

Лекція 11

Так як $\delta(t-kT)$ всюди, крім точок kT , дорівнює нулю, то можна в (5.13) замінити константи $s(kT)$ на початковий безперервний сигнал $s(t)$, тобто

$$s_{\delta}(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \quad (5.14)$$

це математична модель нашого дискретизованого сигналу $s_{\delta}(t)$. Знайдемо його спектр $S_{\delta}(\omega)$.

Позначимо $y(t)$ послідовність δ -функцій, це періодичний сигнал, який можна розкласти в ряд Фур'є. Коефіцієнти цього ряду розраховуються наступним чином:

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t-kT) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t-0 \cdot T) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^0 = \frac{1}{T}, \quad (5.15)$$

тому, що в інтервал $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ попадає тільки одна δ -функція, яка відповідає $k=0$.

Таким чином, періодична послідовність δ -функцій може бути представленою у вигляді ряду Фур'є:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+j\omega_n t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{+j\omega_n t},$$

де $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$.

Підставимо (4) у (2), отримаємо

$$s_{\delta}(t) = \frac{s(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{+j\omega_n t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) e^{+j\omega_n t}.$$

Тепер знайдемо ППФ від $s(t)$, тобто знайдемо спектр дискретизованого сигналу:

$$S_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\delta}(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} e^{+j\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j(\omega-\omega_n)t} dt, \quad (5.16)$$

у (5) під інтегралом стоїть ППФ від $s(t)$ на частоті $(\omega-\omega_n)$, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j(\omega - \omega_n)t} dt = S(\omega - \omega_n)$$

Врахуємо, що $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, запишемо

$$S_\delta(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \quad (5.17)$$

Таким чином, спектр дискретизованого сигналу являє собою нескінченний ряд копій спектру початкового сигналу $s(t)$, які зрушені відносно один одного (кажуть, що спектр «розмножується», рис. 5.9). Відстань по частоті

між сусідніми копіями спектру дорівнює частоті дискретизації $\omega_\delta = \frac{2\pi}{T}$.

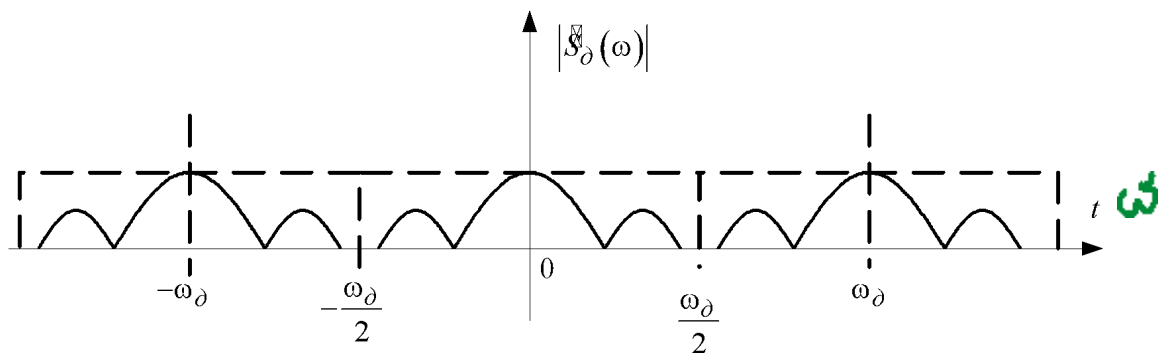


Рисунок 5.9 – Спектр дискретизованого сигналу

Так як в (5.13) міститься множник $\frac{1}{T}$, а функція $\delta(t)$ має розмірність частоти, то спектр дискретизованого сигналу має розмірність таку ж, як сам сигнал.

Характер спектру дискретизованого сигналу демонструє частотно-часову дуальність перетворення Фур'є:

- періодичний сигнал має дискретний (лінійчатий) спектр;
- періодичний спектр відповідає дискретному сигналу.

Для відновлення безперервного сигналу за дискретними відліками необхідно пропустити дискретний сигнал через ідеальний ФНЧ з частотою

зрізу $\frac{\omega_\delta}{2}$.

Точне відновлення можливо, якщо зміщені копії не перекриваються, тобто частота дискретизації повинна задовольняти нерівності

$$\omega_\delta > 2\omega_s \quad (5.18)$$

Це та ж сама умова, що лежить в основі теореми Котельникова

$$T < \frac{1}{2f_s} = \frac{\pi}{\omega_s}$$

Якщо умова (5.18) не виконується, то зміщені копії спектру будуть накладатися один на одне, що призведе до неминучих спотворень при відновленні безперервного сигналу (рис. 5.10). Ці спотворення викликані двома причинами:

- 1) не будуть відновлені спектральні компоненти сигналу з частотами, більшими за $\frac{\omega_\delta}{2}$;
- 2) у смузі пропускання ФНЧ попадуть «хвости» сусідніх зміщених копій, тобто в смузі до $\frac{\omega_\delta}{2}$ теж будуть спотворення.

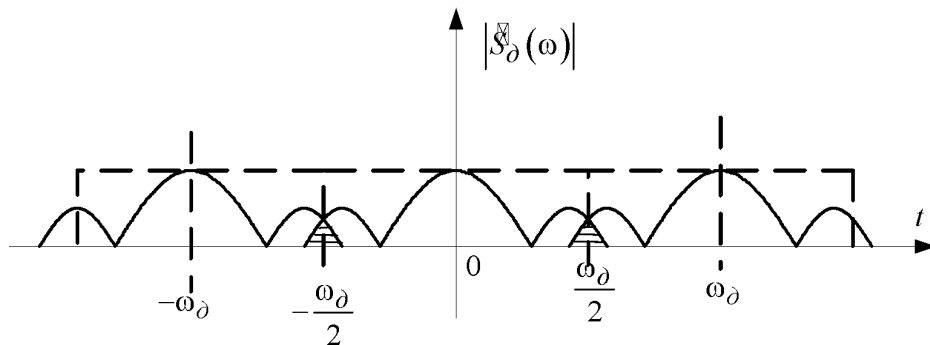


Рисунок 5.10 – Спотворення при відновленні

Якщо сигнал, який має бути продискретизовано, може містити спектральні компоненти з частотами більшими за $\frac{\omega_\delta}{2}$, то корисно попередньо пропустити його через ФНЧ з частотою зрізу $\frac{\omega_\delta}{2}$. При цьому спотворення, зв'язані з першою причиною, залишаться (позбутися них можна лише шляхом підвищення частоти дискретизації). Але завдяки відсутності накладання «хвостів» сигнал в діапазоні частот від 0 до $\frac{\omega_\delta}{2}$ буде відновлено без спотворень.

5.8 Спектр сигналу при довільній формі дискретизуючих імпульсів

Запишемо вираз (5.1) в більш загальній формі, використовуючи замість дельта-функцій імпульси $s_0(t)$ довільної форми:

$$s_\delta(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$s_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) s_0(t - kT) \quad (5.19)$$

Цей сигнал можна розглядати як результат проходження послідовності дельта-функцій через лінійне стаціонарне коло з імпульсною характеристикою $s_0(t)$. Дійсно, при цьому кожна з дельта-функцій породжуватиме на виході кола сигнал $s_0(t)$ з відповідною часовою затримкою та амплітудним множником, так, що в результаті ми отримаємо саме формулу (5.19).

Тобто спектр сигналу (5.19) буде відрізнятися додатковим множником – спектром імпульсу $s_0(t)$:

$$S_0(\omega) = \frac{S_0(\omega)}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right) \quad (5.20)$$

Отож, відмінність форми дискретизуючих імпульсів від дельта-функцій викликає мультиплікативні спотворення спектру дискретного сигналу.

Розглянемо випадок, коли $s_0(t)$ – прямокутний імпульс з одиничною амплітудою та тривалістю, що дорівнює періоду дискретизації. Дискретний сигнал набуває ступінчатої форми, що є характерним для сигналу на виході цифро-аналогового перетворювача перед множником $s_0(t)$ наступного вигляду

$$S_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(t) e^{-j\omega t} dt = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T/2} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

тобто в (5.20) буде множення ще й на цю функцію. Кращий варіант для запобігання мультиплікативного спотворення – дискретизація дельта-функціями.

Спад амплітудного спектру на частоті $\frac{\pi}{T}$, що дорівнює $\frac{\omega_0}{2}$, складає:

$$\frac{\left| S_0\left(\frac{\pi}{T}\right) \right|}{\left| S_0(0) \right|} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637 = -3,7 \text{ дБ.}$$

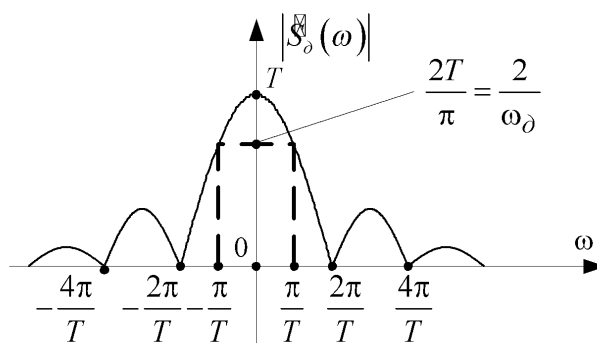


Рисунок 5.11 – Спектр прямокутного імпульсу

Таким чином, ЦАП сам по собі є фільтром НЧ, але з малим ступенем придушення зміщених копій спектру.

5.9 Дискретне перетворення Фур'є

Раніше ми показали, що спектральна щільність дискретного сигналу є

періодичним з періодом $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Але сам спектр є безперервним. Для цифрової обробки спектр має бути дискретним, тобто $S_\delta(\omega)$ необхідно продискретизувати, представити сукупністю своїх значень $S_\delta(n\Delta\omega)$ на дискретних частотах $\omega = n\Delta\omega$. Такий спектр ми можемо отримати із суцільного $S_\delta(\omega)$ шляхом періодичного повторення нашої дискретної послідовності $\{s(kT)\}$ з періодом $T_c = NT$. Інтервал між спектральними

лініями при цьому $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{2\pi}{NT}$.

Використаємо запис перетворення Фур'є (Гоноровський, ф-ла (2.124))

$$S_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_\delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

Для дискретного сигналу

$$s_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT)$$

перетворення Фур'є має вигляд

$$S_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) e^{-j\omega kT}$$

З урахуванням дискретної частоти $n\Delta\omega, \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{2\pi}{NT}$, запишемо

$$S_\delta(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT) e^{-j\Delta\omega n k T} = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT) e^{-j\frac{2\pi}{N} n k} \quad (5.21)$$

де N – парне число, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{N}{2}$, $-j\Delta\omega n k T = -j\frac{2\pi}{NT} n k T = -j\frac{2\pi}{N} n k$.

Формула (5.21) це **дискретне перетворення Фур'є (ДПФ)**.

Аргументи $n\Delta\omega$ та kT зазвичай просто записують як n та k , тобто можна записати

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (5.22)$$

Формулу (5.22) можна розглядати як алгоритм обчислення спектральних коефіцієнтів $\{S(n)\}$ за заданими часовими відліками $\{s(k)\}$.