

Указания к решению

9 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число, третья степень которого кратна числу 588.

Ответ: 42

Решение

Пусть искомое число равно a . По условию $a^3 = k \cdot 588$. Поскольку $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$, то $a^3 = k \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$. Так как ищем a наименьшее, то $k = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Тогда $a^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$ и $a = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

2. Докажите, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{65}{66} < \frac{1}{10}$$

Решение: смотри учебное пособие «Математика 8» авторов Л.А.Латотина, Б.Д. Чеботаревского в пункте 12 пример 4.

3. Диагональ разделяет трапецию на два треугольника, площади которых относятся как 3 : 7. Найдите отношения площадей четырехугольников, на которые данную трапецию разделяет ее средняя линия.

Ответ: 2:3

Решение. Пусть ABCD – трапеция и AD || BC, MN – средняя линия.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, высота трапеции равна h . Тогда $S_1 = \frac{1}{2}bh$; $S_2 =$

$$\frac{1}{2}ah; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{b}{a} = \frac{3}{7}, \quad b = \frac{3}{7}a, \quad MN = \frac{a+b}{2} = \frac{a + \frac{3}{7}a}{2} = \frac{10a}{7 \cdot 2} = \frac{5}{7}a.$$

$$S_{MBCN} = \frac{MN + BC}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{\frac{5}{7}a + \frac{3}{7}a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{8a}{7 \cdot 2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{4a}{7} \cdot \frac{h}{2};$$

$$S_{AMND} = \frac{AD + MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a + \frac{5}{7}a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{12a}{7 \cdot 2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6a}{7} \cdot \frac{h}{2};$$

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{4}{7}a \cdot \frac{h}{2}}{\frac{6}{7}a \cdot \frac{h}{2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4. Можно ли, пользуясь только операциями сложения, вычитания и умножения, составить из выражений $3x^2 + x$ и $3x$ выражение, тождественно равное x ?

Ответ: нет, нельзя

Предположим, что составить выражение, тождественно равное x , можно, то есть для всех x выполняется равенство $f(3x^2 + x; 3x) = x$. Но при $x = 2/3$ $3x^2 + x = 3x = 2$, следовательно, левая часть равенства принимает целое значения, а правая — дробное (равна $2/3$).

5. Может ли квадратное уравнение с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 2007?

Ответ: не может

Решение

Допустим, что квадратное уравнение $a^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — целые числа, причем $a \neq 0$, имеет дискриминант, равный 2007:

$$b^2 - 4ac = 2007.$$

$$\text{Заметим, что } 2007 = 2025 - 18 = 45^2 - 18.$$

$$\text{Имеем: } b^2 - 4ac = 45^2 - 18; \quad b^2 - 45^2 = 4ac - 18; \quad (b - 45)(b + 45) = 4ac - 18;$$

$$(b - 45)(b + 45) = 4(ac - 4) - 2; \tag{1}$$

Если b — четное, то числа $b - 45$ и $b + 45$ — нечетные. Тогда левая часть (1) нечетная, а правая — четная и равенство невозможно.

Если b — нечетное, то числа $b - 45$ и $b + 45$ — четные. Тогда левая часть (1) четная и при этом делится на 4, а правая часть не делится на 4. Равенство в этом случае также невозможно.