

Corrigé exercices n° 10, 14, 16, 61, 64, 66 p.334-337

Exercice n°10 p.334 :

Les résultats seront arrondis au millième le plus proche.

10 La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Déterminer les probabilités suivantes :a. $P(0,1 \leq T \leq 0,2)$ b. $P(T \leq 1)$ c. $P(T > 0,5)$

$$a) P(0,1 \leq T \leq 0,2) = \int_{0,1}^{0,2} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{0,1}^{0,2} = -e^{-0,2} + e^{-0,1} = e^{-0,1} - e^{-0,2} \approx 0,09$$

$$b) P(T \leq 1) = P(0 \leq T \leq 1) = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$$

$$c) P(T > 0,5) = 1 - P(0 \leq T \leq 0,5) = 1 - (1 - e^{-0,5}) = e^{-0,5} \approx 0,61$$

Exercice 14 p.334 :**14** Pour une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , on a $P(T > 3) = 0,2$.1. Exprimer $P(T > 3)$ en fonction de λ .2. En déduire la valeur de λ .3. Déterminer $E(T)$.

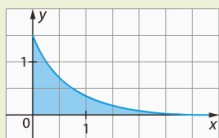
$$1. P(T > 3) = e^{-3\lambda} = 1 - P(0 \leq X \leq 3)$$

$$2. P(T > 3) = e^{-3\lambda} = 0,2 \quad \text{si } a = b \text{ alors } \ln a = \ln b$$

$$\ln(e^{-3\lambda}) = \ln(0,2) \quad \ln \text{ et } \exp \text{ sont réciproques donc } \ln(\exp x) = x$$

$$-3\lambda = \ln(0,2) \text{ donc } \lambda = \ln(0,2) / -3 \approx 0,54$$

$$3. E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{\ln(0,2)}{-3}} = \frac{-3}{\ln(0,2)} \approx 1,86$$

Exercice 16 p.334 :**16** La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ . La courbe ci-dessous représente la fonction de densité de probabilité de la loi de X .1. Lire, sur le graphique, une valeur approchée de λ à 0,1 près.2. Calculer $P(X < 1)$ en utilisant la valeur de λ de la question 1.

1. λ est l'ordonnée de la valeur 0 ; $f(0) = \lambda e^{-\lambda \times 0} = \lambda$
ici on obtient $\lambda = 1,5$

$$2. P(X < 1) = P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 1,5 e^{-1,5x} dx = \left[1,5 \times \frac{e^{-1,5x}}{-1,5} \right]_0^1 = 1 - e^{-1,5} \approx 0,78$$

Exercice 61 p.337 :

Pour les cas où cela est nécessaire, les résultats seront arrondis au millième le plus proche.

61 La durée de vie exprimée en années d'un appareil électronique d'un certain modèle est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'un appareil de ce modèle ?

2. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'un appareil de ce modèle soit inférieure à sept ans ? supérieure à sept ans ? comprise entre 4 et 7 ans ?

3. Un appareil de ce modèle est encore en fonctionnement au bout de 4 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 7 ans ?

1. $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,2} = 5$ la durée moyenne de vie de cet appareil électronique est de 5 ans.

$$2. P(X < 7) = \int_0^7 0,2e^{-0,2x} dx = 1 - e^{-1,4} \approx 0,75$$

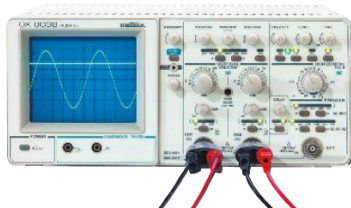
$$P(X > 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$P(4 \leq X \leq 7) = \int_4^7 0,2e^{-0,2x} dx = e^{-0,8} - e^{-1,4} \approx 0,2$$

$$3. P_{(X>4)}(X \leq 7) = \frac{P((X>4) \cap (X \leq 7))}{P(X>4)} = \frac{P(4 < X \leq 7)}{P(X>4)} = \frac{0,2}{e^{-0,8}} \approx 0,451$$

Exercice n°64 p.337 :

64 Le laboratoire de Physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .



1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

$$1. P(X > 10) = e^{-10\lambda} = 0,286$$

On prend le logarithme : $\ln(e^{-10\lambda}) = \ln(0,286)$
 $-10\lambda = \ln(0,286)$ donc $\lambda = \frac{\ln(0,286)}{-10} \approx 0,125$

$$2. P(X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} 0,125e^{-0,125x} dx = \left[0,125 \frac{e^{-0,125x}}{-0,125} \right]_0^{0,5}$$

$$P(X \leq 0,5) = -e^{-0,125 \times 0,5} + 1 \approx 0,06$$

$$3. P_{X>8}(X \geq 10) = P_{X>8}(X \geq 8 + 2) = P(X \geq 2) = e^{-2 \times 0,125} \approx 0,779$$

grâce au fait que la loi soit sans mémoire donc $P_{X>t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$

Exercice n°66 p.337 :

66 Dans une grande entreprise, on observe le temps de fonctionnement normal exprimé en heures séparant deux pannes informatiques. Ce temps appelé « temps de fonctionnement » peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. On a constaté que la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 5 et 10 heures était égale à $\frac{1}{4}$.

a. Montrer que $e^{-10\lambda} - e^{-5\lambda} + \frac{1}{4} = 0$.

b. En déduire la valeur exacte de λ .

2. On prend désormais $\lambda = 0,14$.

a. Déterminer la valeur arrondie à la minute la plus proche de $E(T)$. Que représente ce nombre ?

b. Calculer à 10^{-3} près la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à cinq heures.

c. Calculer à 10^{-3} près la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à neuf heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

$$1. P(5 < X < 10) = 1/4$$

$$a) \int_5^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1/4$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_5^{10} = 1/4 \text{ donc } \frac{-e^{-10\lambda}}{\lambda} + \frac{e^{-5\lambda}}{\lambda} = 1/4$$

$$e^{-10\lambda} - e^{-5\lambda} = -1/4 \text{ donc } e^{-10\lambda} - e^{-5\lambda} + 1/4 = 0$$

$$\text{b) } e^{2x} = \left(e^x\right)^2 \text{ donc } e^{-10\lambda} = (e^{-5\lambda})^2$$

$$\text{On obtient } (e^{-5\lambda})^2 - e^{-5\lambda} + 1/4 = 0$$

$$\text{On pose } X = e^{-5\lambda} \text{ d'où } X^2 - X + 1/4 = 0$$

$$\text{D'après la 2e identité remarquable : } X^2 - X + 1/4 = (X - 1/2)^2$$

$$\text{et } X = 1/2 \text{ d'où } e^{-5\lambda} = 1/2$$

$$\ln(e^{-5\lambda}) = \ln(1/2) \text{ et } \lambda = \frac{\ln(1/2)}{-5} = \frac{\ln 2}{5} \approx 0,14$$

2. a) $E(T) = 1/\lambda \approx 1/0,14 \approx 7,14h$, le temps moyen de fonctionnement est de 7,14h.

$$\text{b) } P(T > 5) = e^{-0,14 \times 5} = 0,497$$

$$\text{c) } P_{X>4}(T > 9) = P_{X>4}(T > 4 + 5) = P(X > 5) = 0,497.$$