الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة، نعتبر في Z^2 المعادلة: $5x - 6y = 3$.....(1).

1. – أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3.
   - استنتج حلا خاصا للمعادلة (1).
2. حل في Z^2 المعادلة (1) ثم عين الأعداد الصحيحة a بحيث: $\{a \equiv -1[6]\ a \equiv -4[5]$
3. من بين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1)، عين الثنائيات التي تحقق: $x^2 - y^2 < 56$.
4. A و B عددان طبيعيان حيث: A يكتب $\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذي الأساس 3 و B يكتب $\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5، هل يمكن تعيين α و β حتى تكون الثنائية $(A; B)$ حلا للمعادلة (1).

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب غير معدوم z العدد $P(z)$ حيث: $P(z) = z + \frac{4}{z}$.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z: (E) ..... $P(z) = -2$.
2. نرمز بـــــــ: z_1، z_2 لحلي المعادلة (E).

أكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل الأسي ثم بين أن: $(z_1)^{2013} + (z_2)^{2013} = 2^{2014}$.

3. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب:
   $z_A = \alpha$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي موجب.
   - عين قيمة العدد α حتى يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع.
   - بين أنه يكون $P(z) = \overline{P(z)}$ إذا وفقط إذا كان $(z - \bar{z})(z.\bar{z} - 4) = 0$.
   - x و y عددان حقيقيان، عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة $z = x + iy$ حيث يكون $P(z)$ حقيقي.
   - تحقق أن النقط A ، B ، C تنتمي للمجموعة (Γ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط: $A(1; -2; 3)$، $B(-2; 1; -8)$، $C(0; 0; -2)$.

1. بين أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $AM^2 - CM^2 = 10$ هي مستوي (P) عمودي على المستقيم (AC) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.
2. - بين أن مجموعة النقط (S) المعرفة بالعلاقة: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z = 0$ هي سطح كرة مركزها $I(1; -\frac{1}{2}; -1)$ يطلب تعيين نصف قطرها R.
   - بين أن المستوي (P) يقطع (S) في دائرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها r.
3. لتكن G النقطة التي تحقق: $\vec{GA} + \vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$.
   - ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للنقط A، B، C ثم عين احداثيات النقطة G.
   - تحقق من أن G هي نقطة من (S) ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة G.
   - بين أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له ثم حدد الوضع النسبي لـــــ (Δ) و (S).

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على R كما يلي: $g(x) = 1 + x + e^x$.

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في R ثم تحقق أن: $-1.3 < \alpha < -1.2$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ على R.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R كما يلي: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. – أحسب نهايتي f عند طرفي مجال تعريفها، ماذا تستنتج؟
   - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحني (C_f).
2. – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
   - بين أن: $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
3. اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ادرس الوضع النسبي لـــــ: (T) و (C_f).
4. H نقطة فاصلتها x (x عدد حقيقي موجب) وترتيبها معدوم، المستقيم الموازي لمحور التراتيب والمار من H يقطع المنحني (C_f) في النقطة M ويقطع (Δ) في النقطة N، نضع: $\varphi(x) = MN$.
   - بين أن: $\varphi(x) = \frac{x}{e^x+1}$.
   - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب فإن: $\varphi'(x) = \frac{e^x g(-x)}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج قيمة x حيث يكون الطول MN أكبر ما يمكن.
   - بين أن المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ).
5. أرسم كلا من المستقيم (Δ) والمماس (T) والمنحني (C_f).
6. - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x بحيث $x \geq 1$ فإن: $\frac{e^x}{e^x+1} \leq f(x) \leq x$
   - استنتج حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = 1$ و $x = -\alpha$.

بالتوفيق الاستاذة ح.ع