

Concours commun ENS Cachan-Polytechnique PSI 2004

Épreuve de sciences physiques

I) Étude d'un congélateur

A) Évaluation simple de l'efficacité

1°) Si l'épaisseur de la paroi est faible, son volume est approximativement égal au produit de son épaisseur e par son aire A .

$$A = 2(HL + PL + PH) \quad e \approx \frac{HLP - V_{\text{utile}}}{2(HL + PL + HP)} = 6,2 \text{ cm}$$

2°) L'unité SI de λ est $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Les bons conducteurs (métaux par exemple) ont une conductivité de l'ordre de 10^2 SI. Les solides peu conducteurs ont une conductivité de l'ordre de 1 SI. Les gaz ou les bons isolants ont des conductivités inférieures à 0,1 SI. Les parois du congélateur sont donc bien isolantes (sinon le fabricant aurait du mal à écouler sa marchandise !).

3°) La puissance thermique perdue en régime permanent

$$P_{\text{fuite}} \text{ vérifie (résistance thermique)} \quad T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} = \frac{e}{\lambda A} P_{\text{fuite}}.$$

Avec la valeur de e du 1°) on trouve

$$P_{\text{fuite}} = 94,2 \text{ W}$$

$$4°) \quad \langle P_{\text{elec}} \rangle = \frac{\text{consommation}}{\text{durée}} = 29,2 \text{ W}$$

5°) En régime permanent, P_{fuite} correspond à ce qui est échangé entre la machine thermique et la source froide (intérieur du congélateur) donc l'efficacité est :

$$\eta = \frac{P_{\text{fuite}}}{\langle P_{\text{elec}} \rangle} = 3,2$$

B) Modélisation du cycle

6°) Le premier principe appliqué à la masse unité conduit à $\Delta U = w + q$. Comme $h = U + Pu$, on en déduit que $\Delta h = w' + q$ avec

$$w' = w + (Pu)_{\text{final}} - (Pu)_{\text{initial}}$$

$$7°) \quad w'_{12} - w_{12} = P_2 u_2 - P_1 u_1.$$

On raisonne sur un système fermé qui est formé :

- à la date t par le fluide dans le compresseur et la masse unité qui va y entrer entre t et $t+\delta t$
- à la date $t+\delta t$ par le fluide dans le compresseur et la masse (unité également) sortie entre t et $t+\delta t$

Soit δW_c le travail fourni par le compresseur. Le travail total reçu par le système qui tient compte du travail de

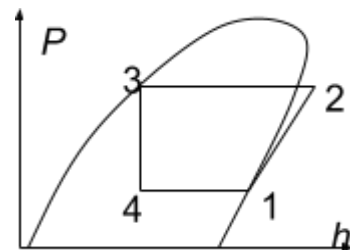
refoulement aux pressions P_1 et P_2 est $\delta W_c + P_1 u_1 - P_2 u_2$. En appliquant le premier principe au système étudié et en utilisant le fait que la partie du système dans le compresseur garde la même énergie interne, on montre alors que $h_2 - h_1 = \delta W_c + q$. Par identification avec le résultat de 6°) $\delta W_c = w'_{12}$.

w'_{12} est donc le travail fourni par le compresseur lui-même durant le passage d'une masse unité. Pour une détente de Joule-Kelvin, le compresseur est remplacé par un dispositif sans pièces mobiles (donc qui ne fournit pas de travail w') et isolé thermiquement (donc $q = 0$). La détente s'effectue alors à enthalpie massique constante (on a négligé les termes d'énergie cinétique).

8°) Sur un cycle, le produit Pu reprend sa valeur initiale donc $w'_{\text{cycle}} = w_{\text{cycle}}$.

9°) Le passage dans la vanne est une détente de Joule-Kelvin donc isenthalpique pour l'unité de masse.

10°) La variance d'un corps pur diphasé est (règle de



Gibbs) $2+1-2=1$. Pression et température sont donc liées. Fixer T est équivalent à fixer P . Les isothermes sont confondues avec les isobares dans la zone liquide-vapeur.

11°) Le point 1 est le point de l'isotherme -30°C situé sur la courbe de vapeur saturée. Le point 2 est sur la

même isentropique que 1 (compression 1-2 adiabatique réversible) et à la pression 0,8 MPa. Le point 3 est le point de l'isobare 0,8 MPa situé sur la courbe du liquide saturé. Le point 4 est sur l'isotherme -30°C et à la verticale de 3 (détente 3-4 isenthalpique)

	1	2	3	4
P (MPa)	0.084	0,8	0,8	0.084
$\theta(^{\circ}\text{C})$	-30	41	31	-30
h (kJ.kg $^{-1}$)	380	427	244	244
s (kJ.kg $^{-1}$.K $^{-1}$)	1,76	1,76	1,15	1,19

12°) Pour une transformation adiabatique irréversible, l'entropie croît. À P_2 fixée, la température en 2 sera donc plus forte.

13°) Pour la transformation isobare (et donc isotherme) de l'unité de masse du liquide saturé vers la vapeur

saturée, $\Delta h = l$ et $\Delta s = \frac{l}{T}$. La lecture de l'enthalpie et de l'entropie massiques sur la courbe de saturation permet alors de déterminer l de deux façons.

Pour 0,3 MPa $\Delta h = 199 \text{ kJ.kg}^{-1}$ $\Delta s = 0,725 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
 $T = 1^{\circ}\text{C}$ $T\Delta s = 199 \text{ kJ.kg}^{-1}$ Les deux valeurs coïncident.

14°) l est nulle au point critique où les deux branches de la courbe de saturation se rejoignent (transition de phase du deuxième ordre).

15°) La variation d'enthalpie lors du changement d'état isotherme/isobare est proportionnelle à la quantité de vapeur formée. Donc, si on note L et V les points représentant le liquide et la vapeur saturés et M celui qui est associé au mélange, ces points sont alignés sur une horizontale et $\overline{LM} = x\overline{LV}$.

16°) $x_3 = 0$ $x_1 = 1$ $x_4 = 0,38$ $y = 1 - x$

17°) Pour $2 \rightarrow 3$ ou $4 \rightarrow 1$, il n'y a pas de travail externe au fluide (w') fourni donc $\Delta h = q$

$$q_c = q_{23} = -183 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad q_f = q_{41} = 136 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

18°) Pour $1 \rightarrow 2$ $q = 0$ donc $w'_{12} = \Delta h = 47 \text{ kJ.kg}^{-1}$

$$\eta = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie coûteuse}} = \frac{q_f}{w'_{12}} = 2,9$$

19°)

20°) La valeur du 19°) est identique à 10% près à celle de la question 5°).

La partie I.A ne donnait qu'une évaluation grossière car la géométrie exacte des parois n'était pas prise en compte et on avait utilisé une valeur de conductivité avec un seul chiffre significatif. Le calcul du I.B. est basé sur les caractéristiques réelles du fluide (h, s) mais sur des transformations idéalisées (adiabatique,

réversible, isotherme, $x=0$ ou $x=1$ en certains points ...) qui ne correspondent pas tout à fait avec celles qui sont effectivement réalisées. Ceci suffit amplement à expliquer l'écart de 10 %.

II Propagation du son

A) Modèle classique

21°) Dans un fluide parfait, les forces internes au fluide sont décrites uniquement par un champ de pression (force de surface normales, pas de viscosité).

22°) L'approximation acoustique consiste à mener les calculs à l'ordre un par rapport à p, μ, v et T qui sont supposés petits (acoustique linéaire). Par ailleurs, on néglige toutes les forces autres que celles de pression (fluide parfait, pas de champ de pesanteur).

23°) Une onde sonore classique est décrite par une évolution adiabatique réversible (isentropique donc) des particules fluides.

24°) Équation d'Euler linéarisée :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p \quad (1)$$

Équation locale de conservation de la masse linéarisée :

$$\mu_0 \text{div } \vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Évolution isentropique : $\chi_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$ qui donne par linéarisation : $\mu = \mu_0 \chi_s p$ (3)

En prenant la divergence de (1), en utilisant (2) pour éliminer $\vec{v}$ et (3) pour éliminer μ , on trouve

$$\Delta p = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c_s^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_s}$$

25°) Pour un gaz parfait $\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$ et $\chi_s = \frac{1}{\gamma P_0}$ donc

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

26°) L'air est essentiellement un mélange de O_2 et N_2 , gaz parfaits diatomiques, ce qui justifie, aux températures usuelles la valeur $\gamma=7/5$. Les proportions 4/5 de N_2 ($M = 28 \text{ g.mol}^{-1}$) et 1/5 de O_2 ($M = 32 \text{ g.mol}^{-1}$) justifient la valeur de la masse molaire moyenne 29 g.mol^{-1} . On trouve alors à 20°C une célérité

$$c_s = 343 \text{ m.s}^{-1}$$

27°) La célérité de la lumière étant beaucoup plus grande que c_s , le retard δt entre la perception de la lumière d'un éclair et celle du son (coup de tonnerre) est directement

liée à la distance d de l'éclair et à c_s par $d = c_s \delta t$. On

obtient la distance en km en divisant par 3 le retard en s

$$c_s \approx \frac{1}{3} \text{ km.s}^{-1}$$

puisque

28°) Le calcul est le même en remplaçant χ_s par χ_T .

Comme $\chi_T = \gamma \chi_s$ ceci conduit juste à faire disparaître le facteur γ dans c_s :

$$c_{\text{isotherme}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$$

29°) $c_{\text{isotherme}} = 290 \text{ m.s}^{-1}$ est en désaccord avec les résultats expérimentaux ($c \approx 330$ à 340 m.s^{-1} pour les fréquences audibles) qui permettent de valider l'hypothèse isentropique.

B) Son et diffusion thermique

30°) Dans un modèle unidimensionnel, les vitesses sont colinéaires à Ox. Une tranche de section S, de largeur dx

a une capacité thermique $\delta C_v = \mu_0 c_v S dx$ (l'ordre 0 suffit ici car on va multiplier par une variation de température qui est déjà d'ordre 1). Elle reçoit par sa section à

l'abscisse x une puissance thermique $-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x)$ et à

l'abscisse $x+dx$ $\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx)$. La puissance des forces

de pression est $P_0 S v(x)$ à l'abscisse x et $-P_0 S v(x+dx)$ à l'abscisse $x+dx$. Le premier principe appliqué entre les dates t et $t+dt$ permet alors d'écrire :

$$\mu_0 c_v S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x) - \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) \right) dt + P_0 S (v(x) - v(x+dx)) dt$$

$$\mu_0 c_v S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dt - P_0 S \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

En simplifiant par $S dx dt$, on obtient :

$$\mu_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

31°) Les équations (1) et (2) sont encore valables et deviennent :

$$\mu_0 \omega v = k p \quad (1') \quad \mu_0 k v = \omega \mu \quad (2')$$

$$(4) \text{ devient } T(\mu_0 c_v j \omega + \lambda k^2) = P_0 j k v \quad (4')$$

Enfin, $\frac{P}{\rho \text{ Température}} = C^{ste}$ (équation d'état du gaz parfait) s'écrit, par passage à la différentielle logarithmique et calcul approché à l'ordre 1 :

$$\frac{p}{P_0} = \frac{\mu}{\mu_0} + \frac{T}{T_0} \quad (3')$$

De (1') et (2') on déduit $\mu = \frac{k^2}{\omega^2} P$ ce qui, reporté dans

$$(3') \text{ conduit à } \frac{P}{P_0} \left(1 - \frac{P_0}{\mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} \right) = \frac{T}{T_0} \quad (3'')$$

Avec (1') et (4') on trouve :

$$\mu_0 \omega T (\mu_0 c_v j \omega + \lambda k^2) = j P_0 k^2 p$$

Il ne reste plus qu'à remplacer T en fonction de p dans (3'') pour obtenir :

$$\frac{P}{P_0} \mu_0 \omega \left(1 - \frac{P_0}{\mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} \right) (\mu_0 c_v j \omega + \lambda k^2) = \frac{j P_0 k^2 p}{T_0}$$

On multiplie par $\frac{\omega}{P}$ puis on remplace $\frac{\mu_0}{P_0}$ par $\frac{M}{RT_0}$ (loi des gaz parfaits)

$$\left(\frac{M \omega^2}{RT_0} - k^2 \right) (\mu_0 c_v j \omega + \lambda k^2) = j \frac{P_0 k^2 \omega}{T_0}$$

qu'on peut réordonner en puissances de k sous la forme

$$\lambda k^4 + k^2 \left(j \omega \left(\mu_0 c_v + \frac{P_0}{T_0} \right) - \frac{\lambda M \omega^2}{RT_0} \right) - \frac{j \omega^3 M \mu_0 c_v}{RT_0} = 0$$

On peut remplacer $\mu_0 c_v$ par $\frac{1}{\gamma - 1} \frac{P_0}{T_0}$ pour simplifier l'équation en :

$$\lambda k^4 + k^2 \left(j \omega \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{T_0} - \frac{\lambda M \omega^2}{RT_0} \right) - \frac{j \omega^3 M}{(\gamma - 1) RT_0} \frac{P_0}{T_0} = 0$$

32°) La présence de facteurs non réels (j) va se traduire par des valeurs non réelles de k . Il va y avoir diminution de l'amplitude des ondes lors de leur propagation. Par ailleurs, k ne sera pas directement proportionnel à ω . La vitesse de phase ne sera pas constante. Le milieu sera dispersif.

33°) On va faire apparaître des termes de la forme $e^{\text{Im}(k)x} e^{j(\omega t - \text{Re}(k)x)}$ qui traduisent une propagation à la

vitesse de phase $\frac{\omega}{\text{Re}(k)}$.

34°) Le cas adiabatique correspond à la limite où λ tend

vers 0. L'équation devient $k^2 \gamma = \omega^2 \frac{M}{RT_0}$ qui est bien caractérisé par une vitesse de phase

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)_{\text{iso-S}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

Le cas isotherme correspond à la limite où λ tend vers l'infini. En ne gardant de l'équation que les termes

dominants (en λ), elle s'écrit $\lambda k^4 = k^2 \frac{\lambda M \omega^2}{RT_0}$ d'où les

solutions intéressantes $k^2 = \frac{M \omega^2}{RT_0}$ de vitesse de phase :

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)_{iso-T} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$$

35°) Les transferts thermiques associés à la loi de Fourier sont irréversibles (création d'entropie) dans le cas non isotherme. Cette irréversibilité est responsable de l'atténuation de l'onde associée à une évolution du gaz ni adiabatique ni isotherme.

III Réfrigérateur thermoacoustique

A) La cavité résonnante

36°) A cause de la paroi rigide, v est nulle à tout instant en $x = 0$. En reportant dans l'équation (1), on en déduit

que $\frac{\partial p}{\partial x}(x=0, t) = 0$. Par ailleurs, $p(x=L, t) = 0$. Les modes propres de la cavité sont alors des ondes stationnaires de la forme $p = p_m \cos kx \cos(\omega t + \varphi)$ qui respecte la condition en $x=0$. Il faut de plus, pour respecter la condition en $x=L$ que :

$$kL = \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Alors $p = p_m \cos\left((2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right) \cos(\omega t + \varphi)$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{2n-1}$$

37°) Ici $n = 1$ et $\tau = \frac{\lambda}{c_s} = 4L \sqrt{\frac{M}{\gamma RT_0}} = 1,51 \text{ ms}$

La pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi c_s}{4L} = 4150 \text{ rad.s}^{-1}$

38°) $p = p_m \cos \frac{\pi x}{2L} \cos(\omega t + \varphi)$. Avec l'équation (1) on

en déduit que $v = \frac{\pi p_m}{2L \omega \mu_0} \sin \frac{\pi x}{2L} \sin(\omega t + \varphi)$

39°) v est donc de la forme $v_m \sin \frac{\pi x}{2L} \sin(\omega t + \varphi)$ avec :

$$v_m = \frac{\pi}{2L \omega \mu_0} p_m = \frac{p_m}{P_0} \sqrt{\frac{RT_0}{\gamma M}}$$

En intégrant par rapport au temps on obtient le

déplacement $\xi = -\xi_m \sin \frac{\pi x}{2L} \cos(\omega t + \varphi)$ avec :

$$\xi_m = \frac{v_m}{\omega} = \frac{2}{\pi \gamma} \frac{p_m}{P_0} L$$

Pour une transformation isentropique la loi de Laplace

différentielle $(\gamma - 1) \frac{dp}{P} = \gamma \frac{dT}{T}$ devient, par

linéarisation, $\frac{T}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p}{P_0}$ donc

$T = T_m \cos \frac{\pi x}{2L} \cos(\omega t + \varphi)$ avec :

$$T_m = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_m}{P_0} T_0$$

B) Réfrigérateur

40°) Les lamelles ne modifient pas le mouvement du gaz donc l'expression de ξ obtenue au 39°) reste valable. De plus on va remplacer dans cette expression x par OO' (car $d \ll L$) et ϕ par 0 (pour avoir une vitesse nulle à $t = 0$) donc $\xi = -\xi'_m \cos \omega t$ avec

$$\xi'_m = \xi_m \sin \frac{\pi OO'}{2L}$$

De même $T = T'_m \cos \omega t$ avec

$$T'_m = T_m \cos \frac{\pi OO'}{2L}$$

41°) a) α_{q_F} doit être positif pour que le système fonctionne en machine frigorifique.

b) L'état (1) correspond à la position $x_0' - \xi'_m$ du fluide donc $T_1 = T_m(x_0' - \xi'_m)$.

c) Pour l'onde acoustique, la variation de température entre $t = 0$ et $t = \pi / \omega$ est de $-2T_m'$ donc $T_2 = T_1 - 2T_m'$.

d) e) De même que pour le point 1, on obtient $T_3 = T_m(x_0' + \xi_m')$ puis $T_4 = T_3 + 2T_m'$.

f) δq_F vaut donc $\delta q_F = C_v(T_3 - T_2) = C_v(T_3 - T_1 + 2T_m')$

$$\delta q_F = 2\mu_0 c_v a_1 b dx' \left(T_m' - \frac{T_C - T_F}{d} \xi_m' \right)$$

$$\delta q_F = 2 \frac{P_0}{(\gamma - 1)T_0} a_1 b dx' \left(T_m' - \frac{T_C - T_F}{d} \xi_m' \right)$$

De même, $\delta q_C = C_v(T_1 - T_4) = -\delta q_F$

g) Pour que δq_F soit positif, il faut donc que :

$$T_C - T_F < \frac{T_m'}{\xi_m'} d = T_0 \frac{d}{L} \frac{\pi}{2} (\gamma - 1) \cot \frac{\pi \text{OO}'}{2L}$$

42°) D'après la question précédente, la tranche de gaz placée en x_0' et d'épaisseur dx' transfère en une période l'énergie thermique $\delta q_F = K dx'$ entre deux points distants de $2\xi_m'$ dans la direction de la source chaude. Il en est de même pour les tranches placées en $x_0' + 2k\xi_m'$. Donc l'ensemble de toutes ces tranches transfère $K dx'$ entre l'extrémité froide et l'extrémité chaude du dispositif. Il suffit alors de sommer $K dx'$ sur une largeur $2\xi_m'$ pour avoir pris en compte tous les transferts thermiques en une période puis de diviser par la période τ pour avoir la puissance transférée (On remplace également a_1 par a pour tenir compte de toutes les lamelles parallèles)

$$P = 4 \frac{P_0 a b}{(\gamma - 1)T_0} \xi_m' \left(T_m' - \frac{T_C - T_F}{d} \xi_m' \right) \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

En remplaçant en fonction des données, et en notant S et

C le sinus et le cosinus de $\frac{\pi \text{OO}'}{2L}$ (qui valent $1/\sqrt{2}$ ici) on obtient :

$$P = \frac{2P_0 a b}{\pi \gamma^2} \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \left(\frac{P_m}{P_0} \right)^2 S \left(C - \frac{2(T_C - T_F)L}{\pi(\gamma - 1)T_0 d} S \right) = 10,1 \text{ W}$$

43°) Le travail reçu par la tranche de gaz au cours d'un cycle est l'aire comprise dans le cycle dessiné à la question 41°). Le cycle est pratiquement un parallélogramme. Le travail vaut :

$$\delta W = (V_2 - V_1)(p_3 - p_2)$$

$1 \rightarrow 2$ est isentropique donc $(\gamma - 1) \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$

$$V_2 - V_1 \approx \frac{(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)T_0} a_1 b dx = \frac{2T_m'}{(\gamma - 1)T_0} a_1 b dx$$

$2 \rightarrow 3$ est isochore donc $\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}$

$$p_3 - p_2 \approx \frac{P_0}{T_0} (T_3 - T_2)$$

En remplaçant δq_F par $C_v(T_3 - T_2)$ on trouve alors

$$\frac{\delta q_F}{\delta W} = \frac{\mu_0 c_v (\gamma - 1) T_0^2}{2T_m' P_0} = \frac{T_0}{2T_m'}$$

Mais, le travail pour transférer δq_F d'un bout à l'autre de la lamelle doit être fourni à toutes les tranches distantes

de $2\xi_m'$ (voir le raisonnement du 42°)) qui sont au

nombre de $\frac{d}{2\xi_m'}$. On peut donc définir l'efficacité par :

$$\eta = \frac{\delta q_F}{\delta W d} \frac{2\xi_m'}{d} = \frac{T_0 \xi_m'}{dT_m'} = \frac{T_0 \xi_m'}{dT_m' C} = \frac{2L}{\pi(\gamma - 1)d} \frac{S}{C} = 8,0$$

Remarques :

- Le fonctionnement en machine frigorifique implique (en écrivant que P calculée à la fin de 42°) est > 0)

que l'efficacité est au plus $\frac{T_0}{T_C - T_F}$. Bonjour M. Carnot ! Mais cette efficacité maximale n'est approchée que si la puissance tend vers 0.

- La vraie efficacité doit en réalité faire intervenir le travail électrique reçu par le haut-parleur. Or il y a des pertes mécaniques (transmission haut-parleur gaz, onde acoustique transmise à l'extérieur ...). L'efficacité est donc en réalité plus faible.
- $P_{\text{thermique}}$ est maximale si $T_C - T_F$ est nulle.

C) Justification des dimensions du système

44°) La formule du 42°) s'applique avec $\frac{\pi \text{OO}'}{2L} = \frac{\pi L_1}{2L}$ qui sera noté X pour la suite. Il faut donc maximiser un

terme de la forme $\sin X (\cos X - A \sin X)$ avec

$$A = \frac{2(T_C - T_F)L}{\pi(\gamma - 1)T_0 d} = 0,53$$

. Le maximum est atteint pour

$\tan 2X = 1/A$ (c'est à dire ici $L_1/L = 0,34$). Il vaut 0,30 contre 0,23 pour X égal à $\pi/4$. On gagne donc environ 25%. Ces calculs sont néanmoins sujets à caution car l'approximation $d \ll L$ n'est pas vraiment valide ici.

45°) De l'équation de diffusion $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ on déduit

que $\omega \rho c \delta^2 / \lambda$ est sans dimension si δ est une longueur. On peut introduire la profondeur de l'effet de peau associé à l'équation de diffusion :

$$\delta_M = \sqrt{\frac{\Lambda_M}{\omega \rho_M c_M}} = 0,155 \text{ mm}$$

46°) En l'absence de convection, les échanges thermiques dans le gaz sont régis par l'équation de diffusion et on peut définir de même :

$$\delta_G = \sqrt{\frac{\Lambda_G}{\omega \mu_0 c_v}} = \sqrt{\frac{\Lambda_G T_0 (\gamma - 1)}{\omega P_0}} = 0,240 \text{ mm}$$

47°) Afin que toute l'épaisseur du gaz participe bien à l'échange thermique avec les lamelles, il faut prendre a_1 plutôt plus petit que δ_G . Mais par ailleurs, il ne faudrait pas prendre a_1 trop petit car la présence des lamelles serait alors un obstacle aux oscillations du gaz. On choisira donc

$$a_1 \approx 0,5 \text{ mm}$$

($2\delta_G$ car il y a une lamelle de chaque côté du gaz).

48°) Pour que l'échange thermique entre le gaz et le métal soit important, il ne faut pas que la température du métal se rapproche trop de celle du gaz pendant l'échange. Il faut donc que la capacité thermique surfacique des lamelles soit nettement supérieure à celle de la tranche de gaz c'est à dire que $\rho_M c_M a_2 \gg \mu_0 c_v a_1$.

Ceci correspond à $a_2 / a_1 \gg 10^{-3}$. Comme par ailleurs, il faut que $a_2 / a_1 \ll 1$ pour ne pas perturber le mouvement du gaz, on va choisir $a_2 / a_1 \approx 0,04$ donc

$$a_2 \approx 20 \mu\text{m}$$

a_2 est petit devant δ_M donc toute l'épaisseur des lamelles participe bien à l'échange thermique (l'expression de la capacité surfacique du métal était légitime).

49°) La puissance fournie par le réfrigérateur acoustique dépend des caractéristiques :

- géométriques : choix judicieux de L_1 (voir 44°), de d (étude non possible avec le modèle utilisé car il repose sur l'approximation $d \ll L$) voire même de la forme de la cavité résonnante (ici cylindrique). Il faut aussi choisir a_1 et a_2 (aux questions 46°) et 47°) on n'a donné qu'une estimation qualitative).
- physiques : la puissance augmente lorsque la masse molaire diminue (mais on a déjà étudié le cas d'une masse molaire très faible). Elle dépend également de la température T_0 et de la pression P_0 moyennes. On peut donc l'augmenter en faisant varier ces paramètres.
- électro-mécaniques : conception du haut-parleur.

Le modèle utilisé est de toute façon une première approche qui laisse de côté certaines caractéristiques du fluide (viscosité, caractère non parfait ...). Les échanges thermiques n'ont sans doute pas lieu uniquement lorsque la vitesse du gaz devient nulle et le cycle décrit par le gaz est plus « arrondi » que celui qui a été dessiné à la question 41°. Par ailleurs, le modèle linéaire de l'acoustique n'est guère valide à un tel niveau d'amplitude des oscillations (1000 Pa correspondrait dans l'air à environ 150 dB) et le mouvement du gaz est tout de même perturbé par la présence des lamelles. Il faudrait certainement une étude par simulation informatique pour optimiser le rendement en tenant compte des termes négligés.

Bien que l'effet thermoacoustique soit connu depuis longtemps, son utilisation ne s'est fortement développée que depuis une vingtaine d'années. Un réfrigérateur reposant sur cet effet ne nécessite pas de pièces mobiles sophistiquées ni de lubrifiant pour son fonctionnement contrairement au compresseur d'une machine classique. Il n'utilise pas de fluide caloporteur éventuellement dangereux pour l'environnement.