Finora abbiamo incontrato molti integrali contenenti radicali.
Alcuni di essi sono integrali immediati:

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\int \sqrt{x}\, dx$

Molti si riconducono a questi per sostituzione. Sono integrali del tipo:

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-bx^2}} dx$

$\int \sqrt{ax + b}\, dx$

Anche quando nell'integrale si presenta l'espressione $\sqrt{ax + b}$, si riesce a risolvere l'integrale con le sostituzioni $ax+b=t$ oppure $\sqrt{ax + b} = t$

Se il radicando è di secondo grado $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ la sostituzione $ax^2+bx+c=t$ si può fare solo se c'è la derivata $2ax+b$ come fattore.

Non abbiamo ancora affrontato il calcolo degli integrali del tipo

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$

$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

Questi integrali si risolvono per sostituzione oppure per parti, ma necessitano di qualche artificio non immediato. Vediamo qualche svolgimento.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}+x} dx = \int \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}+x} =$$

per risolvere questo integrale ho moltiplicato e diviso per $\sqrt{a^2 + x^2} + x$ e poi osservo che

$D\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) = 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$pertanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = ln\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) + C$$

Anche $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$si risolve in modo analogo; indichiamo solo il risultato lasciando per esercizio lo svolgimento dei calcoli:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = ln\left|\sqrt{x^2 - a^2} + x\right| + C$$

$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx$ $\quad$ $u = \sqrt{a^2 + x^2}$ $\quad$ $v'=1$

$u' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $\quad$ $v=x$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}} =$$

risolvo il secondo integrale aggiungendo e togliendo a^2 e poi sfruttando il risultato precedente

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2}dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$$

Portando a primo membro e sostituendo

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right] + C$$

Anche $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ e $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$si risolvono in modo analogo; indichiamo solo il risultato

lasciando per esercizio lo svolgimento dei calcoli:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|\right] + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 arctg\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right] + C$$

Nell'ultimo integrale si deve risalire per sostituzione all'integrale immediato che ha come risultato arcotangente.

Quest'ultimo integrale si può calcolare anche in un altro modo, utilizzando le formule goniometriche, sostituendo x = a sin(t) e dunque dx=a cos(t) dt:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 sin^2(t)} \cdot a\, cos(t)\, dt = a^2 \int \sqrt{1 - sin^2(t)}\, cos(t)\, dt = a^2 \int cos^2(t)dt$$

l'integrale si calcola per parti

$\int cos^2(t)dt = sen(t)cos(t) - \int - sen^2(t)\, dt =$ $\quad$ u=cos(t)

v'=cos(t)

u'=-sen(t) $\quad$ v=sin(t)

$$= sen(t)\, cos(t) + \int \left[1 - cos^2(t)\right] dt$$

portando al secondo membro

$$\int cos^2(t) = \frac{1}{2}(t + sen(t)\, cos(t))$$

per risostituire t, se abbiamo posto $x=a\ sin(t)$, $t = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$con $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, l'integrale è

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left[arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right] + C$$

Infine indichiamo il procedimento per calcolare l'integrale $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ con a>0

Bisogna anche qui elaborare algebricamente il radicale:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{\frac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{(2ax + b)^2 - \Delta}$$

Ponendo per sostituzione 2ax+b=t , e dunque 2a dx =dt, l'integrale diventa:

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{1}{4a\sqrt{a}} \cdot \int \sqrt{t^2 - \Delta}\, dx$$

l'integrale si risolve come nei casi precedenti a seconda del valore di Δ. Addirittura se Δ=0 l'integrale si riconduce a un integrale immediato.

Esercizi

Calcolare gli integrali

1. $\int \sqrt{1 + 4x^2}dx$
2. $\int \sqrt{4 - 9x^2}dx$
3. $\int \sqrt{2x^2 - 1}dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-2}}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$
7. Calcola l'area del cerchio utilizzando l'equazione della semicirconferenza di centro nell'origine O e raggio r e facendo l'integrale tra -r e r.
8. Calcola la formula per l'area dell'ellisse, dimostrandola tramite l'integrale definito tra -a e a sull'equazione del semiellisse ricavato da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$