61GH

e3a

concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Physique PSI

durée 3 heures

L'usage des calculatrices est interdit

*Le problème comporte trois parties largement indépendantes sur le thème général du **chauffage par induction.** La première partie aborde la propagation d'une onde électromagnétique plane dans un métal. La deuxième partie concerne l'étude électromagnétique d'un dispositif à symétrie de révolution (qui a un rôle industriel très important) et la troisième partie s'intéresse à l'évolution de la température dans la pièce cylindrique à chauffer (cas d'une trempe superficielle).*

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que :

- *les explications des phénomènes étudiés, les justifications physiques interviennent dans la notation au même titre que les mises en équations et les applications numériques,*
- *tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions,*
- *tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s,*
- *les données numériques sont précisées à la fin de chaque partie.*

Le chauffage par induction se caractérise et se distingue des autres techniques électro-thermiques par sa capacité à injecter sans contact de l'énergie thermique dans les matériaux conducteurs de l'électricité. Les premières idées théoriques datent des années 1890, elles sont dues à Heaviside et Steinmetz en particulier. S'il a fallu attendre la première guerre mondiale pour voir les premières réalisations industrielles, c'est surtout grâce au progrès rapide de la technologie des sources de puissance (depuis les années 1950) que le chauffage par induction a trouvé des applications allant du soudage de tubes métalliques à grande vitesse à la plaque de cuisson de la ménagère en passant par le traitement thermique en métallurgie.

FIN DE L'EPREUVE

Tournez la page S.V.P.

PREMIERE PARTIE :
ONDE PLANE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN METAL

Une onde électromagnétique plane ($\vec{E}_i$, $\vec{B}_i$, $\vec{k}$) *progressive harmonique de pulsation* $\omega = 2\pi f$ *se propage dans l'air dans la direction* $\vec{u}_x$ *(figure 1 : dans cette partie, le système de coordonnées cartésiennes est utilisé et un point M est repéré par ses coordonnées x,y,z ; la base associée est* ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$). *Le vecteur d'onde associé est* $\vec{k} = k\,\vec{u}_x$ *(avec k > 0) et le champ électrique est* $\vec{E}_i = E_0\sqrt{2}\cos(\omega t - kx)\,\hat{u}_z$ *où* Eo *est un champ constant ; le champ électrique complexe associé est* $\underline{\vec{E}}_i = E_o\, e^{j(\omega t - kx)}\,\vec{u}_z$. *Cette onde incidente se propage vers un conducteur métallique (acier) de conductivité γ , de perméabilité* $\mu_0\,\mu_r$ *(supposée constante pour une température inférieure à 1000 °C) et de permittivité* ε_o *, occupant le demi-espace* $x > 0$. *L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie (indicée R) et à une onde transmise (indicée T) dont les champs électriques s'écrivent ,en notation complexe* $\underline{\vec{E}}_R = \underline{E}_{0R} e^{j(\omega t + k_R x)}\,\vec{u}_z$ et $\underline{\vec{E}}_T = \underline{E}_{0T} e^{j(\omega t - \underline{k}_T x)}\,\vec{u}_z$. (k_R *est réel alors que* $\underline{E}_{0R}$, $\underline{E}_{0T}$ *et* $\underline{k}_T$ *sont a priori complexes).*

Dans tout le problème, c représente la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, ρ(M,t) *est la densité de charges électriques libres,* $\vec{j}$ (M, t) *est le vecteur densité de courant électrique.*

I.1. Rappeler les équations de Maxwell écrites à partir des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le métal.

I.2. Etablir, à partir de ces équations de Maxwell, l'équation locale de conservation de la charge électrique (équation reliant les dérivées de ρ(M,t) et de $\vec{j}$ (M, t)).

I.3. En déduire une équation différentielle vérifiée au point M par la densité volumique de charge ρ(M,t) dans le métal. Résoudre cette équation en supposant qu'à l'instant initial $\rho(M, t = 0) = \rho_0$ et représenter le graphe correspondant.

Application numérique : calculer la constante de temps mise en évidence.
Conclure.

Dans toute la suite du problème, le conducteur métallique sera supposé localement neutre, soit pour tout M, ρ(M, t) = 0 .

I.4. Pour quelle gamme de fréquences les courants de déplacement dans le métal valent moins de un pour cent des courants de conduction ? En déduire une simplification de l'équation de Maxwell - Ampère. Comment nomme-t-on ce régime de fonctionnement ?

Cette condition restera vérifiée dans la suite du problème.

I.5. Dans ce cadre, établir l'équation vérifiée par le champ électrique dans le métal. Comment ce type d'équation s'appelle-t-il ?

I.6. En déduire la relation de dispersion reliant $\underline{k}_T$ à ω. Quelle est la seule solution $\underline{k}_T$ physiquement acceptable ? Dans ce cas, que représente la partie imaginaire de $\underline{k}_T$? Préciser pourquoi.

I.7. Calculer la vitesse de phase V_ϕ, et la vitesse de groupe V_g de l'onde dans le métal. Le métal est-il dispersif ?

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_R \mu_0 \gamma \omega}}$ *est un paramètre essentiel pour décrire la propagation de l'onde dans le métal.*

I.8. Comment δ s'appelle-t-il ? Quelle est sa signification physique ?

Application numérique : calculer δ.

I.9. Exprimer $\underline{k}_T$ en fonction de δ. Quel lien existe-t-il entre k et k_R ?

Les champs magnétiques complexes incident $\underline{\vec{B}}_i$, *réfléchi* $\underline{\vec{B}}_R$ *et transmis* $\underline{\vec{B}}_T$ associés *aux champs électriques* $\underline{\vec{E}}_i$, $\underline{\vec{E}}_R$, et $\underline{\vec{E}}_T$ *peuvent s'écrire* (avec a_i *réel positif,* a_R réel *et* a_T *réel positif) :*

$\underline{\vec{B}}_i = a_i E_o e^{j(\omega t - kx)} \vec{v}$ $\underline{\vec{B}}_R = a_r \underline{E}_{0R} e^{j(\omega t + k_R x)} \vec{v}$ $\underline{\vec{B}}_T - \underline{E}_{0T} e^{j(\omega t - \underline{k}_T x)} \vec{v}$

I.10. Exprimer les coefficients a_i, a_R, a_T et le déphasage ϕ_T en fonction de c, ω et δ. Préciser le vecteur $\vec{v}$.

Le coefficient sans dimension $\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{\gamma \mu_R}}$ *permettra de simplifier les expressions.*

I.11. Ecrire les relations de passage pour les champs électrique et magnétique dans le plan x = 0 et en déduire les deux équations suivantes entre E_0 , $\underline{E}_{0R}$ et $\underline{E}_{0T}$:

$\underline{E}_{0R} + E_0 = \underline{E}_{0T}$

$$\begin{cases} \underline{E}_{0R} + E_0 = \underline{E}_{0T} \\ \underline{E}_{0R} - E_0 = \dfrac{(-1+j)}{\alpha} \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

I.12. Préciser une relation simple entre a, ω, δ et c. Vérifier que α “1 est compatible avec la condition établie en 1.4.

Dans la suite de cette première partie tous les calculs seront effectués au premier ordre en α .

I.13. Dans le cadre de cette approximation, donner alors $\underline{E}_{0R}$ et $\underline{E}_{0T}$ en fonction de E_0. Commenter les résultats obtenus dans le cas limite α **=** 0 .

I.14. Montrer que les expressions des champs électrique $\underline{\vec{E}}_T$ et magnétique $\underline{\vec{B}}_T$ dans le métal (au premier ordre en α) s'écrivent :

$\underline{\vec{E}}_T = \sqrt{2}\,\alpha\, e^{\left(-\left[\frac{x}{\delta}\right]\right)} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\left(\omega t - \left[\frac{x}{\delta}\right]\right)} \vec{u}_z$ et $\underline{\vec{B}}_T = -2\frac{E_0}{c} e^{\left(-\left[\frac{x}{\delta}\right]\right)} e^{j\left(\omega t - \left[\frac{x}{\delta}\right]\right)} \vec{u}_y$.

Préciser alors les expressions réelles $\vec{E}_T$ (M,t) et $\vec{B}_T$ (M,t) de ces champs dans le métal.

I.15. A partir des expressions réelles des champs, calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ dans le métal, ainsi que sa moyenne temporelle $< \vec{R} >$.

I.16. Déterminer la puissance volumique $\frac{dP_J}{d\tau}$ dissipée par effet Joule dans le métal, puis sa moyenne temporelle $< \frac{dP_J}{d\tau} >$. Quel lien existe -t-il entre $< \vec{R} >$ et $< \frac{dP_J}{d\tau} >$?

Données numériques :

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ F.m^{-1}, $\mu_0 = 4\ \pi.10^{-7}$ H.m^{-1}, $\mu_r = 10^2$ 36z 10^9

$\gamma = 10^7\ \Omega^{-1}$ m^{-1}, c = 3 10^8 m s^{-1} , f =100 kHz

DEUXIEME PARTIE : INDUCTEUR CYLINDRIQUE

Le chauffage d'un cylindre métallique est obtenu en plaçant celui-ci au centre d'un inducteur à symétrie de révolution (solénoïde considéré comme infini, à spires jointives et comportant N *spires par mètre), parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω et de valeur efficace* I_0 *(figure 2). La longueur* L *du cylindre (identique à celle de l'inducteur) est suffisamment grande devant son rayon* $\Re_c$ *pour être considérée comme infinie.*

Le système de coordonnées cylindriques est utilisé et un point M est repéré par (r, θ, z), *la base locale associée étant* $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$ *. Le métal chauffé est le même acier que dans la première partie et la grandeur δ garde l'expression introduite pour la question I.8.*

Les expressions des opérateurs vectoriels sont rappelées en annexe.

II.1. A partir de l'étude des symétries, montrer que l'excitation magnétique H ne peut avoir de composantes que sur $\vec{u}_r$ et sur $\vec{u}_z$.

Dans la suite, $\underline{\vec{H}} = \underline{H}_r\, e^{j\omega t}\, \vec{u}_r + \underline{H}_z\, e^{j\omega t}\, \vec{u}_z$ *représentera le vecteur excitation magnétique complexe. De même le vecteur densité de courant s'écrira :* $\underline{\vec{j}} = \underline{j}_r\, e^{j\omega t}\, \vec{u}_r + \underline{j}_\theta\, e^{j\omega t}\, \vec{u}_\theta + \underline{j}_z\, e^{j\omega t}\, \vec{u}_z$.

II.2. Ecrire les équations de Maxwell en un point M du cylindre à chauffer (il est rappelé que pour tout point M, ρ(M, t) = 0).

II.3. En déduire les deux équations différentielles suivantes, relatives aux composantes $\underline{H}_r$ et $\underline{H}_z$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\,\underline{H}_r\right]\right) = \dfrac{2j}{\delta^2}\,\underline{H}_r \\ \dfrac{d^2\underline{H}_z}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\underline{H}_z = \dfrac{2j}{\delta^2}\,\underline{H}_z \end{cases}$$

II.4. A partir de la loi de conservation du flux, montrer que r $\underline{H}_r$ est constant. En déduire que la composante $\underline{H}_r$ est nulle.

II.5. Montrer alors que les lignes de courant induit sont des cercles d'axe zz'. Exprimer la densité de courant $\underline{\vec{j}}$ au point M en fonction d'une dérivée à préciser.

<u>Dans le cas des basses fréquences,</u> il est admis que la composante H_z est bien représentée par un développement en série tel que :

$$\underline{H}_z = \underline{H}o\,(1 + \underline{\alpha}_1\, r + \underline{\alpha}_2\, r^2 + ... + \underline{\alpha}_n\, r^n + ...).$$

II.6.a Etablir les relations de récurrence entre les coefficients de $\underline{H}_z$. Préciser en particulier la valeur de $\underline{\alpha}_1$, celle de $\underline{\alpha}_2$ et la relation entre $\underline{\alpha}_n$ et $\underline{\alpha}_{n-2}$.

II.6.b A quelle condition sur la fréquence, le développement de H_z peut-il ne conserver que deux termes principaux, les autres étant considérés comme négligeables ?

Application numérique : calculer la fréquence maximale f_M mise en évidence.

II.6.c Donner alors une approximation de $\underline{\vec{j}}$ au premier ordre en r sous la forme $\underline{\vec{j}} = \underline{j}_\theta(r)\, e^{j\omega t}\, \vec{u}_\theta$. Préciser l'expression de $j_\theta(r)$.

II.6.d Calculer la puissance volumique moyenne $p_v(r)$ dissipée par effet Joule. En déduire la puissance moyenne P dissipée dans le cylindre. Tracer cette puissance moyenne en fonction de la fréquence pour $10^{-5}\, f_M < f < 10^{-2}\, f_M$ (tracé de $\log_{10}P$, en fonction de $\log_{10}f$).

<u>Dans le cas des fréquences élevées,</u> il est assez intuitif de penser que certains résultats de la première partie doivent s'appliquer :

- *le courant induit est localisé au voisinage de la surface du cylindre et décroît exponentiellement en s'en éloignant,*
- *au centre du cylindre, le champ est alors pratiquement nul et la région intéressante est donc loin de l'axe, près de la surface.*

II.7.a Montrer que pour r >> δ, l'équation différentielle vérifiée par H_z se réduit à :

$$\frac{d^2\underline{H}_z}{dr^2} = \frac{2j}{\delta^2}\,\underline{H}_z .$$

Une solution approchée de cette équation peut s'écrire : $\underline{H}_z = \underline{H}_1\, e^{\frac{r-\Re_c}{\delta}}\, e^{j\frac{r-\Re_c}{\delta}}$.

II.7.b Quelle est la signification de $|H_1|$? Exprimer la relation entre $|H_1|$ et I_0.

II.7.c Donner alors $\underline{\vec{j}}$ puis en déduire le courant total I circulant dans le cylindre. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème d'Ampère. Expliquer le lien entre les courants I_0 et I à l'aide d'un transformateur équivalent qui sera explicité.

II.7.d Calculer la puissance moyenne P dissipée par effet Joule par le cylindre. Tracer cette puissance moyenne en fonction de la fréquence pour $10^2\ f_M < f < 10^5\ f_M$ (tracé de $\log_{10}P$, en fonction de $\log_{10}f$).

Application numérique : quel courant I_0 faut-il choisir pour avoir une puissance P dissipée dans le cylindre ?

Données numériques :

f =100 kHz, L =10 cm, $\mathfrak{R}_c$ = 2 cm, N = 100 spires. m^{-1}, P =100 kW

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}, $\mu_r = 10^2$, $\gamma = 10^7$ $A^{-1}.m^{-1}$.

TROISIEME PARTIE : ETUDE THERMIQUE CAS D'UNE TREMPE SUPERFICIELLE

Dans cette partie consacrée à une étude thermique du cylindre de la figure 2, la fréquence du courant de l'inducteur est assez élevée pour que le chauffage se fasse exclusivement en périphérie du cylindre. Le métal du cylindre (qui a les mêmes caractéristiques que dans la première partie) possède une capacité thermique massique Cp, *une* masse *volumique* μ *et une conductivité thermique* λ. *Seuls les échanges par diffusion thermique (appelée aussi conduction thermique) seront considérés, et* $\vec{j}_{th}$ *représente le vecteur densité de courant thermique.*

III.1 En étudiant les symétries, montrer que la température T du cylindre ne dépend que du temps et d'une variable spatiale à préciser.

La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule sera notée p (r, t) .

III.2 L'équation de la chaleur au sein du cylindre s'écrit : $\mu.C_p \dfrac{\partial T}{\partial t} - \lambda\,\Delta T = p(r, t)$.

Quelles sont les approximations conduisant à cette équation ?

Dans la suite du problème, la réponse en température du cylindre ne sera *étudiée que* dans *les instants qui suivent le début de la chauffe* (cas *d'une trempe superficielle). Dans ce cas, le terme* $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r}$ *(qui est infini suivant l'axe zz') dans l'expression de l'équation de la chaleur peut être négligé si le temps d'observation reste inférieur à un temps caractéristique* τ_c *qui dépend des paramètres de la pièce à chauffer. A l'instant initial (début de la chauffe) le cylindre a une température uniforme égale à la température ambiante* T_a. *L'effet* de *peau qui intervient dans les phénomènes électromagnétiques implique que la puissance dissipée par effet Joule est uniquement dissipée à la surface latérale du cylindre (soit* p(r, t) = 0 *pour tout* r*), et vaut, par unité de surface latérale,* ⛷ *pour* t > 0. *Dans la suite du problème, a* $= \dfrac{\lambda}{\mu C_p}$ *est la diffusivité thermique du métal, et* $\Theta = T - T_a$ *est l'accroissement de température du cylindre.*

III.3 Dans le cadre de ces hypothèses, simplifier l'équation de la chaleur et l'écrire en fonction de a et de Θ (équation [1]). Préciser les conditions initiales (pour t = 0 et pour tout r), relatives à Θ.

III.4 Montrer que la densité de courant thermique $j_{th}(r,t)$ telle que $\vec{j}_{th}(r,t) = j_{th}(r,t)\,\vec{u}_r$ vérifie une équation [2] du même type que l'équation [1].
Préciser les conditions aux limites (pour $r = \Re_c$ et pour tout t), ainsi que les conditions initiales, relatives à $j_{th}(r, t)$.

III.5 Faire le changement de variable : $u = \dfrac{\Re_c - r}{2\sqrt{at}}$, tel que $j_{th}(r, t) = \beta f(u)$ et 2 et f(0) =1 (β est une constante de normalisation) ; montrer que l'équation [2] se simplifie en $\dfrac{d^2f}{du^2} + 2u\dfrac{df}{du} = 0$ (équation [3] à variables séparables).

III.6 Intégrer l'équation [3] pour trouver $\dfrac{df}{du}$; montrer alors que : f(u) = 1 + K, où K est une constante d'intégration.

Pour la suite, il conviendra de faire l'approximation : $\int_0^u e^{-x^2}\,dx = 0.89\,(1- e^{-u})$.

III.7 Dans ce cas et à partir des conditions initiales et aux limites, trouver les constantes β et K. En déduire la densité de courant thermique $j_{th}(r, t)$.

III.8 Déterminer l'expression de l'accroissement de température Θ (r, t).

III.9 En reprenant l'hypothèse initiale : " tant que $t < \tau_c$, exprimer le temps caractéristique τ_c en fonction de a et de $\Re_c$ Application numérique : calculer τ_c.

III.10 Représenter le graphe de $\Theta(r, t = \dfrac{\tau_c}{25})$. Donner l'ordre de grandeur de la température maximale atteinte sachant que $e^5 \approx 150$. Commenter le résultat obtenu.

Données numériques :

$\Re_c$ =2 cm, L=10 cm, $\varphi = 10^4$ kW.m^{-2}
μ = 7, 8.10^3 kg.m^{-3}, λ = 50 W.m^{-1}.K^{-1}, C_p = 500 J.K^{-1}. kg^{-1}.

ANNEXES : *Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques*

Pour V = V(r, θ, z) et $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\,\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u}_\theta + A_z(r,\theta,z)\,\vec{u}_z$,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z \qquad \text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Tournez la page S.V.P.

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\vec{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta + 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right]\vec{u}_\theta + \Delta A_z \vec{u}_z$$

FIGURES :

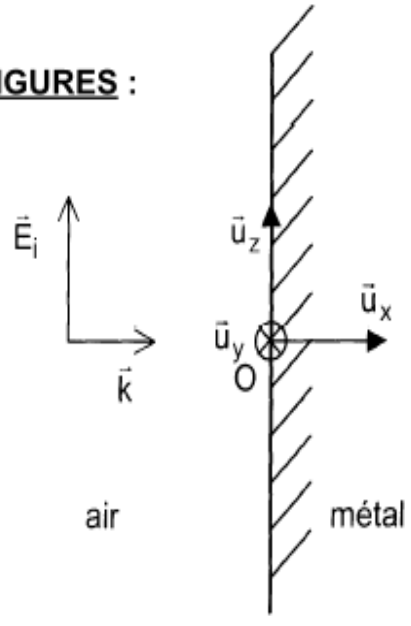


Figure 1

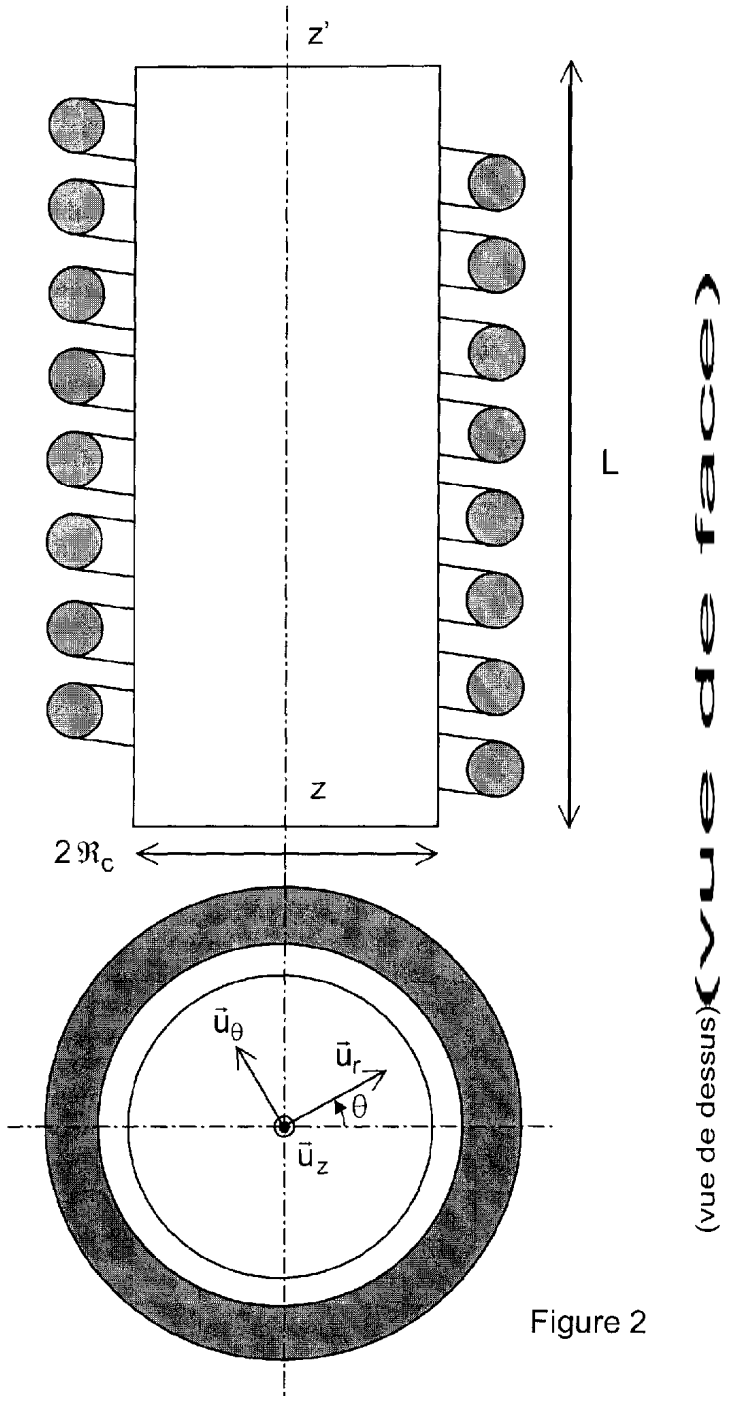


Figure 2