Дисциплина: ОД.07 Математика

Занятие № 67 **Группа БУ и ТД 1/1-9/25** **Дата: 11.02.2026**

Тип занятия: лекция 31 **Преподаватель: Бережная В.А.**

Тема занятия: Тригонометрические неравенства

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для сознательного усвоения учащимися методов решения тригонометрических неравенств.

Содержательная:

– актуализировать знания о тригонометрических неравенствах вида sin$x > a$ и cos$x > a$;

– расширить знания учеников за счет введения нового объекта – тригонометрического неравенства;

– познакомиться с задачами на решение простейших тригонометрических неравенств.

План занятия:

1. Простейшие тригонометрические неравенства вида sin$x > a$.
2. Простейшие тригонометрические неравенства вида cos$x > a$.

Ход занятия

Тригонометрические неравенства – это неравенства, содержащие тригонометрические функции, такие как синус, косинус, тангенс и котангенс. Решение таких неравенств заключается в нахождении всех значений переменной, при которых неравенство становится верным, с учётом периодичности тригонометрических функций.

1. Простейшие тригонометрические неравенства вида *sinx > a*.

ОДЗ синуса –1 до 1 включительно: $-1 \le \sin x \le 1$. Тогда если $a>1$ или $a<-1$, решений нет.

Если $-1 \le a \le 1$, то решение находится следующим образом:

1. Найти основные решения уравнения sin$x = a$: $x_0 = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$.

2. Определить промежутки, где $\sin x > a$, используя график функции или тригонометрическую окружность.

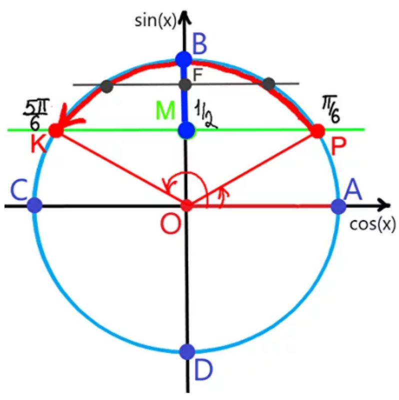
3. Записать общее решение, учитывая периодичность: $x \in [2\pi n + \alpha;\ 2\pi n + \pi - \alpha]$, $n \in Z$

Решать тригонометрические неравенства удобно при помощи единичной окружности. Обязательно нужно уметь хорошо ей пользоваться, без этого никак. Проще всего научиться решать на примерах. Начнем с простейшего тригонометрического неравенства с синусом.

Задачи

Тригонометрические неравенства с синусом

Пример 1. $\sin(x) > ½$



Что значит решить данное неравенство? Значит найти значения углов x, при подстановке которых, значение синуса будет больше ½. Нарисуем тригонометрическую окружность. И по пунктам разберем последовательность решения:

На вертикальной оси (оси синусов) отметим значение синуса равное ½, на нашем рисунке это будет точка M.

Проведем перпендикуляр а к оси синусов через точку M. Он пересечет окружность в точках P и K.

Углы $\angle POA = \pi/6 + 2\pi n$ и $\angle KOA = 5\pi/6 + 2\pi n$, будут углами, синус от которых равен ½.

По условию нам нужны значения синуса больше ½. Отметим синей штриховкой на оси синусов эти значения, лежащие над точкой M и до единицы, получим отрезок MB. Напоминаю, что синус не может принимать значения больше единицы.

Любому значению синуса, лежащему на отрезке MB от ½ до 1 соответствуют углы с дуги окружности PK. Действительно, возьмем на отрезке MB произвольную точку F, проведем через нее перпендикуляр к оси синусов, который пересечет окружность в точках на дуге PK.

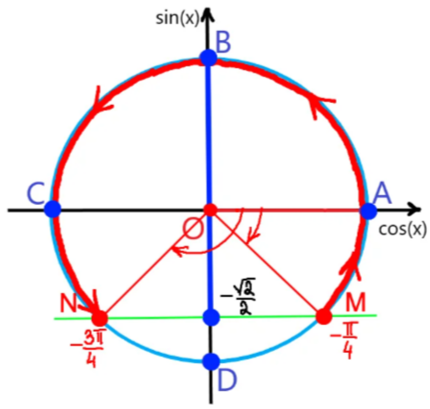
Любой угол, лежащий на дуге PK, будет иметь значения синуса в промежутке от ½ до 1, это именно те углы, которые нам нужны. Их можно записать в виде промежутка

$$x\epsilon\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n\right),\ n\in Z$$

Ответ: $x\epsilon\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n\right),\ n\in Z$

Внимание! Промежуток всегда записывается от меньшего угла к большему ПРОТИВ часовой стрелки. Скобки у промежутка круглые, так как неравенство строгое.

Пример 2. $\sin(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Для решения нам понадобится тригонометрическая окружность. Аналогично прошлому примеру, отметим на оси синусов значение $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и углы, соответствующие этому значению $\angle MOA = -\frac{\pi}{4}$ и $\angle NOA = -\frac{3\pi}{4}$.

Согласно неравенству, нам нужны значения синуса больше либо равные $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Этим значениям соответствуют углы, лежащие на дуге MN, включая точки M и N. Дугу MN с нужными углами можно записать в виде промежутка ПРОТИВ часовой стрелки. То есть от точки M к N. Получается такой промежуток:

$$x\epsilon\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi\cdot n\right],\ n\in Z$$

Скобки квадратные так как знак неравенства нестрогий и не забываем про период $2\pi * n$. Но сам промежуток неправильный!

Внимание! Так записывать ответ нельзя, потому что промежуток всегда должен быть от меньшего числа к большему. У нас это правило не соблюдается:

$$-\frac{\pi}{4} > -\frac{3\pi}{4}$$

Чтобы ответ был в правильном виде, достаточно просто прибавить к правой границе промежутка 2π.

$$x\epsilon\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi + 2\pi\cdot n\right],\ n\in Z$$

Приведем подобные слагаемые:

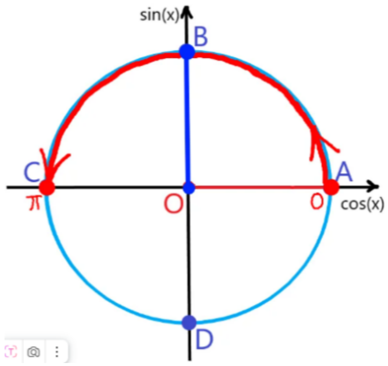
$$x\epsilon\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi\cdot n\right],\ n\in Z$$

Левая граница меньше правой, значит можно записывать ответ.

Ответ: $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi\cdot n\right],\ n\in Z$

Рассмотрим неравенство с синусом, которое наиболее часто встречается при нахождении ОДЗ.

Пример 3. sin(x) > 0



Решение аналогично предыдущим примерам. Рисуем единичную окружность, отмечаем на оси синусов значение 0, оно находится в начале координат. Углы на окружности, синус от которых будет равен 0 находятся в точках A и C: это углы $0 + 2\pi \cdot n$ и $\pi + 2\pi \cdot n$. Все значения синуса выше 0 нас устраивают, соответствующие им углы лежат на дуге AC, от точки A до C.

$x \epsilon (0 + 2\pi \cdot n; \pi + 2\pi \cdot n),\ n \in Z$

Левая граница промежутка меньше правой, скобки круглые, период не потеряли – можно записать ответ.

Ответ: $x \epsilon (0 + 2\pi \cdot n; \pi + 2\pi \cdot n),\ n \in Z$

Полезный факт: в тригонометрических уравнениях ОДЗ решать не обязательно, достаточно отметить нужные дуги на окружности и потом соотнести получившееся корни. Если корень попал на нужную дугу, значит удовлетворяет ОДЗ, если нет, значит вычеркиваем его.

2. Простейшие тригонометрические неравенства вида cos*x* > *a*.

ОДЗ косинуса от –1 до 1 включительно: $-1 \le \cos x \le 1$. Тогда если $a>1$ или $a<-1$, решений нет.

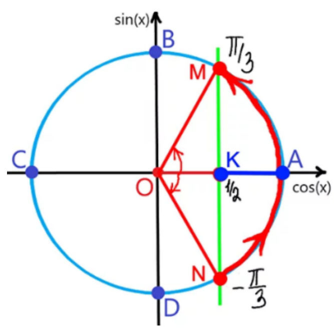
Неравенства с косинусом решаются аналогично синусам.

Если $-1 \le a \le 1$, то решение находится следующим образом:

1. Найти основные решения уравнения $\cos x = a$: $x_0 = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \epsilon Z$.
2. Определить промежутки, где $\cos x > a$, используя график функции или тригонометрическую окружность.
3. Общее решение записывается с учётом периода функции 2π.

Задачи

Пример 4. cos(x)> ½



Рисуем единичную окружность и на оси косинусов отмечаем значение ½ в точке K. Соответствующие этому значению углы на окружности: π/3 и –π/3 в точках M и N.

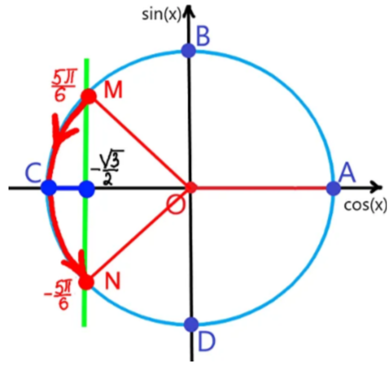
Согласно неравенству, нам нужны значения косинуса больше ½, то есть справа от точки K: отрезок KA, мы отметили его синей штриховкой. Углы, соответствующие значениям косинуса с отрезка KA, будут лежать на дуге NM от точки N до точки M: дуга всегда должна быть записана против часовой стрелки.

Записываем ответ, внимательно следя за тем, чтобы левая граница промежутка была меньше чем правая, в противном случае не забываем прибавить к правой границе 2π. В данном примере с этим все нормально, ничего прибавлять не нужно:

$$x \epsilon \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n\right),\ n \in Z$$

Ответ: $x \epsilon \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n\right),\ n \in Z$

Пример 5. $cos(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Не будем повторяться, просто нарисуем окружность, отметим на ней необходимые точки и промежутки. Все рассуждения аналогичны предыдущим примерам.

Из рисунка видно, что решением неравенства будет дуга MN от точки M к N. Выписываем промежуток:

$$x\epsilon\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n\right),\ n\in Z$$

Здесь надо быть внимательными, так как в получившемся промежутке левая граница больше правой. Так быть не должно, чтобы это исправить, прибавляем к правой границе 2π.

$$x\epsilon\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi + 2\pi\cdot n\right),\ n\in Z$$

Приводим подобные слагаемые:

$$x\epsilon\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi\cdot n\right),\ n\in Z$$

Ответ: $x\epsilon\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\cdot n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi\cdot n\right),\ n\in Z$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Что называется решением тригонометрического неравенства?

1.2. Что означает решить тригонометрическое неравенство? Почему для этого удобно использовать единичную окружность?

1.3. Каков алгоритм решения неравенства вида sin x > a?

1.4. Каков алгоритм решения неравенства вида cos x > a?

2. Решите предложенные задания по вариантам (письменно):

2.1. Решите неравенства:

А) $sinx > -\frac{1}{2}$; В) $cosx > -1$;

Б) $sinx \leq -\frac{1}{2}$; Г) $cosx \leq 0$.

2.2. Не решая, определите, имеет ли решение неравенство sin x > 1.5. Обоснуйте.

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 16 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание домашней работы вы присылаете на @mail:pushistav@mail.ru

В теме письма указываем, к примеру:

ОД.07 Математика 11.02.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.