

Correction TDN°6 : Travail, Puissance, Energie

Exercice 1

Correction

1) La relation entre une force conservative et l'énergie potentielle dont elle dérive est :

$$\vec{\text{grad}} E_p = - \vec{F}_{\text{ext}}$$

2) Avec un axe vertical ascendant nous avons :

$$dE_{pp} = - \vec{P} \cdot d\vec{l} = mg \vec{u}_z \cdot (dx \vec{u}_x + dz \vec{u}_z) = mg dz$$

soit : $EPP(z) = mgz + cste$

3)

a) $E = E_c + EPP(z) = 1/2 mv^2 + mgz$ (en prenant comme zéro de l'énergie potentielle $EPP(0) = 0$).

b) L'énergie potentielle croît linéairement avec l'altitude.

c) À $t = 0$ s, l'énergie potentielle est nulle donc : $E = E_{c0} = 1/2 mv_o^2$

A.n. : $E = E_{c0} = 500$ J.

L'énergie cinétique sera définie à un instant quelconque par : $E_c = E - E_{pp}(z) = E - mgz$, ce qui est une fonction décroissante de l'altitude z atteinte. L'altitude maximale z_{max} atteinte sera obtenue pour $E_c(z_{max}) = 0$ soit $z_{max} = E/mg$. A.n. : $z_{max} = 5$ m.

Cependant, la vitesse ne peut pas s'annuler complètement. La composante v_z suivant la verticale peut s'annuler mais la composante $v_x = v_o \sin \alpha$ suivant l'axe x reste constante. Donc en réalité il existe un minimum non nul pour l'énergie cinétique : $E_{cmin} = 1/2 m(v_o \sin \alpha)^2 = 1/4 mv_o^2$ (avec l'angle $\alpha = 45^\circ$).

On a donc : $E_{cmin} = 500/2 = 250$ J ce qui donne alors pour l'altitude maximale atteinte $z_{max} = (E - E_{cmin})/mg = 2,5$ m.

d) Équation de la trajectoire : $z = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$, et la portée est par :

$$d = \frac{v_o^2}{a_0} 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

. A.N. : $d = 10$ m.

Exercice 2

Correction

1) On considère le système bateau dans le référentiel galiléen R . Les forces extérieures appliquées

au bateau sont :

- $\vec{P}$ le poids du bateau ;
- $\vec{R}$ la poussée de l'eau sur le bateau ;
- $\vec{f}$ la force de frottement.

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$a_{G/R}^{\rightarrow} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$$

Ce qui conduit par projection dans la direction x d'avancée du bateau à : $m \, dv_x / dt = -kv_x$.

On en conclut que : $dv_x / v_x = -k/m \, dt$

$$dt \Rightarrow \ln v_x = -k/m \, t + C$$

Les conditions initiales du mouvement imposent que :

$$C = \ln v_{0x} \Rightarrow \ln v_x / v_{0x} = -k/m \, t \Rightarrow v_x = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_x = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

À l'instant $t = 0$ le bateau était en $x = 0$, donc : $C_2 = \frac{v_0}{k} \Rightarrow x = \frac{v_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. Le bateau s'arrêtera au bout d'un temps infini à la position : $x_a = \frac{v_0}{k}$.

2) Par définition, le travail de la force de frottement est donné par :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{f} \cdot \vec{v} \, dt \Rightarrow W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = -kv_0^2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-2\frac{k}{m}t} \, dt$$

soit, entre l'origine des temps et l'infini :

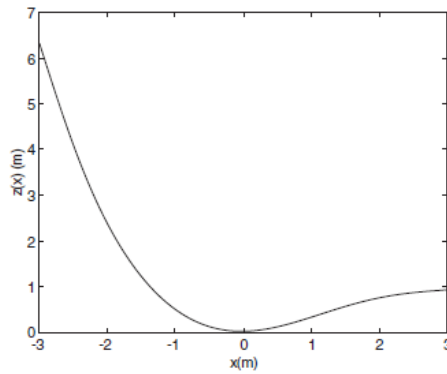
$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = kv_0^2 \frac{m}{2k} \left[e^{-2\frac{k}{m}t} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

ce qui représente l'opposé de l'énergie cinétique de départ (Ceci est logique dans la mesure où seule la force de frottement travaille).

Exercice 3

Correction

1-



2-

condition de stabilité en $x = x_0 = 0, \frac{d^2 E_p}{dx^2} \Big|_{x_0} = 2a > 0$, donc l'équilibre est stable

Donc l'équilibre est stable dans cette position. Par contre $x_1 = 2,695$ m nous avons :

$$\frac{dE_p}{dx} \Big|_{x_1} \text{ et } \frac{d^2 E_p}{dx^2} \Big|_{x_0} < 0$$

Donc cette position est une position d'équilibre stable.

3) En $x_M = 1,5$ m, $z(x_M) = 0,563$ m. Le solide va aller du côté correspondant à la diminution de son énergie potentielle soit vers les x décroissants. Son énergie potentielle va décroître jusqu'à ce qu'il passe par $x = 0$ où elle deviendra nulle si l'on convient de prendre l'origine des énergies potentielles en $z = 0$. Comme il n'y a pas de frottements, l'énergie mécanique se conserve : $E = E(M) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgz(x) = mgz(x_M)$

L'énergie cinétique sera donc : $\frac{1}{2}mv^2 = mgz(x_M) - mgz(x)$.

L'énergie cinétique passe par un maximum quand $z(x) = 0$, ce qui correspond à la position du point P. La vitesse en ce point est donnée par :

$$v = \sqrt{2gz(x_M)} = 3,32 \text{ ms}^{-1}$$

Exercice 4 : Équilibre de la bille (étude de l'énergie potentielle)

Correction

1) $E_{pp} = -mgR \sin \theta$

2) $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k\left(R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 = kR^2(1 - \cos \theta)$

3) $E_p(\theta) = kR^2(1 - \cos \theta) - mgR \sin \theta$

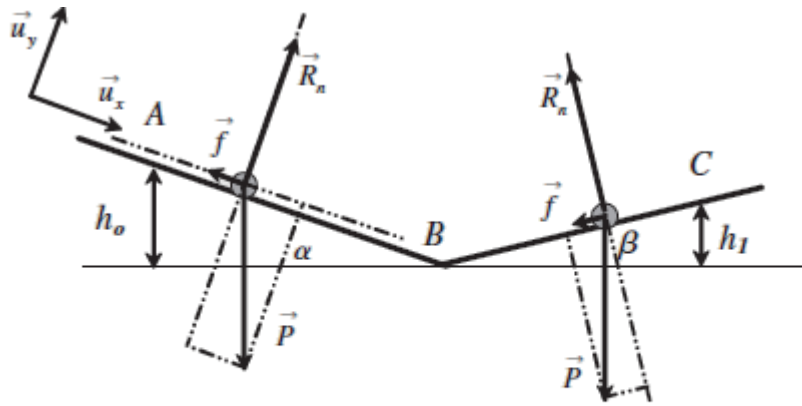
4) E_p doit être minimale. La dérivée est donc nulle pour $\theta = \theta_e$. L'équilibre est stable si la dérivée seconde est positive.

$$\frac{dE_{\theta}}{d\theta} = kR^2 \sin\theta - mgR \cos\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta_e = \frac{mk}{kR}$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = kR^2 \cos\theta_e + mgR \sin\theta_e > 0, \text{ l'équilibre est bien stable}$$

Exercice 5 : Mouvement sur un plan incliné.

Correction



1) Lorsque les frottements sont suffisants pour maintenir la masse en équilibre on a :

$$\text{Solide en équilibre : } \frac{f}{R_n} < \mu;$$

2) Bilan des forces agissant sur la masse m

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$
- La réaction normale $\vec{R}_n = R_n \vec{u}_y$
- Les frottements solide : $\vec{f} = -f \vec{u}_x$ et la masse glisse : alors $f = \mu R_n$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_n = m\vec{a}$

et en projetant :

- a) Sur $\vec{u}_y$: $R_n = mg \cos \alpha$. Sur $\vec{u}_x$: $mg \sin \alpha - f = m\ddot{x}$ et avec $f = \mu R_n = \mu mg \cos \alpha$
On a : $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)$

$$\ddot{x} = g \sin \alpha \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}\right) = g \sin \alpha - g \cos \alpha \tan \varphi$$

Exercice 6

Correction

- 1) $E_{pp}(A) = mgh$ $E_{pp}(M) = mgR(1 - \cos \theta)$
- 2) $E_m(A) = mgh$, $E_m(M) = 1/2 m V_M^2 + mgR(1 - \cos \theta)$
- 3) Le système conservatif (pas de frottement). $E_m(A) = E_m(M)$.
- 4) $E_m(M) = 1/2 m V_M^2 + mgR(1 - \cos \theta) = E_m(A) = mgh \Rightarrow$

$$\frac{V_M^2}{R} = 2g \left[\frac{h}{R} - (1 - \cos \theta) \right]$$