам алгоритма и получать определенный результат. Это накладывает на записи алгоритмов ряд обязательных требований, суть которых вытекает из понятия алгоритма.

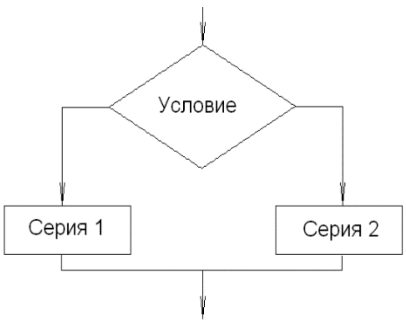
Сформулируем эти требования в виде перечня свойств, которые должны удовлетворять алгоритмы.

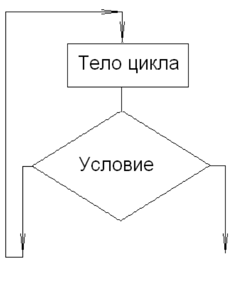
1. *Дискретность*. Это свойство состоит в том, что описываемый процесс должен быть разбит на последовательность отдельных, понятных исполнителю шагов. Возникающая в результате такого разбиения запись представляет собой упорядоченную совокупность четко разделенных друг от друга предписаний, образующих непрерывную (дискретную) структуру алгоритма. Только выполнив требования одного предписания можно приступить к выполнению следующего.
2. *Детерминированность* или определенность означает, что, будучи понятным, алгоритм не должен содержать неоднозначно понимаемых предписаний. Более того, в алгоритмах недопустимы ситуации, когда после выполнения очередной команды алгоритма исполнителю неясно, какая из команд алгоритма должна быть выполнена следующей.
3. *Результативность* состоит в том, что при точном исполнении всех предписаний алгоритма процесс должен прекратиться через конечное число шагов и при этом должен получиться определенный результат. Вывод о том, что решение не существует – тоже решение.
4. *Массовость* – это значит, алгоритм должен обеспечивать решение не одной задачи, а некоторого класса данного типа.

Виды алгоритмов

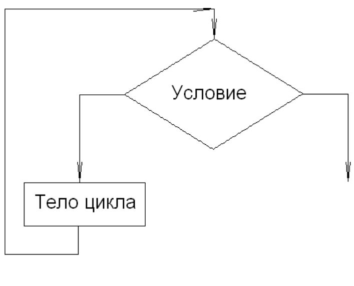
Алгоритмы бывают:

- *линейные*, представляющие собой четкую последовательность команд исполнителю.
- алгоритмы, при использовании которых порядок следования команд зависит от результатов проверки некоторых *условий*, называют *разветвляющимися* (алгоритмы ветвления). Условием называется высказывание, которое может быть либо истинным, либо ложным. Условие, записанное на формальном языке, называется *условным* или *логическим* выражением.
- алгоритмы, при использовании которых отдельной команды или серии команд выполняются неоднократно, называют *циклическими* (алгоритмы *повторения*). При этом повторение может происходить либо пока не будет выполнено определенное условие, либо определенное количество раз.

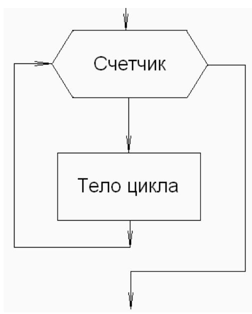




Цикл с постусловием



Цикл с предусловием



Счетный цикл

При построении новых алгоритмов могут использоваться алгоритмы, составленные ранее. Алгоритмы, целиком используемые в составе других алгоритмов, называются *вспомогательными*. Не исключены ситуации, когда в роли вспомогательного алгоритма выступает алгоритм сам содержащий ссылку на другие вспомогательные алгоритмы.

Очень часто возникают ситуации, когда в роли вспомогательного алгоритма вступает сам алгоритм, в этом случае его называют *рекурсивным*. Если команда обращения алгоритма к самому себе находится в самом алгоритме, то рекурсию называют *прямой*. Возможны случаи, когда рекурсивный вывод данного алгоритма происходит из вспомогательного алгоритма, которому в данном алгоритме имеется обращение. Такая рекурсия называется *косвенной*.

Контрольные вопросы

1. Каковы возможные подходы к определению понятия алгоритм?
2. Что вы знаете об исполнителях алгоритмов?
3. Перечислите и охарактеризуйте основные алгоритмические структуры.
4. Чем определяются свойства алгоритмов?

Принципы обработки информации компьютером.

Несмотря на разнообразие компьютеров в современном мире, все они строятся по единой принципиальной схеме, основанной на фундаменте идеи программного управления Чарльза Бэббиджа (середина XIX в). Эта идея была реализована при создании первой ЭВМ ENIAC в 1946 году коллективом учёных и инженеров под руководством известного американского математика Джона фон Неймана, сформулировавшего концепцию ЭВМ с вводимыми в память программами и числами - программный принцип.

Главные элементы концепции:

- двоичное кодирование информации;
- програмное управление;
- принцип хранимой программы;
- принцип параллельной организации вычислений, согласно которому операции над числом проводятся по всем его разрядам одновременно.

Между алгеброй логики и двоичным кодированием существует следующая связь: математический аппарат алгебры логики очень удобен для описания того, как функционируют аппаратные средства компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, а значений логических переменных тоже два: “1” и “0”

Одни и те же устройства компьютера могут применяться для обработки и хранения как числовой информации, представленной в двоичной системе счисления, так и логических переменных; • на этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики позволяет значительно упростить логические функции, описывающие функционирование схем компьютера, и, следовательно, уменьшить число основных узлов компьютера

Арифметические и логические основы работы компьютера.

Формы мышления

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные древнегреческими мыслителями. Основы формальной логики заложил Аристотель, который впервые отделил логические формы мышления (речи) от его содержания.

Логика — это наука о формах и способах мышления.

Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира. Логика позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.

Мышление всегда осуществляется в каких-то формах. Основными формами мышления являются *понятие, высказывание* и *умозаключение.*

Понятие выделяет существенные признаки объекта, которые отличают его от других объектов. *Понятие* — это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

Понятие имеет две стороны: *содержание* и *объем.* Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков объекта. Чтобы раскрыть содержание понятия, следует найти признаки, необходимые и достаточные для выделения данного объекта из множества других объектов. Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется.

Свое понимание окружающего мира человек формулирует в форме *высказываний* (суждений, утверждений). Высказывание строится на основе понятий и по форме является повествовательным предложением. Высказывания могут быть выражены с помощью не только естественных языков, но и формальных. Например, высказывание на естественном языке имеет вид «Два умножить на два равно четырем», а на формальном, математическом языке оно записывается в виде: «$2 \cdot 2 = 4$».

Об объектах можно судить верно, или неверно, то есть высказывание может быть *истинным* или *ложным.* Истинным будет высказывание, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей. Высказывание не может быть выражено повелительным или вопросительным предложением, так как оценка их истинности или ложности невозможна.

Высказывание — это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними. Высказывание может быть либо истинно, либо ложно.

До сих пор мы рассматривали простые высказывания. На основании простых высказываний могут быть построены *составные высказывания.* Если истинность или ложность простых высказываний устанавливается в результате соглашения на основании здравого смысла, то истинность или ложность составных высказываний вычисляется с помощью использования *алгебры высказываний.*

Умозаключения позволяют на основе известных фактов, выраженных в форме суждений (высказываний), получать заключение, то есть новое знание. Примером умозаключений могут быть геометрические доказательства.

Умозаключение — это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).

Посылками умозаключения по правилам формальной логики могут быть только истинные суждения. Тогда, если умозаключение проводится в соответствии с правилами формальной логики, то оно будет истинным. В противном случае можно прийти к ложному умозаключению.

Алгебра высказываний

Алгебра высказываний была разработана для того, чтобы можно было определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание.

В алгебре высказываний суждениям (простым высказываниям) ставятся в соответствие *логические переменные,* обозначаемые прописными буквами латинского алфавита. Рассмотрим два простых высказывания:

A= «Два умножить на два равно четырем». B = «Два умножить на два равно пяти».

Высказывания могут быть *истинными* или *ложными*. Истинному высказыванию соответствует значение логической переменной 1, а ложному — значение 0. В нашем случае первое высказывание истинно (A = 1), а второе ложно (B =0).

В алгебре высказываний высказывания обозначаются именами логических переменных, которые могут принимать лишь два значения: «истина» (1) и «ложь» (0).

В алгебре высказываний над высказываниями можно производить определенные логические операции, в результате которых получаются новые, составные высказывания.

Для образования новых высказываний наиболее часто используются базовые логические операции, выражаемые с помощью логических связок «и», «или», «не».

Логическое умножение (конъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «и» называется *операцией логического умножения* или *конъюнкцией.*

Составное высказывание, образованное в результате операции логического умножения (конъюнкции), истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

Так, из приведенных ниже четырех составных высказываний, образованных с помощью операции логического умножения, истинно только четвертое, так как в первых трех составных высказываниях хотя бы одно из простых высказываний ложно:

(1) «2 • 2 = 5 и 3 • 3 = 10»,

(2) «2 • 2 = 5 и 3 • 3 = 9»,

(3) «2 -2 = 4 и 3 • 3 = 10»,

(4) «2 • 2 = 4 и 3 - 3 = 9».

На формальном языке алгебры высказываний (алгебры логики) операцию логического умножения (конъюнкцию) принято обозначать значком «&» либо «^». Образуем составное высказывание F, которое получится в результате конъюнкции двух простых высказываний:

$$F = A \,\&\, B.$$

С точки зрения алгебры высказываний мы записали формулу функции логического умножения, аргументами которой являются логические переменные *A* и *B,* которые могут принимать значения «истина» (1) и «ложь» (0).

Сама функция логического умножения *F* также может принимать лишь два значения «истина» (1) и «ложь» (0). Значение логической функции можно определить с помощью *таблицы истинности* данной функции, которая показывает, какие значения принимает логическая функция при всех возможных наборах ее аргументов (табл).

Таблица истинности функции логического умножения

A	B	$F = A\&B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

По таблице истинности легко определить истинность составного высказывания, образованного с помощью операции логического умножения. Рассмотрим, например, составное высказывание «*2 • 2 = 4 и 3 • 3 = 10*». Первое простое высказывание истинно ($A = 1$), а второе высказывание ложно ($B = 0$), по таблице определяем, что логическая функция принимает значение ложь ($F = 0$), то есть данное составное высказывание ложно.

Логическое сложение (дизъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний с помощью союза «или» называется *операцией логического сложения* или *дизъюнкцией.*

Составное высказывание, образованное в результате логического сложения (дизъюнкции), истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

Так, из приведенных ниже четырех составных высказываний, образованных с помощью операции логического сложения, ложно только первое, так как в последних трех составных высказываниях хотя бы одно из простых высказываний истинно:

(1) «2 · 2 = 5 или 3 · 3 = 10»,

(2) «2 · 2 = 5 или 3 · 3 = 9»,

(3) «2 · 2 = 4 или 3 · 3 = 10»,

(4) «2 · 2 = 4 или 3 · 3 = 9».

Операцию логического сложения (дизъюнкцию) на формальном языке алгебры логики принято обозначать либо значком «v», либо знаком сложения «+». Образуем составное высказывание *F,* которое получится в результате дизъюнкции двух простых высказываний:

$$F = A \vee B.$$

С точки зрения алгебры высказываний мы записали формулу функции логического сложения, аргументами которой являются логические переменные *A* и *B*. Значение логической функции можно определить с помощью таблицы истинности данной функции, которая показывает, какие значения принимает логическая функция при всех возможных наборах ее аргументов (табл).

Таблица истинности функции логического сложения

A	*B*	*F = Av B*
0	*0*	*0*
0	1	1
1	0	1
1	1	1

По таблице истинности легко определить истинность составного высказывания, образованного с помощью операции логического сложения. Рассмотрим, например, составное высказывание «2 · 2 = 4 или 3 · 3 = 10». Первое простое высказывание истинно *(A* = 1), а второе высказывание ложно *(B* = 0), по таблице определяем, что логическая функция принимает значение истина *(F* = 1), то есть данное составное высказывание истинно.

Логическое отрицание (инверсия)

Присоединение частицы «не» к высказыванию называется *операцией логического отрицания* или *инверсией.*

Логическое отрицание (инверсия) делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное — истинным.

Пусть *A* = «Два умножить на два равно четырем» — истинное высказывание, тогда высказывание *F* = «Два умножить на два не равно четырем», образованное с помощью операции логического отрицания, — ложно.

Операцию логического отрицания (инверсию) над логическим высказыванием *A* в алгебре логики принято обозначать ¬*A*. Образуем высказывание *F,* являющееся логическим отрицанием А:

$$F = A.$$

Истинность такого высказывания задается таблицей истинности функции логического отрицания (табл).

Таблица истинности функции логического отрицания

A	*F=¬A*
0	1

1	0

Истинность высказывания, образованного с помощью операции логического отрицания, можно легко определить с помощью таблицы истинности. Например, высказывание «Два умножить на два не равно четырем» ложно *(A = 0)*, а полученное из него в результате логического отрицания высказывание «Два умножить на два равно четырем» истинно (F= 1),

Логические выражения и таблицы истинности

Логические выражения. Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую входят *логические переменные,* обозначающие высказывания, и *знаки логических операций,* обозначающие логические функции.

Для записи составного высказывания в виде логического выражения на формальном языке (языке алгебры логики) в составном высказывании нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

При выполнении логических операций определен следующий порядок их выполнения: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Для изменения указанного порядка могут использоваться скобки.

Истинность или ложность составных высказываний можно определять чисто формально, руководствуясь законами алгебры высказываний, не обращаясь к смысловому содержанию высказываний.

Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить *таблицу истинности*, которая определяет его истинность или ложность при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).

При построении таблиц истинности целесообразно руководствоваться определенной последовательностью действий.

Во-первых, необходимо определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение. Если количество логических переменных равно n, то:

количество строк = 2^n.

Во-вторых, необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.

В-третьих, необходимо построить таблицу истинности с указанным количеством строк и столбцов, обозначить столбцы и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.

В-четвертых, необходимо заполнить таблицу истинности по столбцам, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности (табл.).

Таблица истинности логической функции $F = (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B)$

A	*B*	*AvB*	*¬A*	*¬B*	*¬Av¬B*	*(AvB)&(¬Av¬B)*
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Логические выражения, у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают, называются *равносильными*. Для обозначения равносильных логических выражений используется знак «=».

Логические функции

Любое составное высказывание можно рассматривать как логическую функцию $F(X_1,X_2, ..., X_n)$, аргументами которой являются логические переменные $X_1, X_2, ..., X_n$ (простые высказывания). Сама функция и аргументы могут принимать только два различных значения: «истина» (1) и «ложь» (0).

Выше были рассмотрены функции двух аргументов: логическое умножение $F(A,B) = A\&B$, логическое сложение $F(A,B) = A \vee B$, а также логическое отрицание $F(A) = \neg A$, в котором значение второго аргумента можно считать равным нулю.

Каждая логическая функция двух аргументов имеет четыре возможных набора значений аргументов. Мы можем определить, какое количество различных логических функций двух аргументов может существовать:

$$N = 2^4 = 16.$$

Таким образом, существует 16 различных логических функций двух аргументов, каждая из которых задается своей таблицей истинности (табл.).

Таблицы истинности логических функций двух аргументов

Аргументы		Логические функции															
A	*B*	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	*0*	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Легко заметить, что здесь логическая функция F_2 является функцией логического умножения, F_8 — функцией логического сложения, F_{13} — функцией логического отрицания для аргумента *A* и F_{11} — функцией логического отрицания для аргумента *B*.

Логическое следование (импликация). Логическое следование (импликация) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если..., то...».

Логическая операция импликации «если *A,* то *B*», обозначается $A \rightarrow B$ и выражается с помощью логической функции F_{14}.

Составное высказывание, образованное с помощью операции логического следования (импликации), ложно тогда и только тогда, когда из истинной предпосылки (первого высказывания) следует ложный вывод (второе высказывание).

Например, высказывание «Если число делится на 10, то оно делится на 5» истинно, так как истинны и первое высказывание (предпосылка), и второе высказывание (вывод).

Высказывание «Если число делится на 10, то оно делится на 3» ложно, так как из истинной предпосылки делается ложный вывод.

Однако операция логического следования несколько отличается от обычного понимания слова «следует». Если первое высказывание (предпосылка) ложно, то вне зависимости от истинности или ложности второго высказывания (вывода) составное высказывание истинно. Это можно понимать таким образом, что из неверной предпосылки может следовать что угодно.

В алгебре высказываний все логические функции могут быть сведены путем логических преобразований к трем базовым: логическому умножению, логическому сложению и логическому отрицанию.

Логическое равенство (эквивалентность). Логическое равенство (эквивалентность) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «... тогда и только тогда, когда ...».

Логическая операция эквивалентности «А тогда и только тогда, когда *B»* обозначается $A \sim B$ и выражается с помощью логической функции F_{10}.

Составное высказывание, образованное с помощью логической операции эквивалентности истинно тогда н только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют основные формы мышления?
2. В чем состоит разница между содержанием и объемом понятия?
3. Как определяется истинность или ложность простого и составного высказываний?
4. Составьте составное высказывание, содержащее операции логического умножения, сложения и отрицания. Определите его истинность.
5. Что содержат таблицы истинности и каков порядок их построения?
6. Какие логические выражения называются равносильными?
7. Перечислите основные законы логики.