

Fiche technique

Professeur : Mouad Zillou

Matière : Mathématiques

Droite dans le plan

Durée : 5 heures

Niveau : TCSF

Outils didactiques : Tableau, livre, craie, règle, calculatrice

attendues

- Utiliser l'outil analytique dans la résolution de problèmes géométriques.
- Utiliser différentes méthodes pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs.

Contenus du programme

- Le repère- Les coordonnées d'un vecteur.
- Deux vecteurs colinéaires.
- Représentation paramétrique d'une droite.
- Équation cartésienne d'une droite

Recommandations pédagogiques

- Il faudra habituer les élèves à utiliser différentes méthodes pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs.

Fichiers utilisés dans la préparation du cours

- Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques.

cours

Distribution périodique du programme de mathématiques

Rôle de l'enseignant

- Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations

Rôle de l'apprenant

- Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions et formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème , propriété
- Répondre aux exercices

Etapes

Contenu du cours

Durée

1. Repère du plan - Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

1. Repère du plan

Définition

Soient O, I et J trois points distincts non alignés.

On pose $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$

*Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ définit un repère du plan.

*Le point O s'appelle l'origine du repère.

*Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ s'appelle base du plan.

*La droite (OI) s'appelle l'axe des **abscisses**.

	*La droite (OJ) s'appelle l'axe des ordonnés. *Si $(OI) \perp (OJ)$ alors le repère $(O, \overset{\vee}{i}, \overset{\vee}{j})$ est un repère orthogonal. *Si $(OI) \perp (OJ)$ et $\ \overset{\vee}{i}\ = \ \overset{\vee}{j}\ = 1$ alors le repère $(O, \overset{\vee}{i}, \overset{\vee}{j})$ est un repère orthonormé	
	<u>2. Coordonnées d'un point - coordonnées d'un vecteur</u> <u>Activité</u> Dans un repère orthonormé du plan $(O, \overset{\vee}{i}, \overset{\vee}{j})$, on considère les points suivants : $A(1;3)$; $B(-1;2)$ et $C(-2;-1)$. - Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overset{\vee}{AB}$; $\overset{\vee}{AC}$ et $\overset{\vee}{BC}$ - Calculer les distances suivantes : AB, AC et BC. - Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes : $2\overset{\vee}{AB}$ et $-3\overset{\vee}{BC}$. - Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes $2\overset{\vee}{AB} + (-3)\overset{\vee}{BC}$ et $\overset{\vee}{AB} + \overset{\vee}{AC}$. - Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$	
	<u>a. Définitions et propriété</u> Soit $(O, \overset{\vee}{i}, \overset{\vee}{j})$ un repère du plan. * Soit M un point du plan. Il existe un seul couple (x, y) tel que $\overset{\vee}{OM} = x\overset{\vee}{i} + y\overset{\vee}{j}$. Le couple (x, y) s'appelle couple de coordonnées du point M tel que x s'appelle abscisse du point M et y s'appelle ordonné du point M, et on écrit $M(x, y)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. * Soit $\overset{\vee}{u}$ un vecteur du plan. Il existe un seul couple (x, y) tel que $\overset{\vee}{u} = x\overset{\vee}{i} + y\overset{\vee}{j}$. Le couple (x, y) s'appelle couple de coordonnées du vecteur $\overset{\vee}{u}$ tel que x s'appelle abscisse du vecteur $\overset{\vee}{u}$ et y s'appelle ordonné du point M, et on écrit $\overset{\vee}{u}(x, y)$ ou $\overset{\vee}{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.	
	<u>b. Multiplication d'un vecteur par un scalaire</u> Soit $\overset{\vee}{u}(x, y)$ un vecteur du plan et soit k un nombre réel. La multiplication du vecteur $\overset{\vee}{u}$ par k est le vecteur $k\overset{\vee}{u}$ qui a pour coordonnées $k\overset{\vee}{u}(kx, ky)$.	

c. Coordonnées d'une somme de deux vecteurs

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan. La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ qui a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v}(x + x' + y + y')$

Exemple :

On a $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(0; -1)$ donc $2\vec{u}(4; -6)$ et $\vec{u} + \vec{v}(2; -4)$

b. Propriété :

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

* Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

* Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

* Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé on a

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple

On considère les points $A(3; 1)$, $B(-1; 2)$ et soit I le milieu $[AB]$

● Les coordonnées : on a $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ donc $\vec{AB}(-4; 1)$

● Les coordonnées du point I : on a $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ donc $I\left(1; \frac{3}{2}\right)$

● La distance AB : on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ donc $AB = \sqrt{17}$

c. Egalité de deux vecteurs

Propriété

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$. On écrit $\vec{u} = \vec{v}$

Evaluation

Soient $\vec{u}(3x + 1; 2)$ et $\vec{v}(4; y - 3)$ deux vecteurs.

Déterminer x et y pour que $\vec{u} = \vec{v}$.

II. Colinéarité de deux vecteurs

1. Déterminant de deux vecteurs

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan.

Le nombre réel $xy' - x'y$ s'appelle le **déterminant** de vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, se note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ tel que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Exemple On considère les vecteurs suivants : $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(3; 4)$

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times 3 = -1$
- $\det(\vec{v}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1 = -\det(\vec{u}, \vec{v})$
- $\det(2\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 4 - 6 \times 3 = -2 = 2 \det(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un nombre réel on a :

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$
- $\det(k\vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, k\vec{v}) = k \times \det(\vec{u}, \vec{v})$

2. Colinéarité de deux vecteurs

Propriété :

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Exemple

On a $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(-1; \frac{-3}{2})$ donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times (\frac{-3}{2}) - 3 \times (-1) = -3 + 3 = 0$

Or on a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$; par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Évaluation

1) On considère les points suivants : $A(1; -8)$, $B(11; 7)$, $C(5; -1)$ et $D(7; 2)$

Montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

2) Étudier l'alignement des points E, F et G dans les cas suivants :

i) $E(-4; 2)$, $F(5; 1)$ et $G(11; 3)$

ii) $E(-2; 3)$, $F(0; -1)$ et $G(-1; 1)$.

III. La droite dans le plan

1. Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit (D) une droite qui passe par deux points distincts A et B . On appelle **vecteur directeur** de la droite (D) tout vecteur qui est colinéaire au vecteur $\vec{AB}$

	Exemple Etant donné une droite (D) d'équation réduite suivante : $(D): y = -x + 1$ On remarque que la droite (D) passe par les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$ par conséquent le vecteur $\overrightarrow{AB}(-1;1)$ est un vecteur directeur de la droite (D). Remarque Si une droite (D) passe par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ alors on écrit $D(A, \vec{u})$	
	2. Equation cartésienne d'une droite Activité : Dans le plan on considère les points $A(3;1)$, $B(-1;2)$ et soit $M(x,y)$ un point de (AB) 1) Que peut dire sur la colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ 2) Dédurre $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB})$ 3) Exprimer $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB})$ en fonction de x et y.	
	Définition : Soient a, b et c des nombres réels où $(a,b) \neq (0,0)$ Toute droite du plan admet une équation de forme $ax + by + c = 0$. L'équation $ax + by + c = 0$ s'appelle une équation cartésienne d'une droite. Propriété : L'ensemble de point $M(x,y)$ du plan qui vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b, a)$. Remarque Soit (D) une droite passe par un point $A(x_A; y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(-b, a)$ et $M(x,y)$ un point du plan. $M \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ Exemple : On considère les points suivants $A(-3;1)$ et $B(-1;4)$ Déterminons l'équation cartésienne de la droite (AB) $M \in D(A, \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow 3(x+3) - 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 11 = 0$ D'où $(AB): 3x - 2y + 11 = 0$ est une équation cartésienne de droite (AB).	

Evaluation	Déterminer une équation cartésienne de la droite $D(A, \vec{u})$ telle que $A(-2;3)$ et $\vec{u}(-1;3)$ Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) telle que : $B(-2;1)$ et $C(-3;2)$	
	<u>3. Représentation paramétrique d'une droite :</u> Soit (D) une droite passe par $A(2;1)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(3,-2)$ et $M(x,y) \in (D)$ 1) Montrer qu'il existe un nombre réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$ 2) Déduire les coordonnées du point M en fonction de t.	
	<u>Définition</u> Soient $A(x_A; y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. Le système $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ s'appelle représentation paramétrique d'une droite passe par le point $A(x_A; y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$. <u>Exemple</u> : Soit (D) une droite passe le point $A(2;-1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1;3)$ Le système $(D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (D). <u>Remarque</u> : Toute droite du plan admet une infinité de représentation paramétrique.	
Evaluation	Soient $A(3;-2)$ et $B(5;4)$ deux points du plan. 1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) 2) Le point $C(4;-1)$ appartient-il à la droite (AB). 3) Donner une équation cartésienne de la droite $(D): \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 + 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$	
	<u>IV. Positions relatives de deux droites définies par ses équations cartésiennes.</u> <u>Propriété</u> Soient (D) et (D') deux droites du plan définies par ses équations cartésienne telles que $(D): ax + by + c = 0$ et $(D'): a'x + b'y + c' = 0$. On dit que (D) et (D') sont :	

	* Parallèles $((D) // (D'))$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$ * Sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$ et en particulier (D) et (D') sont Orthogonales $((D) \perp (D'))$ si et seulement si $aa' + bb' = 0$ <u>Exemple</u> Soient (D) et (D') deux droites telles que : $(D): 3x - y - 1 = 0$ et $(D'): -2x + \frac{2}{3}y + 1 = 0$. Etudions la position relative de (D) et (D') On a $3 \times \frac{2}{3} - (-1) \times (-2) = 2 - 2 = 0$ donc $(D) // (D')$.	
Evaluation	Etudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivants : • $(D): 6x - 2y + 3 = 0$; $(D'): 2x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$ • $(D): x + 2y - 3 = 0$; $(D'): -x - 2y + 4 = 0$ • $(D): 5x - 3y + 2 = 0$; $(D'): 2x - 3y - 5 = 0$ • $(D): -2x - y + 2 = 0$; $(D'): \frac{1}{2}x - y - 7 = 0$	