

Preliminaire.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable est que son polynôme caractéristique soit scindé et que chaque sous-espace propre ait pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

Autrement dit : $\det(A - \lambda \text{Id}) = (-1)^n \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $\forall k \in \{1, \dots, r\}, \dim(\text{Ker}(A - \lambda_k \text{Id})) = \alpha_k$

Partie I.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit φ l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base canonique est :

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Comment montrer, sans utiliser la méthode classique (polynôme caractéristique, valeurs propres, sous-espaces propres), méthode demandée dans la question 2, que A_φ est diagonalisable ?
Un peu de devinette ... peut-être!

Certes, il est facile de voir que 0 est valeur propre de A_φ puisqu'il est clair que $\text{rang}(A_\varphi) = 2$ et donc que $\text{Ker}(A_\varphi)$ est de dimension 1. Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est par exemple le

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vecteur dont la matrice colonne des composantes relativement à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il est déjà moins évident de remarquer que et de conclure que 2 est donc valeur propre de A_φ .

Il devient tout à fait audacieux, dans une première question, de croire que les candidats vont en déduire que A_φ admet donc une troisième valeur propre réelle λ_3 , vérifiant :

$$0 + 2 + \lambda_3 = \text{Tr}(A_\varphi) = 3 \text{ soit } \lambda_3 = 1$$

Ainsi, A_φ admet donc trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable... Mais restons sérieux, cette première question n'est pas à sa place et devrait simplement être la conclusion de la question 2 que nous allons traiter classiquement maintenant !

2. Polynôme caractéristique :

$$\det(A_\varphi - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ soit encore :}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_1 - C_2 & C_2 & C_3 + C_2 \end{array}$$

$$\det(A_\varphi - \lambda \text{Id}) = \lambda(2-\lambda)[-(-\lambda)-1] \text{ d'où } \boxed{\det(A_\varphi - \lambda \text{Id}) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

Les valeurs propres de A_φ sont donc 0, 1 et 2.
~~Chaque sous-espace propre est de dimension 1.~~

3. $E_0 = \text{Ker}(A_\varphi) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ $E_1 = \text{Ker}(A_\varphi - \text{Id})$ est défini par : $\begin{cases} y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ soit $E_1 = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

$E_2 = \text{Ker}(A_\varphi - 2\text{Id})$ est défini par : $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ soit $E_2 = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

On en déduit une base (c_1, c_2, c_3) de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A_φ , en prenant par exemple

(en identifiant un vecteur et la matrice colonne de ses composantes) :

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Notons que la définition des c_i n'est pas précise, on ne sait pas qui est vecteur propre de qui...

Cependant pour les questions 4 et 5, ceci n'a pas d'importance. Il s'agit d'étudier la stabilité par φ d'un sous-espace-propre de dimension 1 et d'un sous-espace de dimension 2 engendré par 2 vecteurs propres de φ .

Soit $D_1 = \text{Vect}(c_1)$.

Soit $u \in D_1$ alors $\exists \alpha \in \mathbb{R} ; u = \alpha c_1$ de sorte que $\varphi(u) = \alpha \varphi(c_1) = \alpha \lambda_1 c_1 \in D_1$. D_1 est stable par φ .

5. Soit $P_1 = \text{Vect}(c_2, c_3)$

Soit $u \in P_1$ alors $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ; u = \alpha c_2 + \beta c_3$ de sorte que :

$$\varphi(u) = \alpha\varphi(c_2) + \beta\varphi(c_3) = \alpha\lambda_2 c_2 + \beta\lambda_3 c_3 \in P_1. \quad P_1 \text{ est stable par } \varphi.$$

Partie II.

Soient les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ de matrices relativement à la base canonique :

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A_f et A_g sont diagonalisables car elles sont symétriques réelles.

2. On montre que les endomorphismes f et g commutent en vérifiant que : $A_f A_g = A_g A_f$.

$$A_f A_g = A_g A_f = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or en effet :

3. On vérifie effectivement que 1 est valeur propre de f . En effet le système définissant $\text{Ker}(f - \text{Id})$ est :

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}. \text{ Ce système est de rang 2 et donc } \text{Ker}(f - \text{Id}) \text{ est de dimension 1.}$$

Les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1 sont de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$.

Pour vérifier que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de g , il suffit de vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'est.

$$A_g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or en effet, et les vecteurs précédents sont donc vecteurs propres de g associés à la valeur propre 1 aussi.

4. On vérifie également que -1 est valeur propre de f . En effet le système définissant $\text{Ker}(f + \text{Id})$ est :
- $$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} . \text{ Ce système est de rang 1 et donc } \text{Ker}(f + \text{Id}) \text{ est de dimension 2.}$$

Une base possible de $\text{Ker}(f + \text{Id})$ est par exemple : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que $\text{Ker}(f + \text{Id})$ est stable par g il suffit de prouver que les images par g des deux vecteurs précédents, sont des éléments de $\text{Ker}(f + \text{Id})$.

$$A_g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or en effet : ce qui prouve le résultat souhaité.

On montre en fait à cette occasion que les deux vecteurs précédents sont vecteurs propres de g associés respectivement aux valeurs propres 1 et 2 de g .

Rq : Il me semble qu'il eut été naturel de faire conclure à l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres communs à f et g , base relativement à laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Partie III.

Soit cette fois l'endomorphisme ϕ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Polynôme caractéristique de A_ϕ .

$$\det(A_\phi - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 + (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 3) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4$$

(développement suivant la dernière ligne).

On voit que 2 est racine, d'où : $\boxed{\det(A_\phi - \lambda \text{Id}) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 2\lambda - 2) = -(\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 + 1]}$.

Rq : la mise en facteur de $\lambda - 2$ pouvait se voir plus rapidement en remplaçant dans le déterminant la première colonne par la somme des trois colonnes

2. Le polynôme caractéristique n'étant pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A_ϕ n'est pas diagonalisable.

3. • Soit u un vecteur propre de ϕ , alors : $\begin{cases} u \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} ; \phi(u) = \lambda u \end{cases}$.
- Soit $v \in \text{Vect}(u)$, $\exists \alpha \in \mathbb{K} ; v = \alpha u$, de sorte que $\phi(v) = \alpha \phi(u) = \alpha \lambda u \in \text{Vect}(u)$, ce qui traduit que $\text{Vect}(u)$ est stable par ϕ .
- Réciproquement, soit une droite vectorielle $\text{Vect}(u)$ stable par ϕ . On a en particulier $\phi(u) \in \text{Vect}(u)$ soit $\exists \lambda \in \mathbb{K} ; \phi(u) = \lambda u$ ce qui traduit que u est vecteur propre de ϕ .

On en déduit qu'il existe une unique droite vectorielle stable par ϕ , c'est celle engendrée par un vecteur

propre associé à l'unique valeur propre 2 de ϕ .

Or $\text{Ker}(\phi - 2\text{Id})$ est défini par le système : $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ soit $\text{Ker}(\phi - 2\text{Id}) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

4. ϕ est bijectif car 0 n'est pas valeur propre de ϕ , de sorte que $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, soit ϕ est injective, donc bijective puisque l'on est en dimension finie.

5. Notons que dans les questions 5, 6, 7, beaucoup de parenthèses seraient les bien venues et que leur absence nuit beaucoup à la clarté de la lecture.

Ex : $\dim \phi(F)$ au lieu de $\dim(\phi(F))$, $\text{Ker} \psi \circ \phi$ au lieu de $\text{Ker}(\psi \circ \phi)$...

D'une manière générale, rappelons qu'un endomorphisme bijectif ϕ transforme une famille de vecteurs

libre en une famille libre, et par conséquent la base d'un sous-espace F en la base du sous-espace $\phi(F)$.

Ainsi, si F est un sous-espace de $\mathbb{K}^3$, on obtient bien le résultat souhaité : $\dim(\phi(F)) = \dim(F)$.
Démonstration peut-être attendue :

Soit $(u_1, \dots, u_r)$ une base de F . Alors, par définition $(\phi(u_1), \dots, \phi(u_r))$ est une famille génératrice de $\phi(F)$. Or cette famille est aussi une famille libre car la relation $\alpha_1 \phi(u_1) + \dots + \alpha_r \phi(u_r) = 0$ s'écrit $\phi(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r) = 0$ soit $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r \in \text{Ker}(\phi)$ soit encore : $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0$ ce qui implique $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$, puisque $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille libre.

6. • Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ tel que $\phi(F) = F$, alors F est bien stable par ϕ .
- Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ stable par ϕ , alors $\phi(F) \subset F$, mais on a vu

à la question précédente que $\dim(\phi(F)) = \dim(F)$ et par suite l'inclusion devient une égalité.

Conclusion : F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par $\phi \Leftrightarrow \phi(F) = F$

7. Notons une grosse faute de notation dans la définition de ψ . L'écriture $\psi(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ doit au minimum devenir $\psi((x, y, z)) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ ou peut-être mieux : $\psi(u) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ pour un

vecteur u dont la matrice colonne des composantes relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Là encore une rédaction à revoir, il ne s'agit pas de la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ψ n'est pas un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ mais de la matrice de ψ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}$.

La matrice attendue est : $M_\psi = (\alpha, \beta, \gamma)$.

(b) Par définition :

$$\phi^{-1}(H) = \{u \in \mathbb{R}^3 ; \phi(u) \in H\} = \{u \in \mathbb{R}^3 ; \psi(\phi(u)) = 0\} = \{u \in \mathbb{R}^3 ; (\psi \circ \phi)(u) = 0\} = \text{Ker}(\psi \circ \phi)$$

Conclusion : $\phi^{-1}(H) = \text{Ker}(\psi \circ \phi)$.

(c) D'après 6, H est stable par $\phi \Leftrightarrow \phi(H) = H$.

ϕ étant bijectif, la condition précédente peut s'écrire : H est stable par $\phi \Leftrightarrow \phi^{-1}(H) = H$.

Autrement dit, d'après (b) : $H \text{ est stable par } \phi \Leftrightarrow \text{Ker}(\psi \circ \phi) = \text{Ker}(\psi)$.

(d) $\text{Ker}(\psi) = H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Il admet une infinité de supplémentaires qui sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. (application du théorème de la base incomplète)

Ainsi on a bien : $\exists F ; \dim(F) = 1 \text{ et } \mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\psi) \oplus F$.

(e) Soient ψ_1 et ψ_2 deux formes linéaires non nulles sur F .

Soit $u_0 \in F$ tel que $F = \text{Vect}(u_0)$, en d'autres termes, u_0 est une base de F .

Soit $u \in F$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R} ; u = \alpha u_0$ et on a :

$$\begin{cases} \psi_1(u) = \alpha \psi_1(u_0) \\ \psi_2(u) = \alpha \psi_2(u_0) \end{cases} \text{ avec } \psi_1(u_0) \neq 0 \text{ et } \psi_2(u_0) \neq 0$$

$$\forall u \in F, \psi_1(u) = \frac{\psi_1(u_0)}{\psi_2(u_0)} \psi_2(u)$$

On en déduit que :

autrement dit :

$$\psi_1 = \lambda \psi_2 \text{ avec } \lambda = \frac{\psi_1(u_0)}{\psi_2(u_0)}.$$

Notons bien sûr que λ est bien indépendant du choix de u_0 . En effet si on prend à la place de u_0

$$\text{un élément } u_1 = \alpha u_0 \text{ avec } \alpha \neq 0, \text{ on aura : } \frac{\psi_1(u_1)}{\psi_2(u_1)} = \frac{\alpha \psi_1(u_0)}{\alpha \psi_2(u_0)} = \frac{\psi_1(u_0)}{\psi_2(u_0)}.$$

(f) A nouveau une maladresse de notation, ψ qui était précédemment une composante de vecteur devient dans cette question un vecteur... c'était aussi le cas au (c)

• Supposons qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\forall u \in \mathbb{R}^3, (\psi \circ \phi)(u) = \lambda \psi(u)$, autrement dit $\psi \circ \phi = \lambda \psi$.

Alors, soit $u \in H$, c'est à dire $u \in \text{Ker}(\psi)$. Montrons que $\phi(u) \in H$.

Or en effet, $\psi(\phi(u)) = (\psi \circ \phi)(u) = \lambda \psi(u) = 0$, ce qui prouve que $\phi(u) \in \text{Ker}(\psi)$ soit $\phi(u) \in H$. Conclusion : H est stable par ϕ .

Plus rapidement : l'hypothèse $\psi \circ \phi = \lambda \psi$ implique que $\text{Ker}(\psi \circ \phi) = \text{Ker}(\psi)$, ce qui, d'après (c) est équivalent à : H est stable par ϕ .

• Réciproquement, supposons que H est stable par ϕ .

Alors utilisons la somme directe $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\psi) \oplus F = H \oplus F$.

$\forall u \in \mathbb{R}^3, u = u_H + u_F$ avec $\psi(u_H) = 0$ et $\phi(u_H) \in H$, et on en déduit que :

$$\bullet \bullet \quad \forall u \in \mathbb{R}^3, (\psi \circ \phi)(u) = (\psi \circ \phi)(u_H) + (\psi \circ \phi)(u_F) = (\psi \circ \phi)(u_F) \text{ et } \psi(u) = \psi(u_F).$$

Or les restrictions $\psi \circ \phi$ et ψ de $\psi \circ \phi$ et ψ à F sont deux formes linéaires non nulles :

- évident pour ψ , sinon on aurait $\text{Ker}(\psi) = \mathbb{R}^3$ et ψ serait identiquement nulle.

- si $\psi \circ \phi$ était nulle sur F , $\psi \circ \phi$ serait nulle sur $\mathbb{R}^3$ et comme ϕ est bijectif, ψ serait identiquement nulle, et on arrive là aussi à une contradiction.

Mais alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi \circ \phi = \lambda \psi$ et on peut écrire :

$$(\psi \circ \phi)(u_F) = (\psi \circ \phi)(u_F) = \lambda \psi(u_F) \text{ et } \psi(u_F) = \psi(u_F) \text{ de sorte que d'après } \bullet \bullet :$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, (\psi \circ \phi)(u) = \lambda \psi(u) \text{ cqfd.}$$

(g) On a donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} ; \psi \circ \phi = \lambda \psi$ ce qui se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma & \alpha + 2\beta & \beta + \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{ce que l'on peut écrire sous la forme suivante : } \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma \\ \alpha + 2\beta \\ \beta + \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ soit } {}^t A_\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ce qui traduit que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^t A_\phi$.
Plus rapidement, on pouvait aussi écrire :

$$(\alpha \quad \beta \quad \gamma) A_\phi = \lambda (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \text{ et en transposant : } {}^t A_\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Conclusion : H est stable par $\phi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^t A_\phi$.

(h) Les valeurs propres de ${}^t A_\phi$ sont les mêmes que celles de A_ϕ , donc ${}^t A_\phi$ n'a que 2 comme valeur propre. Le sous-espace propre de ${}^t A_\phi$ associé à 2 est défini par : $\begin{cases} -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ ce qui fait que :

Le seul plan vectoriel stable par ϕ est le plan d'équation : $y + z = 0$.

Partie IV.

Un espace euclidien est par définition un espace de dimension finie, un espace euclidien de dimension finie est donc un pléonasme.

1. Soit donc un espace euclidien E de dimension supérieure ou égale à 2.

Soit a un élément de E de norme 1 et α un réel tel que $\alpha \neq 0$.

Enfin soit l'application f_α définie sur E par : $\forall x \in E, f_\alpha(x) = x + \alpha \langle x/a \rangle a$.

Il est clair que f_α va bien de E dans E .

On peut justifier la linéarité de manière habituelle en calculant $f_\alpha(\lambda x + \mu y)$ et en utilisant le caractère bilinéaire du produit scalaire, mais il me semble plus judicieux de dire plus rapidement que

$f_\alpha = \text{Id} + \alpha p_a$ où p_a est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(a)$ et donc f_α est la somme de deux endomorphismes de E , donc est un endomorphisme de E .

2. • Première méthode lourde !

$$\forall x \in E, (f_\alpha \circ f_\beta)(x) = f_\alpha(x + \beta \langle x/a \rangle a) = x + \beta \langle x/a \rangle a + \alpha \langle (x + \beta \langle x/a \rangle a)/a \rangle a \text{ soit :}$$

$$\forall x \in E, (f_\alpha \circ f_\beta)(x) = x + \beta \langle x/a \rangle a + \alpha \langle x/a \rangle a + \alpha \beta \langle x/a \rangle \langle a/a \rangle a = x + (\alpha + \beta + \alpha \beta) \langle x/a \rangle a$$

Soit finalement $\forall x \in E, (f_\alpha \circ f_\beta)(x) = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}(x)$ expression symétrique en α, β d'où le résultat cherché : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}, f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.

• Deuxième méthode.

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^{*2}$, $f_\alpha \circ f_\beta = (\text{Id} + \alpha p_a) \circ (\text{Id} + \beta p_a) = \text{Id} + (\alpha + \beta) p_a + \alpha\beta (p_a \circ p_a)$, mais p_a est un projecteur, donc $p_a \circ p_a = p_a$ et par suite :
 $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^{*2}$, $f_\alpha \circ f_\beta = \text{Id} + (\alpha + \beta + \alpha\beta) p_a = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$. Ce qui prouve le résultat demandé.

3. $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x / f_\alpha(y) \rangle = \langle x / (y + \alpha \langle y / a \rangle a) \rangle = \langle x / y \rangle + \alpha \langle y / a \rangle \langle x / a \rangle$.

Par ailleurs $\langle f_\alpha(x) / y \rangle = \langle y / f_\alpha(x) \rangle$ d'après le caractère symétrique du produit scalaire, et en appliquant le calcul précédent, on a : $\langle f_\alpha(x) / y \rangle = \langle y / x \rangle + \alpha \langle x / a \rangle \langle y / a \rangle$ d'où l'égalité demandée :

$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x / f_\alpha(y) \rangle = \langle f_\alpha(x) / y \rangle$ ce qui traduit que f_α est un endomorphisme symétrique de E .

4. a est vecteur propre de f_α .

En effet, $f_\alpha(a) = a + \alpha \langle a / a \rangle a = (1 + \alpha)a$ ce qui traduit que a est vecteur propre de f_α associé à la valeur propre $1 + \alpha$ puisque $a \neq 0$.

5. Montrons que 1 est valeur propre de f_α .

On cherche donc l'existence d'un $x \neq 0$ tel que $f_\alpha(x) = x$ soit $\alpha \langle x / a \rangle a = 0$ ce qui est vérifié par tous

les vecteurs non nuls de l'orthogonal de $\text{Vect}(a)$ sous-espace vectoriel de E de dimension au moins 1 (cf $\dim(E) \geq 2$).

Conclusion : 1 est valeur propre de f_α et le sous-espace propre associé est $(\text{Vect}(a))^\perp$.

L'endomorphisme f_α est diagonalisable parce qu'il est symétrique, ou bien, avec les deux résultats précédents parce que E est la somme directe des deux sous-espaces propres de f_α associés aux deux valeurs propres $1 + \alpha$ et 1.

6. f_α est inversible si 0 n'est pas valeur propre, soit si $\alpha \neq -1$.

Dans ce cas, la relation $f_\alpha \circ f_\beta = \text{Id} + (\alpha + \beta + \alpha\beta) p_a$ nous permet de dire que $f_\alpha \circ f_\beta = \text{Id}$ si et

seulement si $\alpha + \beta + \alpha\beta = 0$ soit pour $\beta = \frac{-\alpha}{1 + \alpha}$.

Ainsi on peut dire que si $\alpha \neq -1$, f_α est inversible et que $f_\alpha^{-1} = f_{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$.

7. f_α est une isométrie si $\forall x \in E, \|f_\alpha(x)\| = \|x\|$ soit $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2$ c'est à dire si :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \|x\|^2 + \alpha^2 \langle x/a \rangle^2 + 2\alpha \langle x/a \rangle^2 \text{ soit } \alpha(\alpha+2) \langle x/a \rangle^2 = 0.$$

En particulier pour $x = a$ on doit avoir $\alpha(\alpha+2) = 0$ et comme $\alpha \neq 0$, on doit avoir $\alpha = -2$.

La condition nécessaire $\alpha = -2$ est une condition suffisante, remplacer α par -2 dans la relation

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \|x\|^2 + \alpha^2 \langle x/a \rangle^2 + 2\alpha \langle x/a \rangle^2.$$

Dans le cas $\alpha = -2$, f_{-2} est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{Vect}(a))^\perp$

Une autre solution peut être :

On sait que les seules valeurs propres possibles d'une isométrie sont 1 et -1 .

Comme les valeurs propres de f_α sont $1+\alpha$ et 1 et que $1+\alpha \neq 1$, une condition nécessaire pour que f_α soit une isométrie est que $1+\alpha = -1$ soit $\alpha = -2$.

Or on reconnaît en f_{-2} la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{Vect}(a))^\perp$, ce qui fait que f_{-2} est effectivement une isométrie.

8. Soit F un sous-espace de E stable par f_α .

Soit $x \in F^\perp$, montrons que $f_\alpha(x) \in F^\perp$.

Pour cela, soit $y \in F$, on doit montrer que $\langle f_\alpha(x)/y \rangle = 0$.

Or en effet, d'après 3, $\langle f_\alpha(x)/y \rangle = \langle x/f_\alpha(y) \rangle = 0$ car $f_\alpha(y) \in F$ et $x \in F^\perp$.

Fin