

1.- En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0,68, la de que ocurra otro suceso B es 0,2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0,27. Halle la probabilidad de que:

a) Ocurran los dos a la vez.

Resolución

Según el enunciado $p(A) = 0,68$ $p(B) = 0,2$ y $p(A^c \cap B^c) = 0,27$. Se pide $p(A \cap B)$

Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B)$ entonces

$$p(A \cup B) = 1 - p(A^c \cap B^c) = 1 - 0,27 = 0,73$$

Por otra parte, como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, entonces

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,68 + 0,2 - 0,73 = 0,15.$$

b) Ocurra B, pero no A.

Resolución Se pide $p(B \cap A^c) = p(B) - p(A \cap B) = 0,2 - 0,15 = 0,05$

c) Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

Resolución Se pide $p\left(\frac{B}{A^c}\right) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{0,05}{1 - 0,68} = \frac{0,05}{0,32} = 0,15625$

2.- Una encuesta realizada en un banco indica que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y un 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco:

a) Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

Resolución

Sean los sucesos

A = "El cliente tiene un préstamo hipotecario" B = "El cliente tiene un préstamo personal"

Nos dicen que $p(A) = 60\% = 0,6$ $p(B) = 50\% = 0,5$ y $p(A \cap B) = 20\% = 0,2$. Se pide $p(A^c \cap B^c)$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$$

Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1 = 10\%$.

b) Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario sabiendo que no tiene préstamo personal.

Resolución Se pide $p\left(\frac{A}{B^c}\right) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{0,6 - 0,2}{1 - 0,5} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 = 80\%$

3.- (**prueba extraordinaria**) Se cree que hay una vuelta hacia estilos de baile más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40% les gusta la salsa, al 30% les gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa como el merengue.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?

Resolución

Sean los sucesos S = "Al estudiante le gusta la salsa" M = "Al estudiante le gusta la merengue"

Según el enunciado $p(S) = 40\% = 0,4$ $p(M) = 30\% = 0,3$ y $p(M \cap S) = 10\% = 0,1$

$$\text{Se pide } p\left(\frac{M}{S}\right) = \frac{p(M \cap S)}{p(S)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25 = 25\%$$

b) ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?

Resolución

$$\text{Se pide } p\left(\frac{M}{S^c}\right) = \frac{p(M \cap S^c)}{p(S^c)} = \frac{p(M) - p(M \cap S)}{1 - p(S)} = \frac{0,3 - 0,1}{1 - 0,4} = \frac{0,2}{0,6} \cong 0,3333 = 33,33\%$$

c) ¿Son independientes los sucesos “gustar la salsa” y “gustar el merengue”? ¿Son compatibles?

Resolución

$$p(M) \cdot p(S) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \neq p(M \cap S) = 0,1 \Rightarrow M \text{ y } S \text{ son dependientes.}$$

Por otra parte, como $p(M \cap S) = 0,1 \neq 0 \Rightarrow M \text{ y } S \text{ son compatibles}$

4.- (prueba extraordinaria) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

a) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague.

Resolución

Sean los sucesos P = “El préstamo se paga” V = “El préstamo se concede para vivienda”

I = “El préstamo se concede para industria” C = “El préstamo se concede para consumo”

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	V	I	C	Total
P	$50\% - 10\% = 40\%$	$30\% - 4,5\% = 25,5\%$	$20\% - 14\% = 6\%$	71,5%
P^c	$20\% \text{ del } 50\% = 10\%$	$15\% \text{ del } 30\% = 4,5\%$	$70\% \text{ del } 20\% = 14\%$	28,5%
Total	50%	30%	20%	100%

$$\text{Se pide } p(P) = 71,5\%$$

b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?

Resolución

$$\text{Se pide } p\left(\frac{C}{P^c}\right) = \frac{p(C \cap P^c)}{p(P^c)} = \frac{14\%}{28,5\%} = \frac{0,14}{0,285} \cong 0,4912 = 49,12\%$$

c) Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

Resolución

$$\text{Probabilidad de que sea para vivienda: } p\left(\frac{V}{P^c}\right) = \frac{p(V \cap P^c)}{p(P^c)} = \frac{10\%}{28,5\%} = \frac{0,1}{0,285} \cong 0,3509 = 35,09\%$$

Probabilidad de que sea para consumo: $p\left(\frac{C}{P^c}\right) \cong 49,12\%$

No lleva razón, es al revés.

5.- En una urna A hay 10 bolas verdes y 10 rojas, y en otra urna B hay 15 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado, de forma que si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en el resto de casos se extrae una bola de la urna B.

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

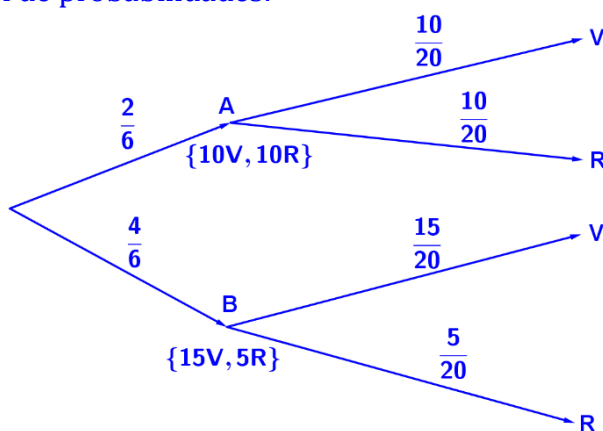
Resolución

Sean los sucesos R = “sacar bola roja” V = “sacar bola verde”

A = “Salir múltiplo de 3, o sea 3 ó 6” = “sacar bola de la urna A”

B = “No salir múltiplo de 3, o sea salir 1, 2, 4 ó 5” = “sacar bola de la urna B”

Hacemos un diagrama de árbol de probabilidades:



Por el teorema de la probabilidad total,

$$p(R) = p(R \cap A) + p(R \cap B) = p(A) \cdot p(R/A) + p(B) \cdot p(R/B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{10}{20} + \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{3}$$

b) Si la bola extraída resulta ser de color verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Resolución

Por el teorema de Bayes $p\left(\frac{B}{V}\right) = \frac{p(B \cap V)}{p(V)} = \frac{p(B) \cdot p(V/B)}{p(A) \cdot p(V/A) + p(B) \cdot p(V/B)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{15}{20}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{10}{20} + \frac{4}{6} \cdot \frac{15}{20}} = \frac{60/120}{80/120} = \frac{3}{4}$

6.- En una empresa, el 65% de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?

Resolución

Sean los sucesos I = “El empleado habla inglés” A = “El empleado habla alemán”

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	A ^c	Total
I	40% del 65% = 26%	65% - 26% = 39%	65%
I ^c	25% del 35% = 8,75%	35% - 8,75% = 26,25%	100% - 65% = 35%
Tota I	34,75%	65,25%	100%

Se pide $p(I \cap A) = 26\%$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?

Resolución Se pide $p(A) = 34,75\%$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

Resolución Se pide $p\left(\frac{I}{A}\right) = \frac{p(I \cap A)}{p(A)} = \frac{26\%}{34,75\%} = \frac{0,26}{0,3475} \cong 0,7482 = 74,82\%$

7.- Un Centro de Salud propone dos terapias, A y B, para dejar de fumar. De las personas que acuden al Centro para dejar de fumar, el 45% elige la terapia A, y el resto la B.

Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia A y el 80% de los que siguieron la B no han vuelto a fumar. Se elige al azar un usuario del Centro que siguió una de las dos terapias:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año no haya vuelto a fumar.

Resolución

Sean los sucesos $A = \text{"El usuario sigue la terapia A"}$ $B = \text{"El usuario sigue la terapia B"}$

$F = \text{"El usuario vuelve a fumar después de un año"}$

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	B	Total
F	$45\% - 31,5\% = 13,5\%$	$55\% - 44\% = 11\%$	24,5%
F^c	$70\% \text{ del } 45\% = 31,5\%$	$80\% \text{ del } 55\% = 44\%$	75,5%
Total	45%	$100\% - 45\% = 55\%$	100%

Se pide $p(F^c) = 75,5\%$

b) Si transcurrido un año esa persona sigue sin fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

Resolución Se pide $p\left(\frac{A}{F^c}\right) = \frac{p(A \cap F^c)}{p(F^c)} = \frac{13,5\%}{75,5\%} = \frac{0,135}{0,755} \cong 0,1788 = 17,88\%$

c) Si transcurrido un año esa persona ha vuelto a fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

Resolución Se pide $p\left(\frac{A}{F}\right) = \frac{p(A \cap F)}{p(F)} = \frac{13,5\%}{24,5\%} = \frac{0,135}{0,245} \cong 0,551 = 55,1\%$

8.- De los sucesos independientes A y B se sabe que $p(A^c) = 0,4$ y $p(A \cup B) = 0,8$

a) Halle la probabilidad de B.

Resolución

Sea $p(B) = x$.

Como A y B son independientes, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Además, $p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0,4 = 0,6$

Por otra parte, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$

Sustituyendo, $0,8 = 0,6 + x - 0,6x \Rightarrow 0,4x = 0,2 \Rightarrow x = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$. Es decir, $p(B) = 0,5$

b) Halle la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.

Resolución Se pide $p\left(\frac{B^c}{A}\right) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A) \cdot p(B)}{p(A)} = \frac{0,6 - 0,6 \cdot 0,5}{0,6} = 0,5$

c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B?

Resolución Como $p(A \cap B) = 0,1 \neq 0 \Rightarrow A$ y B son compatibles

9.- Una granja avícola dedicada a la producción de huevos posee un sistema automático de clasificación en tres calibres según su peso: grande, mediano y pequeño. Se conoce que el 40% de la producción es clasificada como huevos grandes, el 35% como medianos y el 25% restante como pequeños. Además, se sabe que este sistema de clasificación produce defectos por rotura en el cascarón que dependen del peso. Así, la probabilidad de que un huevo grande sea defectuoso por esta razón es del 5%, la de uno mediano del 3% y de un 2% la de uno pequeño. Elegido aleatoriamente un huevo,

a) ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Resolución

Sean los sucesos G = “El huevo es grande”, M = “El huevo es mediano”, P = “El huevo es pequeño”

D = “El huevo es defectuoso”

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	G	M	P	Total
D	5% del 40% = 2%	3% del 35% = 1,05%	2% del 25% = 0,5%	3,55%
D^c	40% - 2% = 38%	35% - 1,05% = 33,95%	25% - 0,5% = 24,5%	96,45 %
Total	40%	35%	25%	100%

Se pide $p(D) = 3,55\%$

b) Si el huevo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea grande?

Resolución Se pide $p\left(\frac{G}{D}\right) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{2\%}{3,55\%} = \frac{0,02}{0,0355} \cong 0,563 = 56,3\%$

10.- A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

a) Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.

Resolución

Sean los sucesos A = “El accionista tiene menos de 40 años”

B = “El accionista tiene entre 40 y 60 años” C = “El accionista tiene más de 60 años”

P = “El accionista acepta la propuesta”

Usamos una tabla de contingencia con los datos

	P	P^c	Total
A	45 - 15 = 30	1/3 de 45 = 15	45
B	42 - 14 = 28	1/3 de 42 = 14	105 - 45 - 18 = 42
C	18 - 4 = 14	4	18

Tota l	72	33	105
-----------	----	----	-----

Se pide $p(A \cap P) = \frac{30}{105} = \frac{2}{7} \cong 0,2857 = 28,57\%$

b) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?

Resolución Como $p(P) = \frac{72}{105} = \frac{24}{25} \cong 0,6857 = 68,57\% < 80\%$, la afirmación es falsa

c) Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

Resolución Se pide $p\left(\frac{C}{P^c}\right) = \frac{p(C \cap P^c)}{p(P^c)} = \frac{4/105}{33/105} = \frac{4}{33} \cong 0,1212 = 12,12\%$

11.- (prueba ordinaria) El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.

a) Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

Resolución

Sean los sucesos

T = “el alumno usa transporte público”, V = “el alumno usa vehículo propio”, A = “el alumno va andando”

H = “El alumno es hombre”

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	T	V	A	Total
H	$55\% - 35,75\% = 19,25\%$	$70\% \text{ del } 30\% = 21\%$	$15\% - 7,8\% = 7,2\%$	47,45%
H ^c	$65\% \text{ del } 55\% = 35,75\%$	$30\% - 21\% = 9\%$	$52\% \text{ del } 15\% = 7,8\%$	52,55%
Tota l	55%	30%	$100\% - 55\% - 30\% = 15\%$	100%

Se pide $p(H) = 47,45\%$

b) Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

Resolución Se pide $p\left(\frac{A}{H}\right) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)} = \frac{7,2\%}{47,45\%} = \frac{0,072}{0,4745} \cong 0,1517 = 15,17\%$

12.- (prueba ordinaria) De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que

$p(A) = 0,3$, $p(B^c) = 0,25$

Calcule las siguientes probabilidades:

a) $p(A \cup B)$

Resolución

Como A y B son independientes, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Además, $p(B) = 1 - p(B^c) = 1 - 0,25 = 0,75$

Por otra parte, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B)$.

Sustituyendo, $p(A \cup B) = 0,3 + 0,75 - 0,3 \cdot 0,75 = 0,825$.

b) $p(A^c \cap B^c)$

Resolución

Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,825 = 0,175$.

c) $p(A/B^c)$

Resolución

$$\text{Se pide } p\left(\frac{A}{B^c}\right) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{p(A) - p(A) \cdot p(B)}{1 - p(B)} = \frac{p(A)[1 - p(B)]}{1 - p(B)} = p(A) = 0,3$$