

CORRIGE CCP PC 2 2013

Corrigé proposé par Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr) , relu par Nicole ADLOFF (nicole.adloff0212@orange.fr) . Merci de nous faire part de vos remarques et commentaires !

Ce corrigé est d'utilisation libre, à condition de citer la source ; il peut en particulier être distribué à vos élèves dès septembre 2013.

Problème A : Thermique dans un réacteur à eau pressurisée :

$$\overline{\phi}_V = \frac{P_{th}}{N.\pi.r_c^2.H} = \frac{P_e}{\eta.N.\pi.r_c^2.H} = 365 \text{ W.cm}^{-3}$$

A.1.1.

A.1.2. Difficile de répondre, mais on attend sûrement :

$$\overline{\phi}_S = \frac{P_{th}}{N.2\pi.r_c.H} = \frac{P_e}{\eta.N.2\pi.r_c.H} = 73 \text{ W.cm}^{-2}$$

Cela n'est vrai qu'en régime stationnaire.

$$A.1.3. N_f = P_{th}.\Delta t / E_f = 4,2.10^{27} \text{ désintégrations.an}^{-1}.$$

$$A.2.1. dU = \rho.c.S.dx.dT,$$

$$dT \text{ étant la variation de température à } x \text{ fixé, soit } dT = \frac{\partial T}{\partial t}.dt$$

A.2.2. Le premier principe s'écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta W &= 0 \text{ (phase condensée)} \\ \delta Q &= \phi_S(x,t).S.dt - \phi_S(x+dx,t).S.dt \end{aligned}$$

A.2.3. On ajoute alors aux termes précédents :

$$\delta Q' = \phi_V(x,t).S.dx.dt.$$

A.2.4. Le premier principe donne :

$$\rho.c.dT = \left(-\frac{\partial \phi_S}{\partial x} + \phi_V \right).dt$$

A.2.5. La loi de Fourier s'écrit en toute généralité :

$$\vec{j}_Q = -\lambda.\overrightarrow{\text{grad}T}$$

, avec ici $\vec{j}_Q = \phi_S.\vec{u}_x$, on a donc :

$$\phi_S = -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x}$$

A.2.6.

$$\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \phi_V$$

A.3.1. En régime stationnaire (plutôt que permanent), T est indépendant de t.
L'invariance par rotation permet de conclure que T est indépendant de θ .
Enfin, la conduction étant radiale, T est indépendant de z.

Ainsi, $T = T(r)$, et l'équation de la chaleur s'écrit à z donné :

$$0 = \lambda_c \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \bar{\phi}_V$$

A.3.2. on en déduit par intégration :

$$T(r) = T_0 - \frac{\bar{\phi}_V}{4\lambda_c} \cdot r^2 \quad \text{et} \quad \Delta T_{comb} = \frac{\bar{\phi}_V}{4\lambda_c} \cdot r_c^2 = 400K.$$

A.3.3.1. Dans la gaine $\phi_v = 0$, l'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$0 = \lambda_c \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

On en déduit par intégration :

$$T(r) = \frac{T_p \ln(r/r_c) - T_g \ln(r/r_g)}{\ln(r_g/r_c)}$$

A.3.3.2. En régime stationnaire, la puissance produite dans le combustible est intégralement évacuée, soit :

$$\begin{aligned} \phi_v(z) \cdot \pi \cdot r_c^2 \cdot H &= \phi_s(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H \\ \Leftrightarrow \bar{\phi}_V \cdot r_c^2 &= \phi_S(r) \cdot 2 \cdot r \end{aligned}$$

Dans la gaine, la loi de Fourier s'écrit, en projection sur $\vec{u}_r$:

$$\phi_S(r) = -\lambda_g \frac{\partial T}{\partial r}$$

On déduit des deux équations précédentes :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\bar{\phi}_V}{\lambda_g} \cdot \frac{r_c^2}{2r}$$

La solution est :

$$T(r) = T_g - \frac{\bar{\phi}_V}{\lambda_g} \cdot \frac{r_c^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_c}\right)$$

On en déduit :

$$\Delta T_{gaine} = T_g - T_p = \frac{\bar{\phi}_V}{\lambda_g} \cdot \frac{r_c^2}{2} \ln\left(\frac{r_g}{r_c}\right) = 28,0 \text{ K.}$$

3.4. D'après la question 332 :

$$\phi_S(r_c) = \frac{1}{2} \bar{\phi}_V \cdot r_c$$

On en déduit :

$$\Delta T_{contact} = T_c - T_g = \frac{1}{2} \bar{\phi}_V \cdot r_c \cdot R_{th} = 73,0 \text{ K.}$$

$$\Delta T_{conv} = T_p - T_f = \frac{\bar{\phi}_S(r_g)}{\alpha} = -\frac{\lambda_g}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{gaine} = \frac{\bar{\phi}_V \cdot r_c^2}{2 \cdot \alpha \cdot r_g} = 20 \text{ K.}$$

3.5.

3.6.

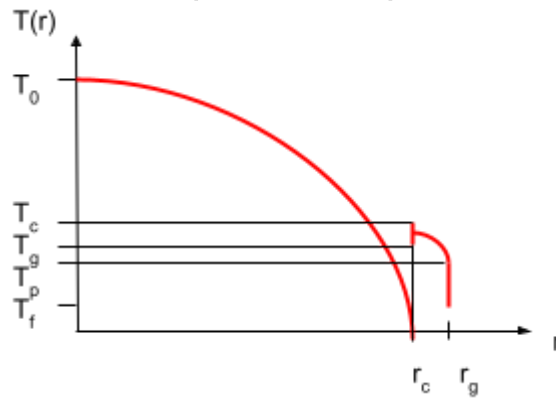
$$\Delta T_{\text{crayon}} = \Delta T_{\text{comb}} + \Delta T_{\text{contact}} + \Delta T_{\text{gaine}} + \Delta T_{\text{conv}}$$

$$= 400 + 73 + 28 + 20 = 521 \text{ K.}$$

Tous les écarts de température calculés précédemment sont proportionnels à ϕ_v , donc ΔT_{crayon} également. On calcule :

$$A = \frac{r_c^2}{4\lambda_c} + \frac{R_{th} \cdot r_c}{2} + \frac{r_c^2}{2\lambda_g} \ln\left(\frac{r_g}{r_c}\right) + \frac{r_c^2}{2\alpha r_g} = 1,43 \text{ K.W}^{-1}.\text{cm}^3$$

3.7.



4.1. La puissance échangée à travers 4 quarts de crayon est égale à la puissance fournie par un crayon, donc :

$$\phi_L(z) = \phi_V(z) \cdot \pi \cdot r_c^2$$

4.2.

$$\delta Q = \phi_L(z) \cdot dt \cdot dz$$

4.3.

$$\delta Q = dH = dh \cdot \rho dV = dh \cdot \rho \cdot S_p \cdot dz$$

On en déduit :

$$dh = \frac{\phi_L(z) \cdot dt}{\rho \cdot S_p}$$

4.4. La hauteur élémentaire d'échange est pendant dt : $dz = v \cdot dt$.

On déduit de l'équation du 4.3 :

$$c_p \cdot v \cdot \frac{dT_f(z)}{dz} = \frac{\phi_L(z)}{\rho \cdot S_p}$$

4.5. On déduit de 4.1. et 4.4. :

$$\frac{dT_f(z)}{dz} = \frac{\phi_L(z)}{\rho \cdot S_p \cdot c_p \cdot v} = \frac{\pi^2 \cdot \bar{\phi}_V \cdot r_c^2}{2 \cdot D_m \cdot c_p} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

D'où :

$$T_f(z) = \frac{\pi \cdot H \cdot \bar{\phi}_V \cdot r_c^2}{2 \cdot D_m \cdot c_p} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + B$$

$$C = \frac{\pi \cdot H \cdot \bar{\phi}_V \cdot r_c^2}{2 \cdot D_m \cdot c_p} = 24 \text{ K}$$

La condition $T_f(-H/2) = T_{fe}$ permet de calculer :

$$B = \frac{\pi \cdot H \cdot \bar{\phi}_V \cdot r_c^2}{2 \cdot D_m \cdot c_p} + T_{fe} = C + T_{fe}$$

4.6. D'après la question 3.6. :

$$T_0(z) = T_f(z) + A \cdot \phi_V(z) = A \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \bar{\phi}_V \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + B + C \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

4.7. La condition $\frac{dT_0(z)}{dz} = 0$ donne :

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi z_{\max}}{H}\right) &= \frac{2 \cdot C}{\pi \cdot A \bar{\phi}_V} \\ \Leftrightarrow z_{\max} &= \frac{H}{\pi} \arctan\left(\frac{2 \cdot C}{\pi A \bar{\phi}_V}\right) \\ z_{\max} &= \frac{4,3}{\pi} \arctan\left(\frac{2 \cdot 24}{\pi \cdot 1,43 \cdot 10^{-6} \cdot 365 \cdot 10^6}\right) = 0,04m \ll H \end{aligned}$$

Cela paraît logique.

On calcule : $T_0(z_{\max}) = 1134^\circ\text{C}$.

On peut effectivement trouver de telles températures dans un barreau d'oxyde d'uranium.

Problème B : Convertisseur tension-fréquence :

B.1.1. Si $V^+ > V^-$ alors $V_s = +V_{cc}$

B.1.2.

B.1.2.1. Si $V_s = +V_{cc}$,

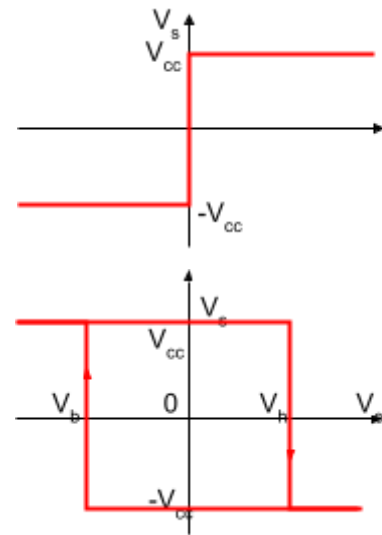
$$V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{cc} > V^- = V_e.$$
 Si $V^+ < V^-$ alors $V_s = -V_{cc}$

Si $V_s = -V_{cc}$,

$$V^+ = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{cc} < V^- = V_e.$$

On pose

$$V_h = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{cc} = -V_b$$



B.1.3.1. Soit i_D le courant circulant dans la diode dans le sens anode $\rightarrow$ cathode (sens direct de la diode), et donc également dans la résistance R.

Supposons la diode bloquée, alors $i_D = 0$; on aurait alors $V_{diode} = V_c = V_A = V_{cc} > 0$.

C'est impossible, donc la diode est passante.

Je ne vois pas pourquoi un schéma équivalent serait plus éclairant.

B. 1.3.2. V_c est la tension aux bornes de la diode, donc :

$$V_c = 0.$$

Le condensateur C' est équivalent à un circuit ouvert en régime continu ; on reconnaît alors un diviseur de tension idéal :

$$V_c' = V^+ = V_h.$$

B.1.3.3.1. La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps, donc elles gardent donc les mêmes valeurs qu'à la question précédente :

$$V_c(0^+) = 0 ; V_c'(0^+) = V_h$$

B.1.3.3.2. On veut avoir :

$$V_A(0^+) = -V_{cc} \Leftrightarrow V^+(0^+) < V^-(0^+).$$

Or :

$$\begin{aligned} V^+(0^+) &= V_e(0^+) + V_c'(0^+) = E + V_h \\ V^-(0^+) &= V_c(0^+) = 0 \end{aligned}$$

On doit donc avoir :

$$E < -V_h.$$

B.1.3.3.3. La diode étant bloquée, on a :

$$V_A = -V_{cc} = V_c + R \cdot i(t) = V_c + RC \cdot dV_c/dt$$

On en déduit, avec la condition initiale :

$$V_c(0^+) = 0,$$

$$V_c(t) = -V_{cc} (1 - \exp(-t/\tau)) \text{ avec } \tau = RC.$$

1.3.3.4. La tension aux bornes de diode est V_c ; elle reste négative à tout instant, donc la diode est bloquée.

1.3.3.5. On peut se placer en régime permanent sinusoïdal pour utiliser le théorème de Millman :

$$V_M = V_c' + E = \frac{jC\omega E + \frac{V_A}{R_2}}{jC\omega + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{jC\omega E - \frac{V_{cc}}{R_2}}{jC\omega + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$V_c'(t) + \tau' \cdot \frac{dV_c'(t)}{dt} = -V_h - E$$

La solution, avec la condition initiale :

$$V_c'(0^+) = V_h,$$

$$V_c'(t) = -V_h - E + (E + 2V_h) \exp(-t/\tau')$$

$$1.3.3.6. \quad V^+(t) = E + V_c'(t) = -V_h + (E + 2V_h) \exp(-t/\tau').$$

$$1.3.3.7. \quad V_{-\infty} = V_{c\infty} = -V_{cc} < 0 ; V_{+\infty} = -V_h = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{cc}$$

donc :

$$V_{+\infty} - V_{-\infty} = V_{+\infty} - V_{c\infty} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{cc} + V_{cc} = V_{cc} \frac{R_2}{R_1 + R_2} > 0,$$

qui correspond à un état haut de la sortie ; la sortie va donc rebasculer de $-V_{cc}$ à $+V_{cc}$.

$$1.3.3.8.a. \quad \text{On suppose que la vitesse de charge de } V_c'(t) \text{ est } \frac{dV_c'(t)}{dt}.$$

$$\text{On a donc : } \frac{dV_c(t)}{dt} = -\frac{V_{cc}}{\tau} ; \quad \frac{dV_c'(t)}{dt} = -\frac{E + 2V_h}{\tau'} , \text{ d'où : } \left| \frac{dV_c(t)}{dt} \right| \ll \left| \frac{dV_c'(t)}{dt} \right|$$

$V_c'(t)$ varie beaucoup plus rapidement que $V_c(t)$.

1.3.3.8.b. On va donc considérer que $V_c'(t)$ atteint très rapidement sa valeur limite, soit :

$$V_c'(t) \cong V_c'(\infty) = -E - V_h.$$

On a alors :

$$\varepsilon(t) = V_+(t) - V_-(t) = V_+(t) - V_c(t) = E + V_c'(t) - V_c(t) = -V_h + V_{cc} (1 - \exp(-t/\tau))$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(t) = V_{cc} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - e^{-t/\tau} \right)$$

1.3.3.8.c. $\varepsilon(t)$ s'annule pour :

$$t = RC \cdot \ln(1 + R_1/R_2).$$

B.2.1. On suppose que l'AO fonctionne en régime linéaire :

$$V_B = -V_A \cdot R_4/R_3.$$

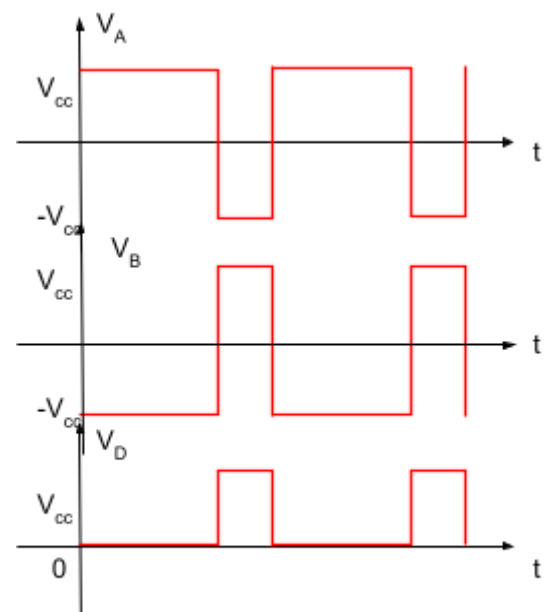
B.2.2. $V_B = -V_A$.

Lorsque $V_B > 0$, la diode D' est bloquée et $V_D = V_B > 0$

Lorsque $V_B < 0$, la diode D' est passante et $V_D = 0$.

B.2.3.

$$\langle V_D \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V_D(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{T-\tau}^T V_{cc} \cdot dt = V_{cc} \cdot \frac{\tau}{T} = V_{cc} \cdot \tau \cdot f$$



B.2.4. La valeur moyenne de $V_D(t)$ est sa composante continue, donc sa composante de pulsation nulle. Si l'on veut éliminer toutes les fréquences supérieures, on doit réaliser un filtrage passe-bas.

On aura alors :

$$k = V_{cc} \cdot \tau.$$

La fréquence de coupure du filtre utilisé doit être inférieure à la fréquence fondamentale f .

B.3.1. Là encore l'AO fonctionne en régime linéaire :

$$V_- = V_s.$$

On nomme A le nœud entre les résistances R_5 et R_6 .

Le théorème de Millmann appliqué à l'entrée non-inverseuse s'écrit :

$$V_+ = \frac{V_A / R_6}{jC_6\omega + 1/R_6} \Leftrightarrow V_A = V_s (1 + jR_6C_6\omega)$$

Le théorème de Millmann appliqué en A s'écrit :

$$V_A = \frac{jC_5\omega V_s + V_D / R_5 + V_s / R_6}{jC_5\omega + 1/R_5 + 1/R_6}$$

B.3.2. Après calculs, on obtient bien la forme proposée avec :

$$H_0 = 1 ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_5 R_6 C_5 C_6}} ; \quad Q = \frac{\sqrt{R_5 R_6 C_5 C_6}}{(R_5 + R_6) C_6}.$$

B.3.3. Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre. En effet :

- pour $\omega \ll \omega_0$: $H \cong H_0$;
- pour $\omega \gg \omega_0$: $H \cong 0$.

B.3.4. On calcule :

$$\frac{1}{|H(j\omega)|} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

On doit donc réaliser :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

B.3.5. On alors :

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\sqrt{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

$$\varphi(j\omega) = \text{Arg}(H) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}\omega}{\omega_0}}\right).$$