

Практичне заняття №8 з курсу «Сигнали і процеси»

Задача 1

Заданий коефіцієнт передачі кола

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\omega}{j\omega^2 + 2\omega - j}$$

Запишіть функцію передачі $K(p)$ для цього кола.

Який алгоритм? Що будемо робити з $\dot{K}(j\omega)$, щоб отримати $K(p)$?

Рішення

Наскільки ми знаємо, щоб отримати $K(p)$ при заданому $\dot{K}(j\omega)$ необхідно зробити заміну $p = j\omega$. Для цього спочатку перепишемо заданий коефіцієнт таким чином, щоб оператор $j\omega$ містився в ньому в явному вигляді

$$K(j\omega) = \frac{\omega}{j\omega^2 + 2\omega - j} = \frac{j}{j} \frac{\omega}{j\omega^2 + 2\omega - j} = \frac{j\omega}{j^2\omega^2 + 2j\omega - j^2} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega - (\sqrt{-1})^2} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$$

Тепер зробимо заміну

$$K(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 1}$$

Задача 2

Знайти функцію передачі $K(p)$ кола, показаного рис. 1.

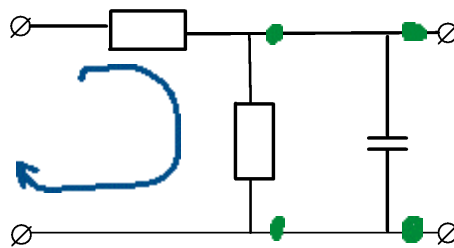


Рис. 1

Рішення

Нам необхідно знайти $K(p)$, тому ми можемо записувати комплексні опори одразу як функції оператора $p = \sigma + j\omega$.

Паралельне з'єднання R_2 та C можемо розглядати як деякий еквівалентний опір.

Як записати еквівалентний опір двох паралельно увімкнених елементів?

Відомо, що якщо два комплексних опора z_1 та z_2 з'єднані паралельно, еквівалентний опір

$$\text{дорівнює } \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}.$$

Тоді опір паралельного з'єднання R_2 та C дорівнює

$$z_{R_2C} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_2}{pCR_2 + 1}$$

Після обчислення z_{R_2C} ми, за суттю, отримаємо задачу аналогічну RC-колу, тільки замість комплексного опору ємності, ми маємо z_{R_2C} . Тоді отримаємо

$$K(p) = \frac{z_{R_2C}}{z_{BX}} =$$

$$K(p) = \frac{z_{R_2C}}{z_{BX}} = \frac{\frac{R_2}{pCR_2 + 1}}{\frac{R_2}{pCR_2 + 1} + R_1} = \frac{R_2}{R_2 + R_1 \cdot (pCR_2 + 1)} = \frac{R_2}{pCR_1R_2 + R_1 + R_2}$$

Задача 3

Для функції передачі $K(p) = \frac{1}{1 + p \cdot 10^{-2}}$ необхідно зобразити нулі та полюси на комплексній площині (вздовж горизонтальної осі – $\text{Re}(p)$, вздовж вертикальної – $\text{Im}(p)$).

Примітка: нулі зазвичай зображають у вигляді кіл, полюси – хрестиків.

Рішення

Що таке нулі та полюси функції передачі $K(p)$?

Найбільш цікавими є з практичної точки зору лінійні стаціонарні системи, що описуються лінійними диференційними рівняннями з постійними коефіцієнтами. Функція передачі таких систем являє собою відношення двох поліноміальних функцій від змінної p . **Полюс** – це значення, при якому знаменник цієї функції звертається на нуль, а **нуль** – де чисельник звертається на нуль.

Скільки в нашому прикладі нулів?

Скільки в нашому прикладі полюсів?

Відповідно, наша функція не має нулів, а має один полюс в точці $p = -100$ (тоді $1 + p \cdot 10^{-2} = 0$).

Якщо $p = -100$, то $1 + p \cdot 10^{-2} = 1 + (-100) \cdot 10^{-2} = 1 - \frac{100}{100} = 1 - 1 = 0$

Відповідне, графічне зображення нулів та полюсів показано на рис. 2

Як на карті нулів та полюсів позначаються нулі і як позначаються полюси?

Для графічного зображення передаточної функції будують карту нулів та полюсів (рис. 11.5, хрестики – полюси, кола – нулі).

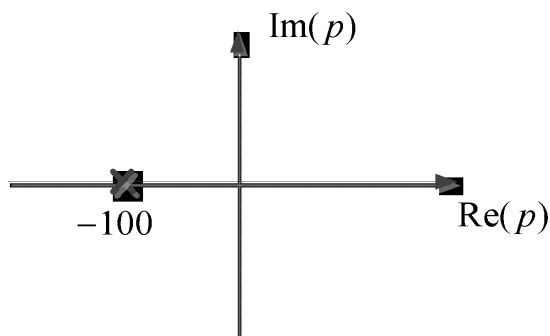


Рис. 2

Задача 4

Нулі та полюси функції передачі показані на рис. 3

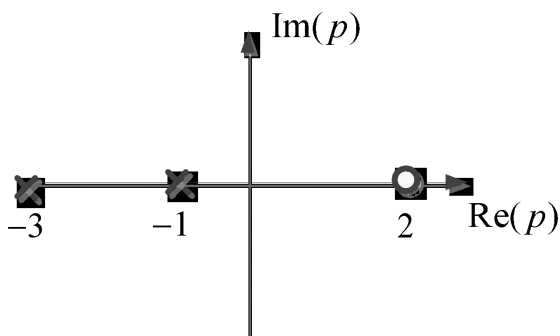


Рис. 3

Оберіть один з варіантів функції $K(p)$, який відповідає нулям та полюсам на рис. 3.

Варіанти:

а) $K(p) = \frac{(p+3)(p+1)}{p-2}$	б) $K(p) = \frac{p-2}{(p-3)(p-1)}$
в) $K(p) = \frac{2p-4}{p^2+4p+3}$	г) $K(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)}$

Згідно з рис. 3 ми маємо нуль при $p = 2$ та два полюси при $p = -3, -1$.

У варіанті а) маємо два нулі та один полюс, це не наш варіант.

У варіанті б) полюси при $p = 1, 3$, не наш варіант.

У варіанті в) нуль при $p = 2$, а полюси треба знайти.

Якщо $p = -1$ отримаємо $p^2 + 4p + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$,

при $p = -3$ отримаємо $p^2 + 4p + 3 = 9 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$,
тобто вірний варіант в)

Перевіримо, про всяк випадок варіант г). Очевидно, що в ньому не має нулів, тобто це не наш варіант.

Задача 5

Роздивимось RC-коло, в якому вихідний сигнал знімаємо з ємності (рис. 1).

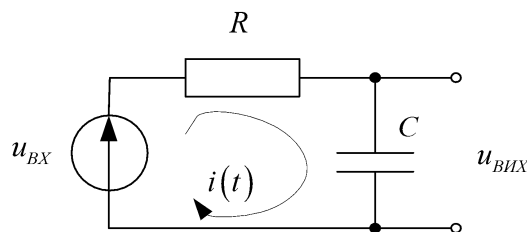


Рис. 1

Визначимо імпульсну характеристику такого кола.

Що таке імпульсна характеристика лінійного стаціонарного кола?

Імпульсна характеристика це реакція системи на дельта-функцію, тобто ми маємо знайти вихідний сигнал при входньому у вигляді дельта-функції.

Згадаємо диференціальне рівняння для RC-кола

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = u_{BX}.$$

Якщо виконується умова $\tau \left| \frac{du_C}{dt} \right| \gg u_C$, то

$$\tau \frac{du_C}{dt} \approx u_{BX} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} \approx \frac{u_{BX}}{\tau} \Rightarrow$$

$$u_C = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{BX}(\xi) d\xi$$

– таке коло має назву інтегруючого та часто використовується як згладжуючий фільтр.

Коефіцієнт передачі такого кола ми теж вже розглядали

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

Тобто тепер нам треба знайти $u_{VHX}(t)$ при $u_{BX}(t) = \delta(t)$, для цього виконаємо наступні кроки:

1. Знаходимо образ за Лапласом від входнього сигналу $u_{BX}(p) = L\{\delta(t)\} = 1$ (знаходимо з таблиці основних перетворень Лапласа).

2. Знаходимо образ вихідного сигналу, для цього треба знати операторний коефіцієнт кола,

для нашого кола $K(p) = \frac{1}{1 + p\tau}$, тоді

$$u_{BHX}(p) = K(p)u_{BX}(p) = \frac{1}{1+p\tau} \cdot 1 = \frac{1}{1+p\tau},$$

3. Останній етап: визначення $h(t) = u_{BHX}(t) = L^{-1}\{u_{BHX}(p)\}$.

$$L\{\sigma(t)e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + p},$$

З таблиць образів за Лапласом знаходимо $\sigma(t)$ – функція Хевісайда (одиначний стрибок в нулі), вона забезпечує виконання умови фізичної реалізації: імпульсна характеристика може існувати тільки при позитивних значеннях t .

Перепишемо наш вираз в більш зручному вигляді

$$\frac{1}{1+p\tau} = \frac{1/\tau}{1/\tau + p}, \text{ тоді } L^{-1}\left\{\frac{1/\tau}{1/\tau + p}\right\} = \frac{1}{\tau} L^{-1}\left\{\frac{1}{1/\tau + p}\right\} = \left|\alpha = \frac{1}{\tau}\right| = \frac{1}{\tau} \sigma(t) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Таким чином, отримаємо

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \sigma(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{або} \quad h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, t > 0.$$

Задача 6

Знайти перехідну характеристику системи (рис. 1).

Що таке перехідна характеристика системи?

Як ми вже знаємо, **перехідна характеристика кола** – це його реакція на функцію Хевісайда. Тобто наш вхідний сигнал – функція Хевісайда $\sigma(t)$, тобто наші сигнали $u_{BX}(t) = \sigma(t)$, $u_{BHX}(t) = g(t)$. Для розв'язання цієї задачі застосуємо операторний метод, тобто послідовність наступних дій:

$$U_{BX}(p) = L\{\sigma(t)\} = \frac{1}{p},$$

1) Знаходимо образ за Лапласом від вхідного сигналу $U_{BX}(p) = \frac{1}{p}$, ми вже раніше знаходили образ для функції Хевісайда.

2) Знаходимо образ вихідного сигналу, для цього необхідно знати операторний

коефіцієнт системи, для нашого кола $K(p) = \frac{1}{1+p\tau}$, тоді

$$U_{BHX}(p) = K(p)U_{BX}(p) = \frac{1}{1+p\tau} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p+p^2\tau} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau},$$

перевіримо $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau} = \frac{(p+1/\tau) - p}{p(p+1/\tau)} = \frac{p+1/\tau - p}{p^2 + p/\tau} = \frac{1/\tau}{p^2 + p/\tau} = \frac{1}{\tau p^2 + p}$, зішлося ☺.

3) Останній етап: визначення $g(t) = u_{BHX}(t) = L^{-1}\{U_{BHX}(p)\}$.

Для цього необхідно знайти оригінали для двох отриманих складових.

Оригінал для $\frac{1}{p} \boxtimes \sigma(t)$.

Оригінал для $\frac{1}{p+1/\tau}$ можна знайти, якщо використати властивість ПЛ про множення на експоненту $f(t) \cdot e^{-\alpha t} \Leftrightarrow F(p+\alpha) \Rightarrow \sigma(t) \cdot e^{-t/\tau} \Leftrightarrow F\left(p+\frac{1}{\tau}\right)$, у нас $\sigma(t) \cdot e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p+\alpha}$, тобто в нашому випадку $\alpha = 1/\tau$, тоді $\frac{1}{p+1/\tau} \Leftrightarrow \sigma(t) \cdot e^{-t/\tau}$.

Інакше кажучи: у відповідності до таблиць для образа $\frac{1}{p+\alpha}$ оригінал у часі має вигляд $\sigma(t) \cdot e^{-\alpha t}$. У нас образ $\frac{1}{p+1/\tau}$, тобто $\alpha = 1/\tau$, тоді у часі друга складова записується як $\sigma(t) \cdot e^{-t/\tau}$.

Отримаємо

$$g(t) = u_{BHX}(t) = L^{-1} \left\{ U_{BHX}(p) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1/\tau} \right\} = \\ = \sigma(t) - \sigma(t) e^{-t/\tau} = \sigma(t) (1 - e^{-t/\tau})$$

Таблиця образів Лапласа

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p - \lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\text{arctg } p$
$t^n e^{\lambda t}, n \in N$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}(1 - e^{-t})$	$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p - \lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\delta(t - a), a > 0$	e^{-ap}
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		