

RESUELTOS

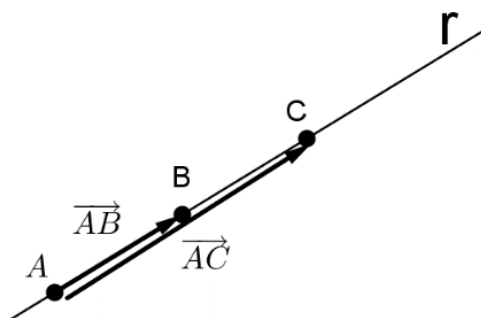
Profesor: Rafael Núñez Nogales

1.- Dados los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ y $C(3, \alpha, \beta)$, se pide:

(a) Determina, si es posible, α y β de forma que los tres puntos estén alineados.

Resolución

Si los puntos están alineados $\vec{AC} = (2, \alpha, \beta - 1) // \vec{AB} = (-1, 0, -2)$

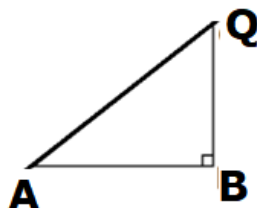


Luego, $\frac{-1}{2} = \frac{0}{\alpha} = \frac{-2}{\beta - 1}$. Resolviendo, $\alpha = 0$ y $1 - \beta = -4$, $\beta = 5$.

Conclusión: A, B y C están alineados $\Leftrightarrow \alpha = 0, \beta = 5$.

(b) Encuentra, si existe, un punto Q situado en el eje OY y tal que el triángulo ABQ sea un triángulo rectángulo con ángulo recto en B.

Resolución



Como el eje OY tiene ecuaciones $OY: \{x = 0, y = k, z = 0\}$, el punto Q que buscamos es de la forma $Q(0, k, 0)$.

Tenemos $A(1, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$.

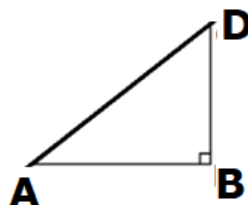
ABQ es rectángulo con ángulo recto en B $\Leftrightarrow \vec{BA} = (1, 0, 2) \perp \vec{BQ} = (0, k, 1) \Leftrightarrow \vec{BA} \cdot \vec{BQ} = 0$

$\vec{BA} \cdot \vec{BQ} = 2 \neq 0$. Luego, no hay ningún punto del eje OY para el que el triángulo sea rectángulo en B

(c) Si D es el punto $D(2, 0, -2)$, prueba que el triángulo ABD es rectángulo y calcula su área.

Resolución

$\vec{BA} = (1, 0, 2)$, $\vec{BD} = (2, 0, -1)$; $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{BA} \perp \vec{BD} \Rightarrow ABD$ es rectángulo en B



RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Por ser rectángulo en B, $A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |\vec{BA}| |\vec{BD}| = \frac{1}{2} \sqrt{5} \sqrt{5} = \frac{5}{2} = 2,5 u^2$

2.- Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que su centro está en la recta de ecuación $y = x + 1$, que es tangente a la recta $y = x$ y que también es tangente a la recta $y = 0$.

Resolución

Como el centro está en la recta $y = x + 1$, será de la forma $O(a, a + 1)$

$r: y = x \Rightarrow r: x - y = 0$, $s: y = 0$. El radio R es la distancia del centro a cualquiera de las tangentes:

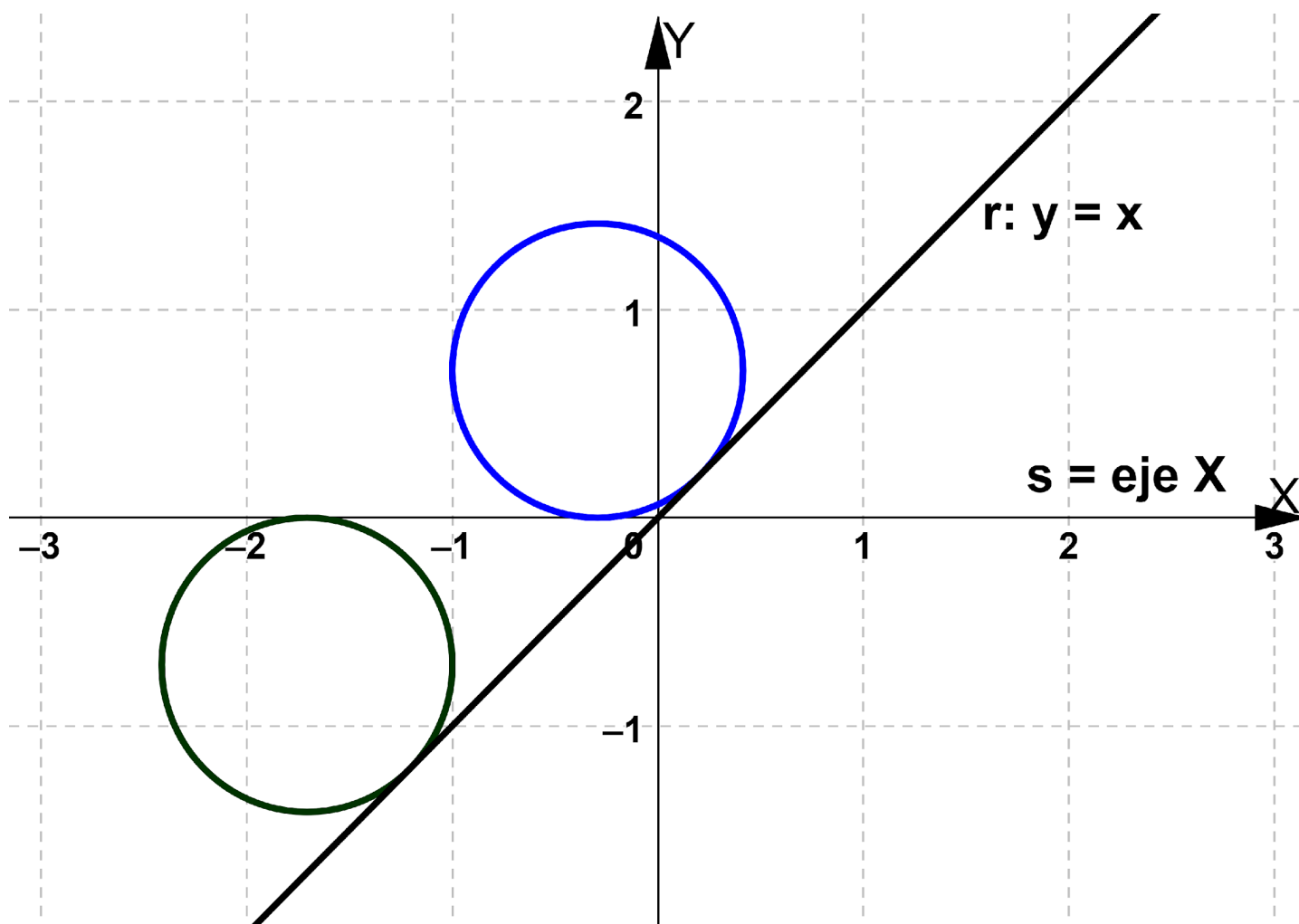
Usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$R = \text{dist}(O, r) = \text{dist}(O, s) \Rightarrow R = \frac{|a - a - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = |a + 1|$$

$$\text{Luego, } a + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} \quad \text{ó} \quad a + 1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad a = \frac{-\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$$

Por tanto, hay dos circunferencias:

$$C_1: \left(x - \frac{\sqrt{2} - 2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{y} \quad C_2: \left(x + \frac{\sqrt{2} + 2}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$



3.-

(a) Los tres planos cuyas ecuaciones son, respectivamente,
 $\{x + 2y + az = 1 \quad 2x + y + az = 0 \quad 3x + 3y - 2z = 1\}$
 se cortan en una recta. ¿Cuánto vale a ?

Resolución

Como los planos se cortan en una recta, debe ser

$$rg(1 \ 2 \ a \ 2 \ 1 \ a \ 3 \ 3 \ - \ 2) = rg(1 \ 2 \ a \ 1 \ 2 \ 1 \ a \ 0 \ 3 \ 3 \ - \ 2 \ 1) = 2.$$

En particular $|2 \ a \ 1 \ 1 \ a \ 0 \ 3 \ - \ 2 \ 1| = 0$. Desarrollando, $2a - 2 - 3a - a = 0$; $-2a - 2 = 0$, $a = -1$

(b) Determina el simétrico del punto $P(1, 0, 1)$ respecto de la recta determinada en el apartado anterior.

Resolución

Como $a = -1$, nos queda el sistema $\{x + 2y - z = 1 \quad 2x + y - z = 0 \quad 3x + 3y - 2z = 1\}$. Eliminamos la 3ª ecuación porque es suma de las

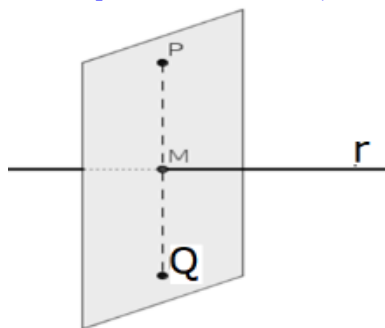
otras dos y nos queda la recta $r: \{x + 2y - z = 1 \quad 2x + y - z = 0\}$

Haciendo $x = 0$ queda $\{2y - z = 1 \quad y - z = 0\}$; $y = z$; $2z - z = 1 \Rightarrow z = 1 = y$. Luego, el punto $(0, 1, 1) \in r$.

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la

definen: $\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -3) // (1, 1, 3) \Rightarrow$
 $r: \{x = k \quad y = 1 + k \quad z = 1 + 3k\}$

El punto simétrico de P respecto de r sería el punto Q del dibujo.



- Hallamos el plano π que pasa por P y es ortogonal a la recta.

Un vector normal $\vec{n}$ del plano π es el vector director de r : $\vec{n} = \vec{d} = (1, 1, 3)$

Como π pasa por P , entonces $\pi: 1(x - 1) + 1(y - 0) + 3(z - 1) = 0 \Rightarrow \pi: x + y + 3z - 4 = 0$

- Hallamos M , punto de corte de r y π , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano, $k + 1 + k + 3(1 + 3k) - 4 = 0$; $11k = 0$; $k = 0 \Rightarrow M(0, 1, 1)$

- Por último, hallamos el simétrico $Q(a, b, c)$ de $P(1, 0, 1)$ usando que M es el punto medio del segmento PQ : $\{\frac{a+1}{2} = 0 \Rightarrow a = -1 \quad \frac{b+0}{2} = 1 \Rightarrow b = 2 \quad \frac{c+1}{2} = 1 \Rightarrow c = 1\}$. El punto simétrico que se pide es $Q(-1, 2, 1)$

4.- Calcula dos vectores $\vec{u} = (1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ que formen un ángulo de 45° y cuyo producto vectorial es el vector $\vec{w} = (1, 1, 0)$.

Resolución

Para poder trabajar más fácilmente, $\vec{u} = (1, u_2, u_3) = (1, a, b)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, 0) = (c, d, 0)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & a & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = (-bd, bc, d-ac) = \vec{w} = (1, 1, 0) \Rightarrow \{bd = -1, bc = 1, d = ac\}$$

(luego, a, b, c y $d \neq 0$)

Sustituyendo $d = ac$, $\{bac = -1, bc = 1 \Rightarrow a = -1; d = -c = \frac{-1}{b} \Rightarrow$

$$\vec{u} = (1, -1, b), \vec{v} = \left(\frac{1}{b}, \frac{-1}{b}, 0\right)$$

Como forman un ángulo de $45^\circ \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{2}{b} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos 45^\circ \Rightarrow \frac{2}{b} = \sqrt{b^2 + 2} \cdot \sqrt{\frac{2}{b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{2}{b} = \sqrt{b^2 + 2} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \sqrt{b^2 + 2} = 2 \Rightarrow b^2 + 2 = 4 \Rightarrow b = \pm \sqrt{2}$$

Si $b = \sqrt{2}$ los vectores son $\vec{u} = (1, -1, \sqrt{2}), \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Si $b = -\sqrt{2}$ los vectores son $\vec{u} = (1, -1, -\sqrt{2}), \vec{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

5.- Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(0, 2)$ y cuya directriz es la recta de ecuación $y = -2$.

Resolución

La parábola que se pide es el L.G. de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de la directriz, $r: y + 2 = 0$ y del foco $F(0, 2)$, es decir $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$

Luego, $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{|y + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y + 2|$. Elevando al cuadrado, $x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4$

Simplificando nos queda la ecuación de la parábola $p: x^2 = 8y$

6.- Sean r y s las rectas dadas por:

$$r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación de un plano que contenga a r y sea paralelo a s .

Resolución

En las ecuaciones de r hacemos $x = 0$, $\{y - 1 = 0, -y + z = 0\}; y = 1 = z$. Luego, el punto $A(0, 1, 1) \in r$

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -3) // (-1, 1, 3)$.

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1) // (0, 0, 1)$.

El plano π que se pide tiene como vectores directores $\vec{d}_r = (-1, 1, 3)$ y $\vec{d}_s = (0, 0, 1)$

Un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 0)$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Como π pasa por $A(0, 1, 1)$ de r , entonces $\pi: 1(x - 0) + 1(y - 1) + 0(z - 1) = 0 \Rightarrow \pi: x + y - 1 = 0$

7.- Cuatro puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas:

$A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, -2)$, $C(3, 1, 0)$ y $D(m, -1, 4)$.

(a) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están sobre una línea recta?

En caso afirmativo, determina dicha recta; en caso negativo, di por qué no están alineados.

Resolución

$\vec{AB} = (-1, -1, -5)$ // $\vec{AC} = (2, -1, -3) \Rightarrow \vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son l.i. Luego A, B y C no están en la misma recta y, por tanto, tampoco están en la misma recta A; B, C y D.

(b) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están sobre un plano? En caso afirmativo, determina dicho plano; en caso negativo, di por qué no son coplanarios.

Resolución

Sabemos que $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son l.i. Hallemos plano π que contiene a los puntos A, B y C.

Un vector normal de π es

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, -13, 3) // (2, 13, -3)$$

Como π pasa por $A(1, 2, 3)$, entonces $\pi: 2(x - 1) + 13(y - 2) - 3(z - 3) = 0 \Rightarrow \pi: 2x + 13y - 3z - 19 = 0$

A, B, C y D están en el mismo plano $\Leftrightarrow D(m, -1, 4) \in \pi \Leftrightarrow 2m + 13(-1) - 3 \cdot 4 - 19 = 0 \Leftrightarrow 2m - 44 = 0$

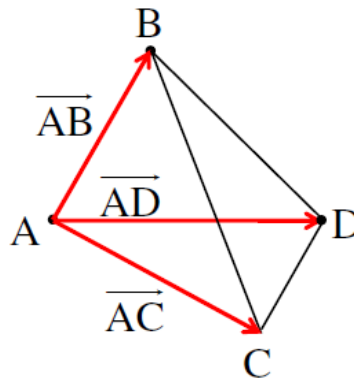
Luego, para $m = 22$, los cuatro puntos son coplanarios, pertenecen al plano π .

(c) Para $m = 2$, ¿determinan estos cuatro puntos un tetraedro? En caso afirmativo, calcula el volumen de dicho tetraedro; en caso negativo, di porque no lo determinan

Resolución

Para $m = 2$, sabemos que $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, -2)$, $C(3, 1, 0)$ y $D(2, -1, 4)$ no son coplanarios

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 30 - 5 + 9 + 2 = 40$$



$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6} |40| = \frac{20}{3} \approx 6,67 \text{ u}^3$$

8.- Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 8 \\ 3x - y + mz = -2m \end{cases}$

(a) Determina si existe y, en ese caso, calcula el valor del parámetro m para el cual los tres planos determinados por las ecuaciones del sistema se cortan en una línea recta.

Resolución

Los planos se cortan en una recta $\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & m & -2m \end{pmatrix} = 2$

Luego, debe ser $|\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix}| = 0$. Desarrollando, $-2m - 3 - 1 + 3 + 2 + m = 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Efectivamente, para $m = 1$,

$$rg(2 \ - \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 8 \ 3 \ - \ 1 \ 1 \ - \ 2) \ f2 - f1 \ f3 - f1 = rg(2 \ - \ 1 \ 1 \ 3 \ - \ 1 \ 0 \ 0 \ 5 \ 1 \ 0 \ 0 \ - \ 5) \ f2 =$$

porque el menor $|2 \ - \ 1 \ 1 \ 0| = 1 \neq 0$. Además, los planos se cortarían en la recta

$$r: \{2x - y + z = 3 \ x - y + z = 8$$

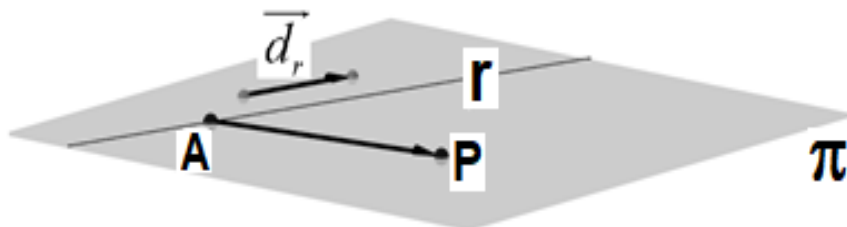
Conclusión: para $m = 1$ los tres planos se cortan en una recta

(b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta determinada en el apartado anterior y pasa por el punto $(2, 1, 3)$

Resolución

Observamos que $P(2, 1, 3) \notin r$ porque no cumple sus ecuaciones:

$$\{2 \cdot 2 - 1 + 3 = 6 \neq 3 \ 2 - 1 + 3 = 4 \neq 8$$



Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1) // (0, 1, 1)$.

Si en $r: \{2x - y + z = 3 \ x - y + z = 8$ hacemos $y = 0$, $\{2x + z = 3 \ x + z = 8$; restando, $x = -5$; $z = 13$. Luego, $A(-5, 0, 13) \in r$.

El plano π que nos piden tiene como vectores directores $\vec{d}_r$ y $\vec{AP} = (7, 1, -10)$

Un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -10 \end{vmatrix} = (-11, 7, -7) // (11, -7, 7)$

Y como π pasa por $P(2, 1, 3)$, entonces $\pi: 11(x - 2) - 7(y - 1) + 7(z - 3) = 0 \Rightarrow \pi: 11x - 7y + 7z - 36 = 0$

9.- Sean π_1 y π_2 los planos de ecuaciones: $\pi_1: x - 2y + z + 3 = 0$ y $\pi_2: x - 2y + z - 4 = 0$.

Explica algún procedimiento para saber si un punto de $\mathbb{R}^3$ se encuentra entre π_1 y π_2 y aplícalo para saber si el punto $P(2, 2, 1)$ se encuentra o no entre dichos planos.

Resolución

Los planos paralelos a π_1 y π_2 son de la forma $\alpha: x - 2y + z + d = 0$

Sustituyo el punto $P(2, 2, 1)$ en el plano y obtengo el valor de d : $2 - 2(2) + 1 + d = 0$, de donde $d = 1$

Como son planos paralelos el valor de d nos indica lo "alto" a "bajo" que están, y vemos que el valor obtenido 1 está entre -4 y 3 . Por tanto, el punto está entre dichos planos.

10.- Considera el tetraedro de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(0, 0, 0)$.

(a) Halla la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A , B y C .

Resolución

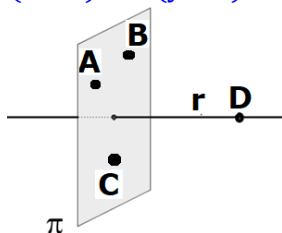
El plano π determinado por los puntos A , B y C tiene como vectores directores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$

Un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Y como π pasa por $A(1, 0, 0)$, entonces $\pi: 1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow \pi: x + y + z - 1 = 0$



Al ser $r \perp \pi$, un vector director de r es $\vec{d}_r = \vec{n} = (1, 1, 1)$

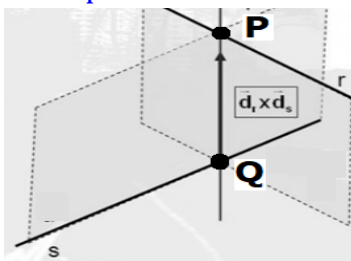
Y como r pasa por $D(0, 0, 0)$, unas ecuaciones paramétricas de r son $r: \{x = k, y = k, z = k\}$

(b) Halla la mínima distancia entre la recta r y la recta que pasa por los puntos A y B .

Resolución

La recta s que pasa por A y B tiene vector director $\vec{d}_s = \vec{AB} = (-1, 1, 0)$

Y como s pasa por $A(1, 0, 0)$, unas ecuaciones paramétricas de s son $s: \{x = 1 - k', y = k', z = 0\}$



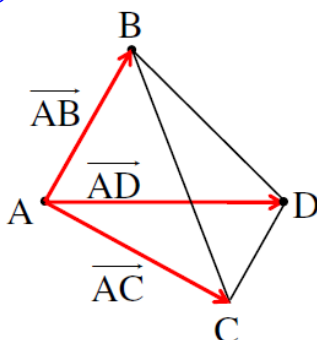
Un punto genérico de r es $P(k, k, k)$ y uno de s es $Q(1 - k', k', 0)$, $\vec{PQ} = (1 - k' - k, k' - k, -k)$
 $\vec{PQ} \parallel \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2) \Rightarrow \frac{1 - k' - k}{-1} = \frac{k' - k}{-1} = \frac{-k}{2}$. Resolviendo,
 $k = \frac{1}{3}, k' = \frac{1}{2}$

$$\text{dist}(r, s) = |\vec{PQ}| = \left| \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1}{6} |(1, 1, -3)| = \frac{1}{6} \sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} = \frac{\sqrt{11}}{6} \cong 0,55 \text{ u}$$

(c) Calcula el volumen del tetraedro.

Resolución

$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(0, 0, 0)$.



$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepípedo}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6} |\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}|$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |-1| = \frac{1}{6} \cong 0,17 \text{ u}^3$$

OTROS DEL 1998 (COU I)

1.-

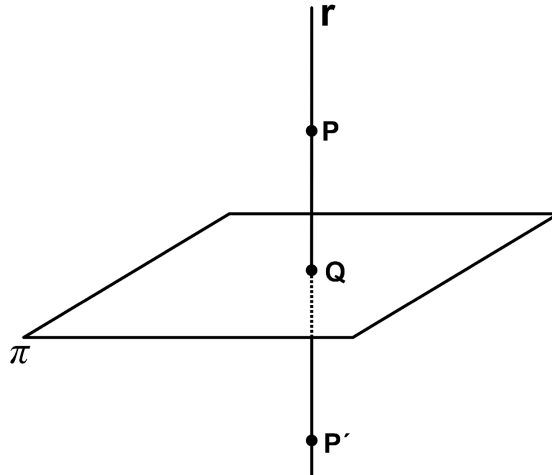
RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

(a) Halla el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano $z = 4$.

Resolución

$P(1, 2, 3) \notin \pi: z = 4$ porque no cumple su ecuación, $3 \neq 4$.



Un vector director de r es el vector normal del plano, $\vec{d} = \vec{n} = (0, 0, 1) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + k \end{cases}$

Hallamos el punto de corte, Q , entre el plano y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano, $3 + k = 4$; $k = 1$. Luego, el punto de corte es $Q(1, 2, 4)$

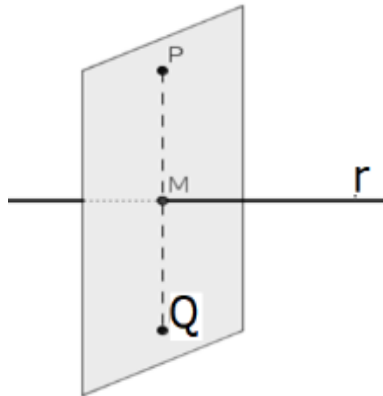
Calculamos el simétrico $P'(a, b, c)$ de $P(1, 2, 3)$ usando que Q es el punto medio del segmento PP' :

$\begin{cases} \frac{a+1}{2} = 1, & a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1 \\ \frac{b+2}{2} = 2, & b + 2 = 4 \Rightarrow b = 2 \\ \frac{c+3}{2} = 4, & c + 3 = 8 \Rightarrow c = 5 \end{cases}$. El punto simétrico que se pide es $P'(1, 2, 5)$

(b) Halla el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de la recta r dada por $r: \begin{cases} x = 1 \\ z = 4 \end{cases}$

Resolución

El punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ sería el punto Q del dibujo.



- Hallamos el plano α que pasa por P y es ortogonal a la recta, que en paramétricas es $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = 4 \end{cases}$

Un vector normal $\vec{n}_\alpha$ del plano α es el vector director de r : $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_r = (0, 1, 0)$

Y como α pasa por P , entonces $\alpha: 0(x - 1) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0 \Rightarrow \alpha: y - 2 = 0$

- Hallamos M , punto de corte de r y α , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano, $k - 2 = 0 \rightarrow k = 2$. Luego, el punto de corte es $M(1, 2, 4)$

- Por último, hallamos el simétrico $Q(a, b, c)$ de $P(1, 2, 3)$ usando que M es el punto medio del

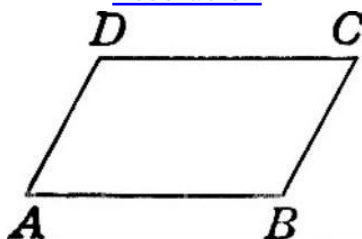
segmento PQ:

$\left\{ \frac{a+1}{2} = 1, a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1 \frac{b+2}{2} = 2, b + 2 = 4 \Rightarrow b = 2 \frac{c+3}{2} = 4, c + 3 = 8 \Rightarrow c = 5 \right.$. El punto simétrico que se pide es $P'(1, 2, 5)$

2.- Los puntos $A(-4, 5, -2)$, $B(2, -2, 0)$, $C(3, -4, 2)$ y $D(\alpha, \beta, \gamma)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo.

(a) Halla α , β y γ .

Resolución

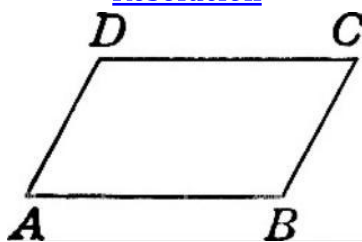


Por ser un paralelogramo, $\vec{BA} = \vec{CD} \Rightarrow (-6, 7, -2) = (\alpha - 3, \beta + 4, \gamma - 2)$. Igualando componentes,

$$\left\{ \begin{aligned} -6 &= \alpha - 3 \Rightarrow \alpha = -3 \\ 7 &= \beta + 4 \Rightarrow \beta = 3 \\ -2 &= \gamma - 2 \Rightarrow \gamma = 0 \end{aligned} \right. \text{ . Luego, } D(-3, 3, 0)$$

(b) Encuentra un vector perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

Resolución



Sabemos que $A(-4, 5, -2)$, $B(2, -2, 0)$, $C(3, -4, 2)$ y $D(-3, 3, 0)$

El plano π que contiene al paralelogramo tiene vectores directores $\vec{AB} = (6, -7, 2)$ y

$$\vec{AD} = (1, -2, 2)$$

Luego, un vector perpendicular a π es

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-10, -10, -5) // (2, 2, 1)$$

(c) Calcula el área de dicho paralelogramo.

Resolución

$$A(\text{paralelogramo}) = \left| \vec{AB} \times \vec{AD} \right| = |(-10, -10, -5)| = 5|(-2, -2, -1)| = 5 \cdot 3 = 15$$

(d) Halla la ecuación del plano perpendicular al paralelogramo que contiene su diagonal AC.

Resolución

El plano α que se pide tiene vectores directores $\vec{n} = (2, 2, 1)$ y $\vec{AC} = (7, -9, 4)$

$$\text{Un vector perpendicular a } \alpha \text{ es } \vec{n}_\alpha = \vec{n} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & -9 & 4 \end{vmatrix} = (17, -1, -32)$$

$$\text{Como } \alpha \text{ pasa por } C(3, -4, 2), \alpha: 17(x-3) - 1(y+4) - 32(z-2) = 0 \Rightarrow \alpha: 17x - y - 32z + 9 = 0$$

3.- Considera las rectas r y s dadas por $r: \frac{x-a}{2} = \frac{y}{a} = z$ y $s: \{x = y, z = 1 + a\}$

(a) Encuentra el valor de a para el que las rectas r y s son perpendiculares. Para dicho valor, halla la ecuación de un plano que contenga a s y sea paralelo a r .

Resolución

Un vector director de r es $\vec{d}_r = (2, a, 1)$; $s: \{x = y, z = 1 + a\} \Rightarrow$ un vector director de s es $\vec{d}_s = (1, 1, 0)$

$r \perp s \Leftrightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0$. Operando, $2 + a = 0$. Luego, $a = -2$

Para $a = -2$, $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-2} = z$ y $s: \{x = y, z = -1\}$; un punto de s es $B(0, 0, -1)$

El plano π que se pide tiene vectores directores $\vec{d}_r = (2, -2, 1)$ y $\vec{d}_s = (1, 1, 0)$

Un vector perpendicular a π es $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 4)$

Como π pasa por $B(0, 0, -1)$ de s , $\pi: -1(x-0) + 1(y-0) + 4(z+1) = 0 \Rightarrow \pi: -x + y + 4z + 4 = 0$

(b) Determina un valor positivo del parámetro para que las rectas r y s son coplanarias y haya la ecuación de la recta que es perpendicular a ambas y pasa por el punto $P(1, -2, 3)$.

Resolución

Sabemos que $r \equiv \frac{x-a}{2} = \frac{y}{a} = z$, $A(a, 0, 0) \in r$ y $s: \{x = y, z = 1 + a\}$, $B(0, 0, 1 + a) \in s$

r y s coplanarias $\Leftrightarrow$

$$0 = \det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1+a \end{vmatrix} = 2 + 2a + a - a - a^2 = -a^2 + 2a + 2$$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)2}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-2} \text{ y como } a > 0, a = 1 + \sqrt{3}. \text{ Para } a = 1 + \sqrt{3}, r \text{ y } s \text{ son coplanarias}$$

$\vec{d}_r = (2, a, 1)$ y $\vec{d}_s = (1, 1, 0)$; Un vector director de la recta t que se pide es

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 2-a); t \text{ pasa por } P,$$

$$t: \{x = 1 - k'y = -2 + k'z = 3 + (2-a)k' \Rightarrow t: \{x = 1 - k'y = -2 + k'z = 3 + (1 - \sqrt{3})k'\}$$

4.-

(a) Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s siendo:

$$r: \{y = 2z - 4, x = 3z - 8\}, s: \frac{x-10}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

Resolución

En las ecuaciones de r hacemos $z = 0$, $\{y = -4, x = -8\}$. Luego, el punto $A(-8, -4, 0) \in r$

$r: \{-y + 2z = 4, -x + 3z = 8\}$. Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3, -2, -1) // (3, 2, 1)$.

$B(10, 2, 0) \in s$ y un vector director de s es $\vec{d}_s = (1, -1, 1)$.

Como el plano π que se pide tiene como vectores directores $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$, un vector normal de π

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

es $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 3 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -2, -5) // (-3, 2, 5)$

π pasa por $A(-8, -4, 0)$ de $r \Rightarrow \pi: -3(x+8) + 2(y+4) + 5(z-0) = 0 \Rightarrow \pi: -3x + 2y + 5z - 16 = 0$

(b) Determina el punto de corte del plano π calculado en el apartado anterior con una de las rectas bisectrices del ángulo formado por dos ejes coordenados.

Resolución

Una bisectriz del eje OX y el eje OY es la recta $b: \{x = k, y = k, z = 0\}$

Para calcular el punto de corte Q de la recta con el plano, sustituimos en el plano π :

$-3k + 2k + 5 \cdot 0 - 16 = 0 ; k = -16$. El punto de corte es $Q(-16, -16, 0)$

5.- Consideremos en R^3 el punto $P(3, -2, 0)$ y la recta r dada por $r: \{y = 3x - 6, z = 0\}$

(a) Calcula el punto Q que es simétrico de P respecto de la recta r .

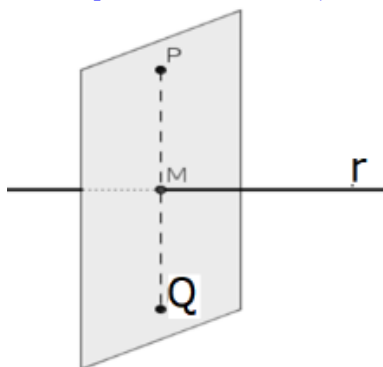
Resolución

Haciendo $x = 0$ queda $\{y = -6, z = 0\}$. Luego, el punto $(0, -6, 0) \in r$.

Un vector director de $r: \{3x - y = 6, z = 0\}$ se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los

planos que la definen: $\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 0) // (1, 3, 0) \Rightarrow$
 $r: \{x = k, y = -6 + 3k, z = 0\}$

El punto simétrico de P respecto de r sería el punto Q del dibujo.



- Hallamos el plano π que pasa por $P(3, -2, 0)$ y es ortogonal a la recta.

Un vector normal $\vec{n}$ del plano π es el vector director de $r: \vec{n} = \vec{d} = (1, 3, 0)$

Y como π pasa por P, entonces $\pi: 1(x-3) + 3(y+2) + 0(z-0) = 0 \Rightarrow \pi: x + 3y + 3 = 0$

- Hallamos M, punto de corte de r y π , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano, $k + 3(-6 + 3k) + 3 = 0 ; 10k - 15 = 0 ; k = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$

- Por último, hallamos el simétrico $Q(a, b, c)$ de $P(3, -2, 0)$ usando que M es el punto medio del

segmento PQ:

$\left\{ \frac{a+3}{2} = \frac{3}{2}, 2a + 6 = 6 \Rightarrow a = 0, \frac{b-2}{2} = -\frac{3}{2}, 2b - 4 = -6 \Rightarrow b = -1, \frac{c+0}{2} = 0 \Rightarrow c = 0 \right\}$. El punto simétrico que se pide es $Q(0, -1, 0)$

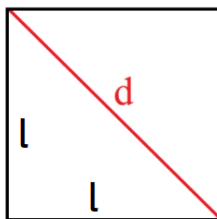
(b) Halla el área del cuadrado contenido en el plano $z = 0$ una de cuyas diagonales es el segmento PQ.

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Resolución

$P(3, -2, 0)$, $Q(0, -1, 0)$; la diagonal PQ mide $d = |\vec{PQ}| = |(-3, 1, 0)| = \sqrt{10}$.



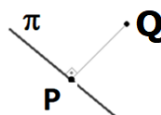
Por el teorema de Pitágoras $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$. El área del cuadrado es $A = l^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ u}^2$

6.- Dados el plano $\pi: x + 2y - z + 3 = 0$ y el punto $Q(4, 5, -1)$, se pide:

(a) Halla el punto P del plano π que está más cerca de Q.

Resolución

Sea π el plano dado y sea $P(x, y, z)$ el punto buscado. Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, 2, -1)$



Como $P \in \pi$, $x + 2y - z + 3 = 0$ y como $\vec{n} \parallel \vec{QP} \Rightarrow$

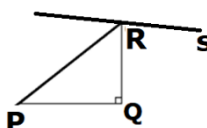
$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 8 = y - 5 \\ 4 - x = z + 1 \end{cases}$$

Nos queda el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}$. Resolviendo, $x = 1, y = -1, z = 2$. Luego, $P(1, -1, 2)$

(b) Halla el punto R de la recta s dada por las ecuaciones $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ para el que se verifica que el

triángulo PQR es un triángulo cuyo ángulo recto es el del vértice Q.

Resolución



$P(1, -1, 2)$, $Q(4, 5, -1)$ y $s: \begin{cases} x = -y \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -k \\ y = k \\ z = 4 \end{cases}$, $\vec{d}_s = (-1, 1, 0)$. Como $R \in s$ es de la forma $R(-k, k, 4)$.

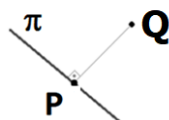
Al ser el triángulo rectángulo en Q,

$$\vec{QR} = (-k - 4, k - 5, 5) \perp \vec{PQ} = (3, 6, -3) = 0 \Rightarrow \vec{QR} \cdot \vec{PQ} = 0.$$

Operando, $-3k - 12 + 6k - 30 - 15 = 0$; $3k - 57 = 0$; $k = 19$ y el punto buscado es $R(-19, 19, 4)$

(c) ¿Cuál es la posición relativa del plano π y de la recta que pasa por P y Q?

Resolución



Usando (a), la recta y el plano son perpendiculares

RESUELTOS

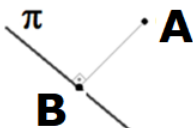
Profesor: Rafael Núñez Nogales

8.- Considera el plano $\pi: x + y + z = 2$ y el punto $A(1, 2, 5)$.

(a) Calcula el punto B del plano π que está más cerca de A .

Resolución

Sea $B(x, y, z)$ el punto buscado. Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, 1, 1)$



Como $B \in \pi, x + y + z = 2$ y como $\vec{n} \parallel \vec{AB} \Rightarrow$

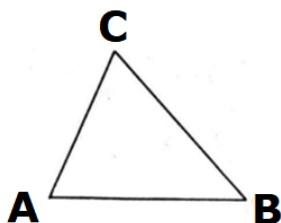
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{1} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = y-2 \\ x-1 = z-5 \end{cases}$$

Nos queda el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ x - z = -4 \end{cases}$. Resolviendo, $x = -1, y = 0, z = 3$.
Luego, $B(-1, 0, 3)$

(b) Dado el punto $C(1, 1, 0)$ calcula el área del triángulo ABC .

Resolución

Tenemos $A(1, 2, 5)$, $B(-1, 0, 3)$ y $C(1, 1, 0)$



Se pide el área del triángulo ABC que es, $A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$\vec{AB} = (-2, -2, -2), \vec{AC} = (0, -1, -5);$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (8, -10, 2)$$

$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |(8, -10, 2)| = \frac{1}{2} 2|(4, -5, 1)| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{42} \cong 6,48 \text{ u}^2$$

9.- Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ 6x + 5z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

(a) Halla el valor de "a" para el que el sistema tiene infinitas soluciones.

Resolución

Al ser un sistema homogéneo, tendrá infinitas soluciones si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo. Es decir, $\begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ 6 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando, $-20a - 24 + 18a + 10 = 0$; $a = -7$

(b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada en el espacio por el sistema de ecuaciones obtenido en el apartado anterior.

Resolución

Para $a = -7$, $\begin{cases} x + 7y + 2z = 0 \\ 6x + 5z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$. Como $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y las infinitas soluciones del sistema corresponden

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

a $r: \begin{cases} 6x + 5z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$; $A(0, 0, 0) \in r$. Un vector director de r es producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (10, 2, -12) // (5, 1, -6) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 5k \\ y = k \\ z = -6k \end{cases}$$

(c) Calcula las ecuaciones de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

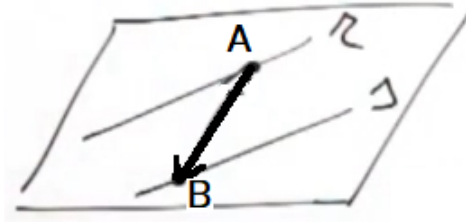
Resolución

Por ser s paralela a r tiene el mismo vector director. Y como s pasa por $B(1, 1, 1)$,

$$s: \begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - 6k \end{cases}$$

(d) Calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s .

Resolución



$A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$. El plano π que se pide tiene vectores directores $\vec{d}_r = \vec{d}_s = (5, 1, -6)$ y $\vec{AB} = (1, 1, 1)$.

Luego, un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (7, -11, 4)$

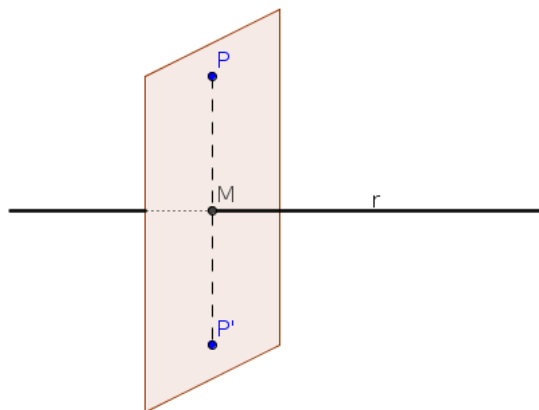
Como π pasa por $A(0, 0, 0)$, $\pi: 7(x - 0) - 11(y - 0) + 4(z - 0) = 0 \Rightarrow \pi: 7x - 11y + 4z = 0$

10.- Considera el punto $P(1, 2, 3)$ y las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$

$s: \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta s y pasa por el punto simétrico de P respecto de la recta r .

Resolución



$r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 2 + k \end{cases}$. El punto simétrico de P respecto de la recta r sería el punto $P'(a, b, c)$ del dibujo.

Al ser el plano π del dibujo perpendicular a la recta r , un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{d}_r = (2, -1, 1)$

Como π pasa por $P(1, 2, 3)$, entonces $\pi: 2(x - 1) - 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y + z - 3 = 0$

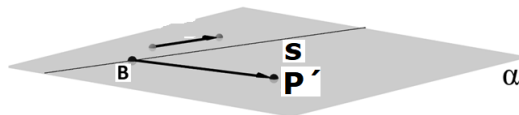
RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

- Hallamos M, punto de corte de r y π , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo r en la ecuación del plano: $2(1 + 2k) - (1 - k) + 2 + k - 3 = 0$, $k = 0$. Luego, $M(1, 1, 2)$

- Por último, hallamos el simétrico $P'(a, b, c)$ de $P(1, 2, 3)$ usando que M es el punto medio del segmento PP' : $\left\{ \frac{a+1}{2} = 1 \Rightarrow a = 1 \quad \frac{b+2}{2} = 2 \Rightarrow b = 2 \quad \frac{c+3}{2} = 2 \Rightarrow c = 1 \right.$. Por tanto, el simétrico es $P'(1, 0, 1)$



El plano α que se pide es el del dibujo:

$P'(1, 0, 1)$, $s: \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Haciendo, $z = 1$, $s: \begin{cases} 2x + y + 3 = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones, $3x + 4 = 1$, $x = -1$, $y = 0$. Luego, $B(-1, 0, 1) \in s$

Un vector director de s es producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$\vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 2 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4, 1, -3)$. Como los vectores $\vec{d}_s$ y $\vec{BP}' = (2, 0, 0)$ son vectores directores de α , un vector normal de α es

$\vec{n}_\alpha = \vec{d}_s \times \vec{BP}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 4 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -6, -2) // (0, 3, 1)$

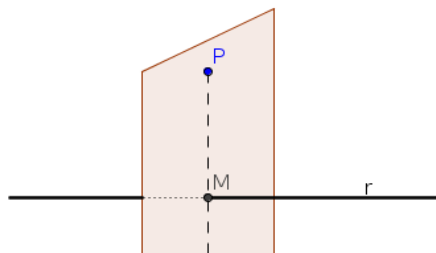
Y como α pasa por $P'(1, 0, 1)$, entonces $\alpha: 0(x - 1) + 3(y - 0) + 1(z - 1) = 0 \Rightarrow \alpha: 3y + z - 1 = 0$

11.- Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y - z - 5 = 0 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta s determinada por las siguientes

condiciones: (i) s corta a r (ii) s es perpendicular a r (iii) s contiene al punto $(1, 1, 0)$.

Resolución

Halleemos el plano π perpendicular a r que pasa por $P(1, 1, 0)$:



Un vector director de r es producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 1 & -1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 1, 4)$. Un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{d}_r = (-3, 1, 4)$

Como π pasa por $P(1, 1, 0)$, entonces $\pi: -3(x - 1) + 1(y - 1) + 4(z - 0) = 0 \Rightarrow \pi: -3x + y + 4z + 2 = 0$

Halleemos M, punto de corte de r y π , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y - z - 5 = 0 \\ -3x + y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$. Resolviendo el sistema, $x = \frac{31}{26}$, $y = \frac{33}{26}$, $z = \frac{2}{26}$;

$M\left(\frac{31}{26}, \frac{33}{26}, \frac{2}{26}\right)$

La recta s que se pide pasa por $P(1, 1, 0)$ y tiene vector director $\vec{PM} = \left(\frac{5}{26}, \frac{7}{26}, \frac{2}{26}\right) // (5, 7, 2)$

Por tanto, $r: \{x = 1 + 5k \text{ y } y = 1 + 7k \text{ z } = 2k$