

Chapitre VIII : Variations de fonction

Objectif : Les élèves doivent se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.

Compétences :

- Décrire les variations d'une fonction
- Comparer des images en utilisant un tableau de variations
- Déterminer les extremum d'une fonction à l'aide d'un tableau de variations
- Déterminer les variations d'une fonction affine
- Utiliser les variations des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube
- Résoudre des inéquations à l'aide de variations

Partie I : Variations d'une fonction

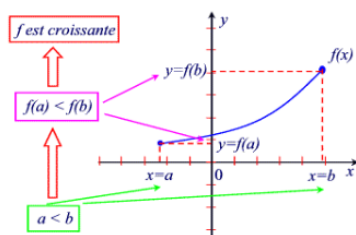
I. Définition des variations d'une fonction

Définition (heuristique)

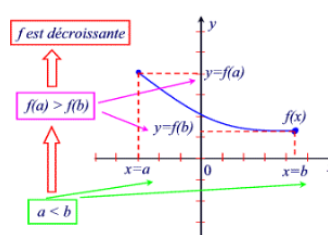
Une fonction f est croissante sur un intervalle $[a ; b]$ si : "*quand la variable x augmente sur $[a ; b]$, son image $f(x)$ augmente*"
 Une fonction f est décroissante sur un intervalle $[a ; b]$ si : "*quand la variable x augmente sur $[a ; b]$, son image $f(x)$ diminue*"

Définition (formelle)

Une fonction f est croissante sur un intervalle $[a ; b]$ si pour tous nombres réels c et d de $[a ; b]$: $c < d \Rightarrow f(c) \leq f(d)$
 Une fonction f est décroissante sur un intervalle $[a ; b]$ si pour tous nombres réels c et d de $[a ; b]$: $c < d \Rightarrow f(c) \geq f(d)$



Exemple :
 Si f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
 Comme $5 < 7$, alors $f(5) < f(7)$



Exemple :
 Si f est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,
 Comme $3 < 8$, alors $f(3) > f(8)$

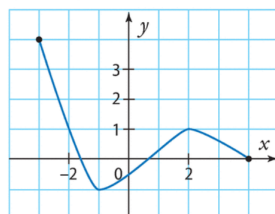
II. Tableau de variation

Tableau de variations

Si un tableau de variations est donné, on peut en extraire des informations qui ont le statut d'affirmations démontrées. Si au contraire le tableau de variations est tiré d'un graphique, ces informations n'ont que le statut de conjectures.

Exemple :

f est une fonction définie sur $[-3 ; 4]$ dont voici la courbe ci-dessous.



Son tableau de variations est le suivant.

x	-3	-1	2	4
f	4	-1	1	0

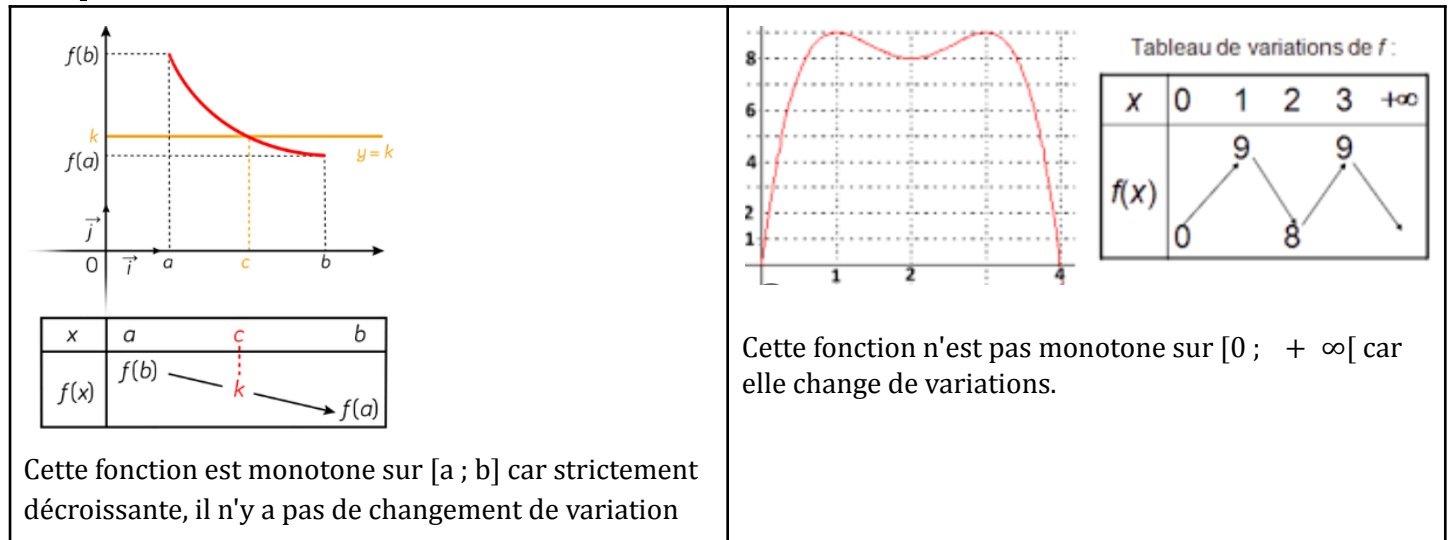
On peut lire que f est décroissante sur $[-3 ; -1]$, croissante sur $[-1 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 4]$.

III. Fonction monotone

Définition : fonction monotone

Une fonction est *monotone* sur un intervalle I si elle ne change pas de sens de variation sur cet intervalle I

Exemple :



IV. Extremum d'une fonction

Définitions

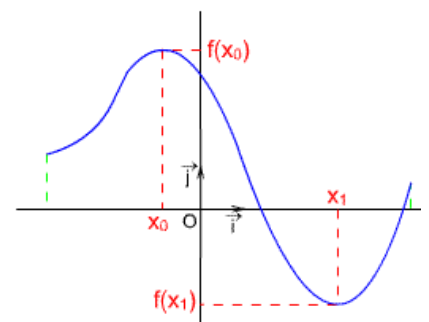
- Dire que f atteint son **maximum** en x_0 sur $[a ; b]$ signifie que :
pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq f(x_0)$

Le maximum de f sur $[a ; b]$ est alors $f(x_0)$. Cela veut dire que toutes les images par la fonction f sont inférieures ou égales à $f(x_0)$.

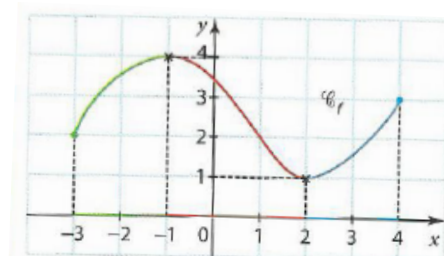
- Dire que f atteint son **minimum** en x_1 sur $[a ; b]$ signifie que :
pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq f(x_1)$

Le minimum de f sur $[a ; b]$ est alors $f(x_1)$. Cela veut dire que toutes les images par la fonction f sont supérieures ou égales à $f(x_1)$.

Le minimum et le maximum de f sont appelés des **extremum**.



Exemple :



Le minimum de cette fonction est 1 atteint pour $x = 2$ et le maximum de la fonction est 4 atteint pour $x = -1$

Partie II : Fonctions de référence

I. Définitions des fonctions de référence

Formule	Tableau de variation	Courbe								
La fonction carré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow x^2$	Tableau de variations <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"> 0 </td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$	0			
x	$-\infty$	0	$+\infty$							
$f(x)$	0									
La fonction cube $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow x^3$	Tableau de variations <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Variations de $f(x)$</td><td colspan="2"> 0 </td></tr></table>	x	0	$+\infty$	Variations de $f(x)$	0				
x	0	$+\infty$								
Variations de $f(x)$	0									
La fonction racine carrée $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow \sqrt{x}$	Tableau de variations <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Variations de f</td><td colspan="2"> 0 </td></tr></table>	x	0	$+\infty$	Variations de f	0				
x	0	$+\infty$								
Variations de f	0									
La fonction inverse $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow \frac{1}{x}$	Tableau de variations <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Variations de f</td><td> </td><td></td><td> </td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	Variations de f				
x	$-\infty$	0	$+\infty$							
Variations de f										
Les fonctions affines $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow mx + p$ Avec $m > 0$	Tableau de variations <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-p/m$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td> </td><td></td><td> </td></tr></table>	x	$-\infty$	$-p/m$	$+\infty$	$f(x)$				
x	$-\infty$	$-p/m$	$+\infty$							
$f(x)$										
Les fonctions affines $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow mx + p$ Avec $m < 0$	Tableau de variations <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-p/m$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td> </td><td></td><td> </td></tr></table>	x	$-\infty$	$-p/m$	$+\infty$	$f(x)$				
x	$-\infty$	$-p/m$	$+\infty$							
$f(x)$										

II. Variations des fonctions affines

Fonction affine

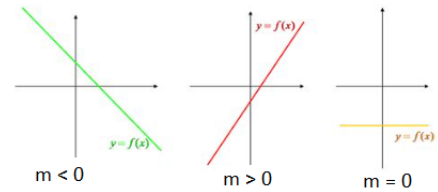
Une fonction affine est une fonction qui, à tout réel x associe le réel $mx + p$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow mx + p$

Tableau de variations si $m > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		

Tableau de variations si $m < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		



Démonstration :

Prenons $f(x) = -2x + 6$, soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

$$f(a) - f(b) = (-2a + 6) - (-2b + 6) = -2a + 2b = -2(a - b)$$

comme $a < b$ donc $a - b < 0$ et donc $f(a) - f(b) > 0$, soit $f(a) > f(b)$

on en conclut que la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$

Prenons $f(x) = 3x + 8$, soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

$$f(a) - f(b) = (3a + 8) - (3b + 8) = 3a - 3b = 3(a - b)$$

comme $a < b$ donc $a - b < 0$ et donc $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$

on en conclut que la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

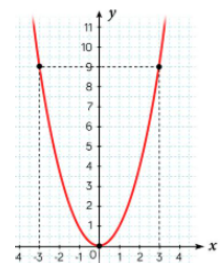
III. Variations de la fonction carré

Fonction carré

La fonction carré est la fonction qui, à tout réel x associe le réel x^2 , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$	0	$+\infty$



Démonstration :

Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$

On calcule $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (3e identité remarquable)

1er cas : On se place sur $] -\infty ; 0]$ à savoir $a \leq 0$ et $b \leq 0$

donc $a + b \leq 0$ et comme $a < b$ alors $a - b < 0$

Comme le produit de deux réels négatif est positif, on en déduit que $f(a) - f(b) \geq 0$ soit $f(a) \geq f(b)$

Ainsi si $a < b$ on obtient $f(a) \geq f(b)$, ce qui prouve que la fonction est décroissante sur $] -\infty ; 0]$

2e cas : On se place sur $[0 ; +\infty[$ à savoir $a \geq 0$ et $b \geq 0$

donc $a + b \geq 0$ et comme $a < b$ alors $a - b < 0$

Comme le produit d'un réels négatif par un positif est négatif, on en déduit que $f(a) - f(b) \leq 0$ soit $f(a) \leq f(b)$

Ainsi si $a < b$ on obtient $f(a) \leq f(b)$, ce qui prouve que la fonction est croissante sur $[0 ; +\infty[$

IV. Variations de la fonction inverse

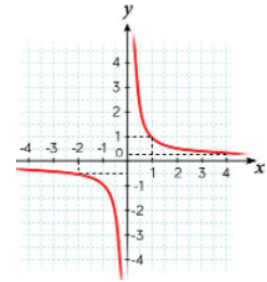
Fonction inverse

La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel x non nul associe le réel $\frac{1}{x}$,

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{1}{x}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			



Démonstration : Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$, avec $a < b$

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

Sur $] -\infty ; 0[$,

comme $a < b$ alors $b - a > 0$,

comme $a \in] -\infty ; 0[$ et $b \in] -\infty ; 0[$ alors $ab > 0$

donc $f(a) - f(b) > 0$ et $f(a) > f(b)$, la fonction est décroissante sur $] -\infty ; 0[$

Sur $]0 ; +\infty[$,

comme $a < b$ alors $b - a > 0$,

comme $a \in]0 ; +\infty[$ et $b \in]0 ; +\infty[$ alors $ab > 0$

donc $f(a) - f(b) > 0$ et $f(a) > f(b)$, la fonction est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

V. Variations de la fonction racine carrée

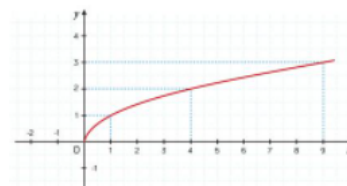
Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction qui, à tout réel x positif, associe le réel x^2 ,

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \sqrt{x}$$

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$		



Démonstration :

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Comme $a < b$ alors $a - b < 0$

Comme $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{b} > 0$ alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

donc par quotient, $f(a) - f(b) < 0$ et $f(a) < f(b)$

Ce qui prouve que la fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

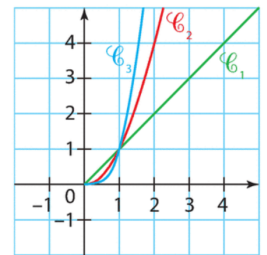
Partie III : Signe et opérations

I. Positions relatives de courbes

Théorème

On considère les courbes C_1 , C_2 et C_3 d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geq 0$.

- Si $x \in [0 ; 1[$, alors C_1 est située au-dessus de C_2 et C_2 est au-dessus de C_3
- Si $x = 1$, les trois courbes se coupent au point de coordonnées $(1 ; 1)$
- Si $x \in]1 ; +\infty[$, alors C_3 est située au-dessus de C_2 et C_2 est au-dessus de C_1



Démonstration :

1. On compare x^2 et x , on étudie le signe de $x^2 - x$
 $x^2 - x = x(x - 1)$ $x \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$ ssi $x \geq 1$
 si $x = 0$, alors $x^2 - x = 0$ et si $x = 1$ alors $x^2 - x = 0$
 On étudie le signe dans un tableau de signes

x	0	1	$+\infty$	
x	0	+	+	
$x-1$	-	0	+	
$x(x-1)$	0	-	0	+

Ainsi si $x \in [0 ; 1[$, alors C_1 est située au-dessus de C_2 et si $x \in]1 ; +\infty[$, C_2 est au-dessus de C_1

2. On compare x^3 et x^2 , on étudie le signe de $x^3 - x^2$
 $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ $x \geq 0$, $x^2 \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$ ssi $x \geq 1$
 si $x = 0$, alors $x^3 - x^2 = 0$ et si $x = 1$ alors $x^3 - x^2 = 0$
 On étudie le signe dans un tableau de signes

x	0	1	$+\infty$	
x^2	0	+	+	
$x-1$	-	0	+	
$x^2(x-1)$	0	-	0	+

Ainsi si $x \in [0 ; 1[$, alors C_2 est située au-dessus de C_3 et si $x \in]1 ; +\infty[$, C_3 est au-dessus de C_2

II. Signe d'une fonction affine

Théorème

Soient m et p deux nombres réels avec $m \neq 0$.

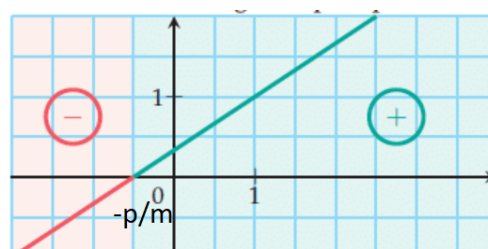
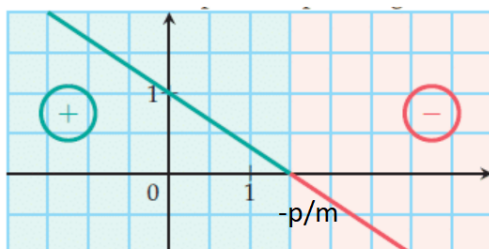
La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ s'annule et change de signe en $x = -p/m$

• Si $m < 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

• Si $m > 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+



Exemple : Le tableau de signes de la fonction affine sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = -3x + 4$ est :

$g(x) > 0$ est équivalent à : $-3x + 4 > 0$

On résout cette inégalité :

$$-3x + 4 > 0$$

$$-3x > -4$$

$$x < \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

donc $g(x) > 0$ lorsque $x < \frac{4}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-3x+4$	+	0	-

III. Signes et opérations

Règle : Signe d'un produit ou d'un quotient

Pour déterminer le signe du produit (ou du quotient) de deux fonctions, on construit un tableau de signes.

- 1ère ligne : ensemble des valeurs de x
- 2e et 3e ligne, signe de chaque fonction
- 4e ligne, signe du produit (ou du quotient) des deux fonctions selon la règle des signes.

Exemple : Etudier le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (3x + 4)(-2x + 6)$

On étudie :

- $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$
- $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	3	$+\infty$
$3x+4$	-	0	+	+
$-2x+6$	+	+	0	-
$h(x)$	-	0	+	-