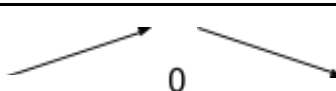


I. Première partie.

1. Deux méthodes pour prouver l'inégalité demandée.

- Etude de la fonction z définie par : $\forall x \in]-1, +\infty[, z(x) = \ln(1+x) - x$.

La fonction est bien sûr dérivable sur son domaine de définition et $z'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$.
D'où le tableau de variation suivant :

x	-1	0
		0
		
		0

Ce qui prouve que :
cqfd.

- Avec les accroissements finis : $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = \frac{x}{1+x\theta(x)} \quad 0 < \theta(x) < 1$.

De sorte que pour $x \geq 0$, $\frac{1}{1+x\theta(x)} \leq 1$ et donc $\frac{x}{1+x\theta(x)} \leq x$ cqfd.

et pour $-1 < x < 0$, $\frac{1}{1+x\theta(x)} \geq 1$ et donc là encore $\frac{x}{1+x\theta(x)} \leq x$ (changement de sens de l'inégalité en multipliant par $x < 0$), cqfd.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, \sqrt{n}[$. Je pense que l'on pouvait tout à fait prendre $t \in [0, \sqrt{n}[$ pour les inégalités demandées.

Alors $\frac{t^2}{n} \in [0, 1[$ et $\frac{-t^2}{n} \in]-1, 0]$ de sorte que l'on peut utiliser le résultat de la question précédente, à

savoir que :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{-t^2}{n}\right) \leq \frac{-t^2}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$$

3. $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)}$ $t \in [0, \sqrt{n}[$, $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{-t^2}{n}$ d'après la question précédente.

La croissance de la fonction exponentielle assure que $e^{n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)} \leq e^{n\left(\frac{-t^2}{n}\right)} = e^{-t^2}$ et par suite en intégrant

entre 0 et $\sqrt{n}$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

On a aussi $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)} \leq e^{n\left(\frac{t^2}{n}\right)} = e^{t^2}$ pour les mêmes raisons que précédemment, de sorte que

pour $t \in [0, \sqrt{n}[$, $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ et en intégrant entre 0 et $\sqrt{n}$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Enfin la dernière inégalité est une évidence, la seule chose à démontrer étant la convergence de

l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$. Or en effet, au voisinage de $+\infty$, $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \sim \frac{n^n}{t^{2n}}$,
équivalent

de type Riemann, avec $2n \geq 2 > 1$ ce qui assure la convergence de l'intégrale.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

4.a) L'application $u \mapsto \sqrt{n} \cotan(u)$ réalise une bijection décroissante de classe C^1 de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Effectuons donc le changement de variable $t = \sqrt{n} \cotan(u)$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.

On a : $dt = \frac{-\sqrt{n}}{\sin^2 u} du$ d'où :

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 + \cotan^2 u\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\sin^2 u} du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u) du$$

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u) du$$

b) Dans l'intégrale $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ effectuons le changement de variable $t = \sqrt{n} \cos u$. On a :

$$dt = -\sqrt{n} \sin u \, du \quad \text{et} \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2n}(u) (-\sqrt{n} \sin u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du$$

Conclusion :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du$$

c) Les deux inégalités extrêmes de la question 3 peuvent donc s'écrire :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u) du$$

5. On admet que, lorsque N tend vers $+\infty$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^N(u) du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2N}}$.

Dès lors : $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

De même : $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u) du \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ est encadrée par deux quantités dont la limite, quand n tend vers $+\infty$, est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Comme par ailleurs l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente

(Cf $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ converge), la limite précédente donne la valeur de

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ qui est donc $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant paire, la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ entraîne celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et cette dernière intégrale vaut $2I$. Ainsi $J = \sqrt{\pi}$.

Enfin dans $K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, le changement de variable $t = \sqrt{2} u$ conduit à $K = \sqrt{2} I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Conclusion :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad J = \sqrt{\pi}, \quad K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

II. Deuxième Partie.

1. Développement en série entière de la fonction exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad R = \infty$$

2.a) La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est donc développable en série entière sous la forme :

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 2^2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n! 2^n} + \dots \quad R = \infty$$

b) On sait que si f est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à R , alors la

primitive F de f définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est développable en série entière, on obtient le développement de F en intégrant terme à terme celui de f et le rayon de convergence de la nouvelle série est encore R .

Ainsi,
$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2! 2^2 \cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)} + \dots \quad R = \infty$$

3. Soit donc F définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

F est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et même de classe C^∞ puisque chacune de ces deux fonctions est développable en série entière de rayon de convergence infini.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = xF(x) + 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = xF(x) + 1$.

4. Posons $F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$. On a alors $F'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$

On a $a_0 = 0$ car $a_0 = F(0) = 0$.

L'égalité $F'(x) = xF(x) + 1$ fournit en comparant les termes constants des deux membres $a_1 = 1$.

Enfin l'égalité des coefficients du terme x^n dans les deux membres donne : $(n+1)a_{n+1} = a_{n-1}$.

5. On déduit de la relation précédente que :

$$a_{2p} = \frac{a_0}{2p(2p-2)(2p-4)\dots 2} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\dots 3} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}$$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0, a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}.$

6.a) Par définition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

b) On en déduit que quand x tend vers $+\infty$, $F(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$

III. Troisième Partie.

Soient les deux fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du \text{ et } g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta.$$

1.a) Continuité de g . $\forall x \in [0, +\infty[, \theta \mapsto e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc est intégrable sur cet intervalle et g est donc bien définie sur $[0, +\infty[$. De plus :

- $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], x \mapsto e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- $\forall x \in [0, +\infty[, \theta \mapsto e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

- $\forall (x, \theta) \in [0, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{4}\right], e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} \leq 1$, fonction indépendante de x , continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et telle

que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$ converge!

Les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre sont vérifiées.

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$$

b) Dérivabilité de g .

Posons $h(x, \theta) = e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}$ on a : $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) = \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}.$

- $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], x \mapsto \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- $\forall x \in [0, +\infty[, \theta \mapsto \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

- Soit $A > 0$, $\forall (x, \theta) \in [0, A] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left| \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} \right| \leq 4A$, fonction indépendante de x ,

continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et telle que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4A d\theta = \pi A$ converge!

Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme sont vérifiées, g est de classe C^1 sur tout intervalle $[0, A]$ et ce $\forall A > 0$, donc est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta$$

2. On définit la l'application h sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad h(x) = f^2(x) + g(x)$.
 h est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad h'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta$$

Nous allons transformer la deuxième intégrale avec le changement de variable indiqué $u = \tan \theta$.

On a $\frac{du}{\cos^2 \theta} = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ et aussi $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + u^2$.

Ainsi, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+u^2)} du = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xu)^2} x du$ et en posant $v = xu$ (valable pour

$x > 0$, le cas $x = 0$ étant évident) dans cette dernière intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} dv$$

Conclusion : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad h'(x) = 0$ donc h est une application constante qui vaut $h(0) = \frac{\pi}{4}$.

- 3.a) $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{x^2}{\cos^2 \theta} \geq x^2$ donc $\frac{-x^2}{\cos^2 \theta} \leq -x^2$ et $e^{\frac{-x^2}{\cos^2 \theta}} \leq e^{-x^2}$ et par suite pour tout x positif :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2} d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$$

Conclusion :

$$\forall \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$$

- b) On en déduit d'après l'encadrement précédent que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = \frac{\pi}{4}$ et comme $f(x) \geq 0$ on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On retrouve bien sûr que $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et encore $J = 2I = \sqrt{\pi}$.

IV. Quatrième Partie.

Soit $R > 0$. D_R est le disque fermé de centre O et de rayon R .

C_R est le pavé carré fermé de centre 0, de côtés de longueur $2R$, parallèles aux axes de coordonnées.

Notons tout de suite les inclusions suivantes : $D_R \subset C_R \subset D_{\sqrt{2}R}$.

1. Calcul de $I_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. Le passage en polaires s'impose !

$$I_R = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^R = \pi (1 - e^{-R^2})$$

Conclusion : $I_R = \pi (1 - e^{-R^2})$.

2. L'inclusion des domaines d'intégration signalée précédemment et le caractère positif de la fonction que

l'on intègre permet d'écrire : $I_R \leq J_R \leq I_{\sqrt{2}R}$.

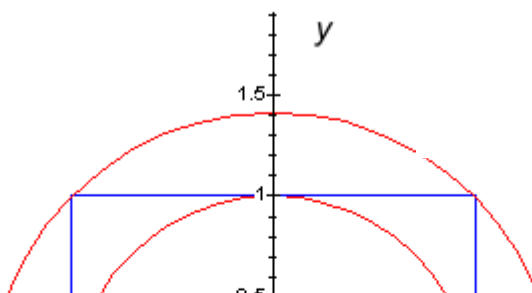
On a que I_R et $I_{\sqrt{2}R}$ tendent vers π quand $R \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R = \pi$.

Or pour des raisons de symétries du domaine C_R adaptées à la fonction que l'on intègre, on peut écrire :

$$J_R = 4 \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 4 \int_0^R e^{-x^2} dx \times \int_0^R e^{-y^2} dy = 4 \left[\int_0^R e^{-t^2} dt \right]^2$$

On en déduit que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_0^R e^{-t^2} dt \right]^2 = \frac{\pi}{4}$ soit $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

```
> restart;
> with(plots):
> D1:=plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained,color=red);
> D2:=plot([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained,color=red);
> C:=plot([-1,1],[-1,-1],[1,-1],[1,1],[-1,1],color=blue);
> Ox:=plot([t,0,t=-1.3*sqrt(2)..1.3*sqrt(2)],color=black);
> Oy:=plot([0,t,t=-1.3*sqrt(2)..1.3*sqrt(2)],color=black);
> display({D1,D2,C,Ox,Oy});
```





x



Fin