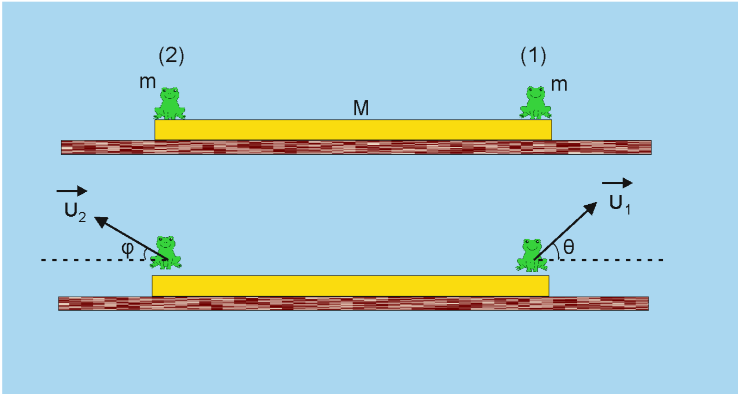
Δύο βατραχάκια και η σανίδα



Μία σανίδα μεγάλου μήκους έχει μάζα Μ και είναι ακίνητη σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Στα άκρα της στέκονται δύο βατραχάκια (1) και (2) ίδιας μάζας m. Κάποια στιγμή τα βατραχάκια πηδούν ταυτόχρονα με ταχύτητες μέτρου $υ_1 = υ_2 = υ$, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο (αυτό της σελίδας) και σχηματίζουν με τον ορίζοντα γωνίες θ και φ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι γωνίες φ και θ ανήκουν στο διάστημα [0, π/2].

Α. για ποιες τιμές των γωνιών φ και θ η ταχύτητα που θα αποκτήσει η σανίδα αμέσως μετά το άλμα θα έχει μέγιστο μέτρο και πόσο θα είναι αυτό;

Με δεδομένες τις γωνίες που υπολογίσατε στο ερώτημα (Α) να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

Β. Κάποιος ισχυρίζεται ότι η μεταβολή της ορμής της σανίδας κατά το άλμα είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής των βατράχων. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό;

Γ. Να υπολογίσετε:

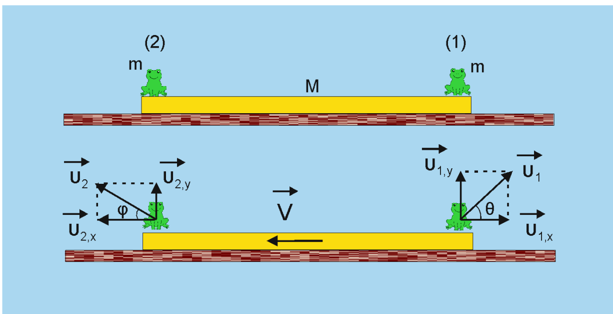
α. τη μεταβολή της ορμής της σανίδας κατά το άλμα

β. το μέτρο της μεταβολής της ορμής των βατράχων κατά το άλμα

γ. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του συστήματος σανίδα-βατραχάκια κατά το άλμα

Δ. ποιο είναι το μέτρο της τελικής ταχύτητας που θα αποκτήσει η σανίδα;

Απάντηση



Α. Το σύστημα σανίδα – βατραχάκια είναι μονωμένο στον άξονα x'x κατά το άλμα των βατράχων. Έτσι:

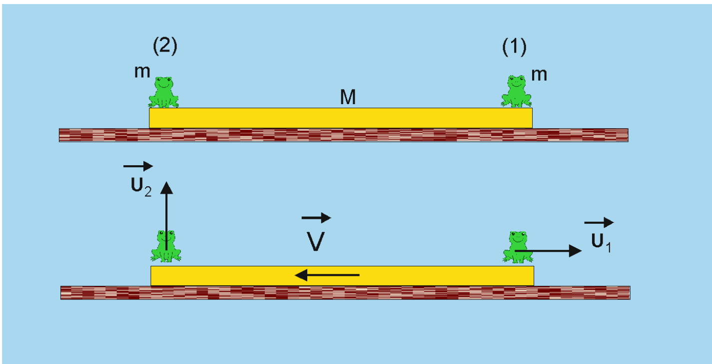
$$\vec{P}_{αρχ,x} = \vec{P}_{τελ,x} \xrightarrow{(+)}$$
$$\to 0 = m \cdot υ_{1,x} - m \cdot υ_{2,x} - M \cdot V \to$$
$$\to M \cdot V = m \cdot υ_1 \cdot συνθ - m \cdot υ_2 \cdot συνφ \to$$
$$\to V = \frac{m \cdot υ \cdot (συνθ - συνφ)}{M} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι για να είναι μέγιστο το μέτρο της ταχύτητας της σανίδας αμέσως μετά το άλμα, πρέπει η παράσταση συνθ - συνφ να είναι μέγιστη, οπότε αφού θ,φ ανήκουν στο [0,π/2], θα πρέπει συνθ =1 και συνφ = 0. Επομένως θα είναι θ = 0 και φ = π/2, δηλαδή το βατραχάκι (1) πρέπει να πηδήξει με οριζόντια ταχύτητα προς τα δεξιά και το βατραχάκι (2) με κατακόρυφη ταχύτητα. Από την (1) προκύπτει $V_{max} = \frac{m \cdot υ}{M}$

Σχόλιο

Θα μπορούσε να είναι θ = π/2 και φ = 0, οπότε απλά η ταχύτητα της σανίδας θα προέκυπτε προς τα δεξιά…

Για τα επόμενα ερωτήματα θα έχουμε την εικόνα του σχήματος.



Β. Το σύστημα σανίδα – βατραχάκια είναι μονωμένο κατά το άλμα μόνο στον άξονα x'x, αφού $\Sigma\vec{F}_{εξ,x} = 0$.

Επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται μόνο στον άξονα x'x συνεπώς η μεταβολή της ορμής της σανίδας κατά το άλμα είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής των βατράχων μόνο στον άξονα x'x. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

Γ. α. $\Delta\vec{P}_{σαν} = \vec{P}_{τελ,σαν} - \vec{P}_{αρχ,σαν} \to |\Delta\vec{P}_{σαν}| = |-M \cdot V - 0| \to |\Delta\vec{P}_{σαν}| = M \cdot \frac{m \cdot υ}{M} \to |\Delta\vec{P}_{σαν}| = m \cdot υ$

με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

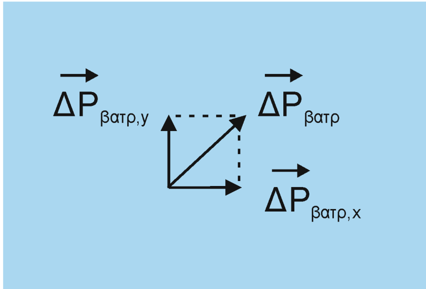
β. $\Delta\vec{P}_{βατράχων,x} = \vec{P}_{τελ,βατράχων,x} - \vec{P}_{αρχ,βατράχων,x} \to |\Delta\vec{P}_{βατράχων,x}| = |m \cdot υ_1 - 0| \to |\Delta\vec{P}_{βατράχων,x}| = m \cdot υ$

Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού $\Delta\vec{P}_{σαν} = -\Delta\vec{P}_{βατράχων,x} \to |\Delta\vec{P}_{σαν}| = |-\Delta\vec{P}_{βατράχων,x}|$

$$\Delta\vec{P}_{βατράχων,y} = \vec{P}_{τελ,βατράχων,y} - \vec{P}_{αρχ,βατράχων,y} \to |\Delta\vec{P}_{βατράχων,y}| = |m \cdot υ_2 - 0| \to |\Delta\vec{P}_{βατράχων,y}| = m \cdot υ$$

Επομένως η μεταβολή της ορμής των βατράχων κατά το άλμα θα έχει μέτρο

$$\left|\Delta\vec{P}_{\beta\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\chi\omega\nu}\right| = \sqrt{\left|\Delta\vec{P}_{\beta\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\chi\omega\nu,x}\right|^2 + \left|\Delta\vec{P}_{\beta\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\chi\omega\nu,y}\right|^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \left|\Delta\vec{P}_{\beta\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\chi\omega\nu}\right| = m\cdot\upsilon\cdot\sqrt{2}$$



Από το τελευταίο επιβεβαιώνεται ότι κατά το άλμα $\Delta\vec{P}_{\sigma\alpha\nu} \neq \Delta\vec{P}_{\beta\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\chi\omega\nu}$

γ. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος σανίδα – βατραχάκια κατά το άλμα στον x'x είναι ίση με μηδέν, επομένως $\left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma,x}\right| = 0$

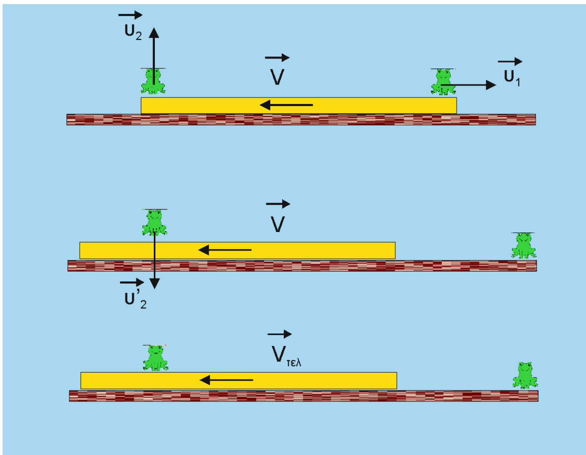
Η μεταβολή της ορμής του συστήματος σανίδα – βατραχάκια κατά το άλμα στον y'y είναι ίση με αυτήν των βατράχων, δηλαδή

$$\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma,y} = \Delta\vec{P}_{\beta\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\chi\omega\nu,y} \rightarrow \left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma,y}\right| = m\cdot\upsilon$$

Επομένως η μεταβολή της ορμής του συστήματος σανίδα – βατραχάκια κατά το άλμα έχει μέτρο $\left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}\right| = \sqrt{\left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma,x}\right|^2 + \left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma,y}\right|^2} \rightarrow \left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}\right| = m\cdot\upsilon$

και κατεύθυνση προς τα πάνω.

Δ. Κατά τη διάρκεια του άλματος του βατράχου (2) η σανίδα θα μετατοπιστεί προς τα αριστερά, επομένως κάποια στιγμή θα προσγειωθεί στη σανίδα και από εκεί και μετά θα κινούνται σαν ένα σώμα (εκτός αν αποφασίσει να ξαναπηδήξει…). Κατά τη διάρκεια της προσγείωσης του βατράχου το σύστημα σανίδα – βάτραχος είναι μονωμένο στον άξονα x'x



$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi,x} = \vec{P}_{\tau\epsilon\lambda,x} \rightarrow -M\cdot V = -(M+m)\cdot V_{\tau\epsilon\lambda} \rightarrow V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{M\cdot V}{M+m} \rightarrow V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{M\cdot\frac{m\cdot\upsilon}{M}}{M+m} \rightarrow V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{m\cdot\upsilon}{M+m}$$

Παπάζογλου Αποστόλης

apostolospapazoglou@gmail.com