

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CORRIGÉ

OPTION A

EXERCICE

1°) a) On sait que si f est une application continue sur $\mathbb{R}^2$, et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors les ensembles $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) < \alpha\}$ et $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) > \alpha\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. De plus, toute intersection d'ouverts est un ouvert.

$$D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2, u > 2\} \cap \{(u; v) \in \mathbb{R}^2, u < 4\} \cap \{(u; v) \in \mathbb{R}^2, v > 1\} \cap \left\{ (u; v) \in \mathbb{R}^2, v - \frac{u^2}{4} < 0 \right\}$$

Ainsi D est un ouvert, car les

projections $(u; v) \mapsto u$ et $(u; v) \mapsto v$ sont continues, à l'instar de l'application $(u; v) \mapsto v - \frac{u^2}{4}$.

De même, $\Delta = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x + y > 2\} \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 4\} \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, xy > 1\} \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x - y < 0\}$ est ouvert.

D et Δ sont ouverts

b) D est clairement inclus dans l'ensemble $\{(u; v) \in \mathbb{R}^2, |u| < 4 \text{ et } |v| < 4\}$, qui représente la boule de centre (0;0) et de rayon 4 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Donc D est borné, et il en est de même de Δ , car les conditions $0 < x + y < 4$ et $xy > 0$ impliquent aussi $|x| \text{ et } |y| < 4$.

D et Δ sont bornés

c) L'application $\varphi_0 : (x; y) \mapsto (x + y; xy)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, et donc sa restriction φ_1 à l'ouvert Δ l'est aussi.

Mais si $(x; y) \in \Delta$, alors $u = x + y$ vérifie $2 < u < 4$ et $v = xy$ vérifie $1 < v$. De plus, comme $x < y$, le polynôme à coefficients réels $(X - x)(X - y) = X^2 - uX + v$ admet deux racines réelles distinctes, ce qui implique $u^2 - 4v > 0$.

Il en résulte que l'image de Δ par φ_1 est incluse dans D , et donc que φ_1 induit une application ϕ de Δ dans D .

$\phi : (x; y) \mapsto (x + y; xy)$ est une application de classe C^∞ de Δ dans D

d) Soit $(u; v) \in D$. Comme $v < \frac{u^2}{4}$, le polynôme $X^2 - uX + v$ admet deux racines réelles distinctes. Si on note x la plus petite et y l'autre, alors le couple $(x; y)$ est l'unique (sans la condition $x < y$ il y aurait aussi $(y; x)$) couple de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $x + y = u$, $xy = v$ et $x < y$. Ces conditions entraînent que $(x; y) \in \Delta$, et on en déduit l'existence pour $(u; v)$ d'un unique antécédent par ϕ .

ϕ réalise une bijection de Δ sur D

e) Le jacobien de ϕ en $(x; y)$ vaut $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y$.

Remarque: ce jacobien ne s'annule pas sur Δ , on en déduit donc que ϕ réalise un C^∞ -difféomorphisme de Δ sur D

2°) Effectuons dans I le changement de variables $(x; y) \mapsto (u; v)$, légitimé par le fait que ϕ est un C^∞ -difféomorphisme de Δ sur D . Son jacobien étant $x - y$, de valeur absolue $y - x$, on a $(x - y)dx dy = -du dv$ et on peut écrire que

$$I = - \iint_D u \cos v du dv$$

. Cette intégrale se calcule à l'aide de la formule de Fubini:

$$I = - \int_2^4 u du \int_1^{\frac{u^2}{4}} \cos v dv = \int_2^4 u \left(\sin 1 - \sin \frac{u^2}{4} \right) du = \int_2^4 u \sin 1 du - \int_2^4 u \sin \frac{u^2}{4} du = \left[\frac{u^2}{2} \sin 1 \right]_2^4 - \int_1^4 2 \sin x dx$$

, d'où:

$$I = 6 \sin 1 + 2 \cos 4 - 2 \cos 1$$

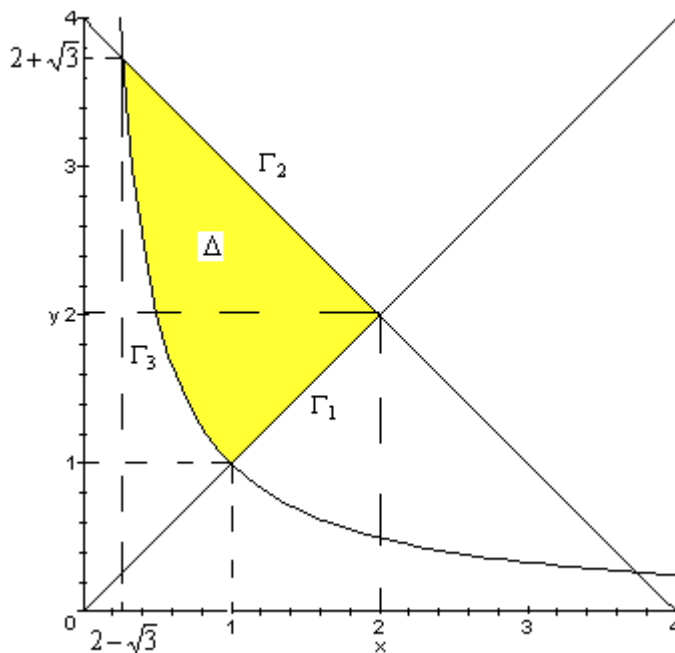
3°) $-I = \iint_{\Delta} (y^2 \cos xy - x^2 \cos xy) dx dy$. Or l'adhérence $\bar{\Delta} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leq x + y \leq 4 \text{ et } xy \geq 1 \text{ et } x \leq y\}$ de Δ est un compact simple du plan, dont la frontière $\partial \bar{\Delta}$ est négligeable au sens de l'intégrale double, de telle sorte qu'on a aussi

$$-I = \iint_{\Delta} (y^2 \cos xy - x^2 \cos xy) dx dy$$

D'après la formule de Green-Riemann, en posant

$$P(x, y) = x \sin xy \text{ et } Q(x, y) = y \sin xy,$$

on transforme $-I$ en:



$$-I = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \bar{\Delta}} P dx + Q dy$$

. Or le bord orienté $\partial \bar{\Delta}$ est la réunion des trois arcs suivants:

Γ_1 : le segment de la première bissectrice compris entre les points de coordonnées (1;1) et (2;2).

Γ_2 : le segment de la droite $y = -x+4$ compris entre les points de coordonnées (2;2) et $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.

Γ_3 : l'arc de l'hyperbole $y = 1/x$ compris entre les points de coordonnées $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$ et (1;1).

Il en résulte à l'aide d'un paramétrage évident de ces trois arcs, que l'on peut calculer $-I$ comme la somme:

$$-I = \int_1^2 2t \sin t^2 dt + \int_2^{2-\sqrt{3}} 2(t-2) \sin t(4-t) dt + \int_{2-\sqrt{3}}^1 \left(t - \frac{1}{t^3} \right) (\sin 1) dt = \left[-\cos t^2 \right]_1^2 + \left[\cos t(4-t) \right]_2^{2-\sqrt{3}} + (\sin 1) \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2t^2} \right]_{2-\sqrt{3}}^1$$

On retrouve ainsi que $I = (\cos 4 - \cos 1) + (\cos 4 - \cos 1) + (\sin 1)(7-1) = 6 \sin 1 + 2 \cos 4 - 2 \cos 1$.

PROBLÈME

I.

a) Soient h et $x \in \mathbb{R}^n$, $t, u \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0;1]$. Alors, en exploitant la convexité de W , on obtient:

Cela se traduit par: $\forall h, x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_{(h,x)}$ est convexe.

b) $\varphi_{(h,x)}$ est la composée de l'application $f: t \mapsto x + th$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, qui est de classe C^∞ , par W qui est de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Or la propriété de croissance des pentes pour les fonctions convexes réelles, étendue aux tangentes pour les fonctions convexes dérivables, permet d'affirmer que

$$\varphi'_{(h,x)}(0) \leq \frac{\varphi_{(h,x)}(1) - \varphi_{(h,x)}(0)}{1 - 0}, \text{ d'où l'inégalité } \varphi'_{(h,x)}(0) \leq \varphi_{(h,x)}(1) - \varphi_{(h,x)}(0).$$

1°) Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Posons $h = y - x$. D'après l'interprétation de $\varphi_{(h,x)}$ comme la composée $W \circ f$, vue en 1°)b),

on peut écrire que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'_{(h,x)}(t) = \langle \text{grad} W(x + th), h \rangle$. En appliquant cela en $t = 0$, on a $\varphi'_{(h,x)}(0) = \langle \text{grad} W(x), h \rangle$.

Mais $\varphi'_{(h,x)}(0) \leq \varphi_{(h,x)}(1) - \varphi_{(h,x)}(0) = W(x + h) - W(x)$. En reposant $h = y - x$, on a bien $\langle \text{grad} W(x), y - x \rangle \leq W(y) - W(x)$.

II.

1°) Il suffit d'appliquer la formule du I.2°) en posant $x = 0$ et $y = x$. On obtient $0 \leq W(x) - W(0)$, d'où $0 = W(0) \leq W(x)$.

2°) En reprenant le raisonnement de la question I.1°)a), on voit que la convexité stricte de W implique la convexité stricte de $\varphi_{(h,x)}$ pour $h \neq 0$. Sous ces hypothèses, l'inégalité du I.1°)b) devient également stricte. On en déduit alors que si $y \neq x$, l'inégalité du I.2°) est toujours stricte. Il suffit alors de reprendre les valeurs de la question précédente et on voit que si $x \neq 0$, alors $W(x) > 0$.

3°) a) Le cercle-unité $\{\|x\| = 1\}$ est un fermé borné, donc un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme W est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce compact. Elle atteint en particulier son minimum β en un point x_0 .

Or $\|x_0\| = 1 \Rightarrow x_0 \neq 0 \Rightarrow W(x_0) > 0$. Donc $\beta > 0$.

b) De plus, si $\|x\| \geq 1$, alors $\frac{1}{\|x\|} \in [0;1]$, et en appliquant l'inégalité de convexité à W pour le couple $(x; 0)$ on obtient:

$$\beta \leq W\left(\frac{1}{\|x\|}x + \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right)0\right) \leq \frac{1}{\|x\|}W(x) + \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right)W(0) = \frac{1}{\|x\|}W(x), \text{ d'où: } \beta\|x\| \leq W(x).$$

c) Comme $\beta > 0$, on en déduit immédiatement que $\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow W(x) \rightarrow +\infty$.

III.

1°) Remarquons que si $p = (p_1, \dots, p_n)$, alors $p \mapsto \|p\|^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit donc que H est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Ainsi, si $t \mapsto (q(t), p(t))$ est une solution de (H) sur un intervalle I , elle est dérivable sur I , et il en est alors de même de sa composée par H . De plus, la dérivée de $t \mapsto H(q(t), p(t))$ est:

$$t \mapsto \left\langle \text{grad} H(q(t), p(t)), \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle J^{-1} \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle -J \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

, ce qui implique par caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle que $t \mapsto H(q(t), p(t))$ est constante sur I .

2°) L'existence d'une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $(q(0), p(0)) = (0, 0)$ résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué au système différentiel (H), qui est de classe C^1 . D'après la question précédente, cette

solution vérifie: $\exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, H(q(t), p(t)) = K$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{2m} \|p(t)\|^2 + W(q(t)) = K$.

En évaluant cette égalité en $t = 0$, on obtient avec les conditions initiales $K = 0$.

Mais comme W est supposée strictement convexe, on se retrouve dans les hypothèses de la partie I., et on peut en déduire d'après I.1°) que $\forall t \in \mathbb{R}, W(q(t)) \geq 0$. On a donc affaire à une somme nulle de deux nombres positifs, et on en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}, \|p(t)\| = W(q(t)) = 0$, puis que $\forall t \in \mathbb{R}, (q(t), p(t)) = (0, 0)$. Conclusion:

$(0; 0)$ est un point d'équilibre de (H)

3°) On a toujours $\Psi \geq 0$, car W , puis H le sont.

Pour $s > 0$ fixé, soit $p_s = (s, 0, \dots, 0)$. Alors $\|(0, p_s)\|_2 = s$ et $H(0, p_s) = \frac{s^2}{2m}$. Donc $0 \leq \Psi(s) \leq \frac{s^2}{2m} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0 = \Psi(0)$.

On en déduit que Ψ est continue en 0.

4°) a) Montrons d'abord par l'absurde que si $\varepsilon > 0$, alors $\Psi(\varepsilon) > 0$. Supposons en effet que $\Psi(\varepsilon) = 0$. Alors

l'ensemble E des réels strictement positifs qui annulent Ψ est non vide. Il est de plus majoré par $\sqrt{2}$. En effet, Ψ est clairement croissante, et si si $\|(q, p)\|_2 \geq \sqrt{2}$, alors $\|(q, p)\|_2^2 \geq 2 \Rightarrow \|p\| \geq 1$ ou $\|q\| \geq 1$. Dans le premier cas on a

$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + W(q) \geq \frac{1}{2m}$ et dans le second cas $H(q, p) \geq W(q) \geq \beta \|q\| \geq \beta$, d'après II.3°. Ainsi $\Psi(\sqrt{2}) > 0$.

L'ensemble E admet donc une borne supérieure S .

Mais $\Psi(\varepsilon) = \inf \{H(q, p), \varepsilon \leq \|(q, p)\|_2\} = \inf \{H(q, p), \varepsilon \leq \|(q, p)\|_2 \leq S\}$. La couronne $\{\varepsilon \leq \|(q, p)\|_2 \leq S\}$ étant un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et H étant continue sur ce compact, la borne inférieure est atteinte en un couple $(q_\varepsilon, p_\varepsilon)$.

On a donc $H(q_\varepsilon, p_\varepsilon) = 0$, avec $\|(q_\varepsilon, p_\varepsilon)\|_2 \geq \varepsilon \Rightarrow (q_\varepsilon, p_\varepsilon) \neq (0; 0)$, ce qui est impossible.

Cela étant démontré (je ne suis pas sûr que l'auteur du problème ait remarqué cette difficulté), passons à la suite:

b) H étant positive et continue en $(0; 0)$, avec $H(0; 0) = 0$, on peut affirmer que pour ε (et donc $\Psi(\varepsilon)$) fixé on a:

$\exists \alpha > 0, \|(q, p)\|_2 < \alpha \Rightarrow 0 \leq H(q, p) < \Psi(\varepsilon)$. En prenant $\delta = \min(\alpha, \varepsilon)$, on obtient: $\|(q, p)\|_2 < \delta \Rightarrow 0 \leq H(q, p) < \Psi(\varepsilon)$.

c) Rectification de l'énoncé: l'hypothèse est certainement $\|(q_0, p_0)\|_2 < \delta$.

$t \mapsto \varphi(t, q_0, p_0)$ étant une solution de (H), est continue sur son intervalle de définition I . Il est donc de même de $g: t \mapsto \|\varphi(t, q_0, p_0)\|_2$.

Or $g(0) = \|(q_0, p_0)\|_2 < \delta < \varepsilon$. Si on suppose que $t \mapsto \varphi(t, q_0, p_0)$ sort de la boule de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon ε , cela signifie qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) \geq \varepsilon$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $t_1 \in]0; t[$ tel que $g(t_1) = \varepsilon$. On a donc $\exists t_1 > 0, \|\varphi(t_1, q_0, p_0)\|_2 = \varepsilon$.

d) $\|\varphi(t_1, q_0, p_0)\|_2 = \varepsilon \Rightarrow H(\varphi(t_1, q_0, p_0)) \in \{H(q, p), \varepsilon \leq \|(q, p)\|_2\} \Rightarrow H(\varphi(t_1, q_0, p_0)) \geq \Psi(\varepsilon)$ (définition de Ψ).

Mais d'autre part, d'après b), $\|\varphi(0, q_0, p_0)\|_2 = \|(q_0, p_0)\|_2 < \delta \Rightarrow H(\varphi(0, q_0, p_0)) < \Psi(\varepsilon)$.

Cela contredit le résultat du 1°), qui affirme que la fonction $t \mapsto H(\varphi(t, q_0, p_0))$ est constante sur I .

Ainsi la fonction $t \mapsto \varphi(t, q_0, p_0)$ ne peut pas sortir de la boule de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon ε , et on conclut:

$(0; 0)$ est un équilibre stable de (H)

IV.

a) La trilinearité de T implique que $W(0) = T(0,0,0) = 0$ (il aurait suffi que l'une des trois coordonnées soit nulle).

De plus, si $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, alors $W(q_1 + h, q_2, \dots, q_n) = T((q_1 + h, q_2, \dots, q_n), (q_1 + h, q_2, \dots, q_n), (q_1 + h, q_2, \dots, q_n))$.

En posant $u_1 = (1, 0, \dots, 0)$, on obtient en développant à l'aide de la trilinearité un polynôme du troisième degré en h , que l'on peut écrire $T(q + hu_1, q + hu_1, q + hu_1) = T(q, q, q) + h[T(u_1, q, q) + T(q, u_1, q) + T(q, q, u_1)] + o(h)$.

$$\frac{W(q_1 + h, q_2, \dots, q_n) - W(q_1, q_2, \dots, q_n)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} T(u_1, q, q) + T(q, u_1, q) + T(q, q, u_1)$$

Il en résulte que $\frac{\partial W}{\partial x_1}(q) = T(u_1, q, q) + T(q, u_1, q) + T(q, q, u_1)$, et ainsi $\frac{\partial W}{\partial x_1}(0) = T(u_1, 0, 0) + T(0, u_1, 0) + T(0, 0, u_1) = 0$.

Par conséquent, $\forall k \in [1; n], \frac{\partial W}{\partial x_k}(0) = 0$. D'où finalement $\text{grad} W(0) = 0$.
 $W(0) = 0$ et $\text{grad} W(0) = 0$

(on n'a cependant pas le droit d'écrire, comme dans l'énoncé, que $W(0) = \text{grad} W(0)$)

b) On ne peut pas déterminer si H présente un minimum en $(0;0)$. En effet, si par exemple T est alternée, alors W est

identiquement nulle, et $H(q, p) = \frac{1}{2m} \|p\|^2$ présente évidemment un minimum en tout point de la forme $(0; q)$.

L'auteur du problème espérant visiblement une réponse négative à sa question, il aurait dû remplacer l'hypothèse "forme trilinéaire non identiquement nulle" par "telle qu'il existe q tel que $T(q; q; q) \neq 0$ ". Dans ce cas, en effet, on a

$$T\left(\frac{q}{n}, \frac{q}{n}, \frac{q}{n}\right) = \frac{1}{n^3} T(q, q, q) \neq 0 \quad \text{avec } \frac{q}{n} \rightarrow 0, \quad \text{et} \quad T\left(-\frac{q}{n}, -\frac{q}{n}, -\frac{q}{n}\right) = (-1)^3 T\left(\frac{q}{n}, \frac{q}{n}, \frac{q}{n}\right) = -T\left(\frac{q}{n}, \frac{q}{n}, \frac{q}{n}\right),$$

ce qui permet d'affirmer que pour l'un au moins des couples $\left(0, \frac{q}{n}\right)$ ou $\left(0, -\frac{q}{n}\right)$, la valeur de H est strictement négative...

1°) a) Rappelons que si $p = (p_1, \dots, p_n)$, alors $\|p\|^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$, donc $\frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) = \frac{2p_i}{2m}$.

$$\text{D'où: } \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) p_i = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{m} = \frac{1}{m} \|p\|^2.$$

b) On a vu en 1°)a) que $\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) = \frac{\partial W}{\partial q_i}(q, p) = T(u_i, q, q) + T(q, u_i, q) + T(q, q, u_i)$, où $u_i = \left(0, 0, \dots, 0, \underset{n^{\circ}i}{1}, 0, \dots, 0\right)$.

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) q_i = T(q_i u_i, q, q) + T(q, q_i u_i, q) + T(q, q, q_i u_i)$$

On en déduit par trilinearité que
 Donc, en utilisant encore la trilinearité de T , on obtient:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) q_i = \sum_{i=1}^n T(q_i u_i, q, q) + \sum_{i=1}^n T(q, q_i u_i, q) + \sum_{i=1}^n T(q, q, q_i u_i) = T\left(\sum_{i=1}^n q_i u_i, q, q\right) + T\left(q, \sum_{i=1}^n q_i u_i, q\right) + T\left(q, q, \sum_{i=1}^n q_i u_i\right)$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^n q_i u_i = q, \quad \text{donc } \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) q_i = 3T(q, q, q) = 3W(q).$$

c) On sait que le produit scalaire standard est une forme bilinéaire continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et que H est continue.

Or U apparaît comme l'intersection de $\{H < 0\}$ et $\{\langle \cdot, \cdot \rangle > 0\}$, qui sont donc ouverts. C'est donc aussi un ouvert. De plus, l'adhérence de U s'obtient en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges, et on a bien

$$H(0,0) = \langle 0,0 \rangle = 0, \quad \text{donc } \underline{U \text{ est un ouvert dont } (0;0) \text{ est un point adhérent.}}$$

d) Le produit scalaire "standard" de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est la forme polaire de la norme $\|\cdot\|_2$ définie en III.3°, à savoir:

$$\langle (q, p), (q', p') \rangle_2 = \langle q, q' \rangle_1 + \langle p, p' \rangle_1. \quad \text{Mais} \quad \langle q, p \rangle_1 = \sum_{i=1}^n q_i p_i \Rightarrow \frac{\partial \langle \cdot, \cdot \rangle_1}{\partial q_i}(q, p) = p_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial \langle \cdot, \cdot \rangle_1}{\partial p_i}(q, p) = q_i$$

Or
$$\text{grad}v(q, p) = \left(\left(H(q, p) \frac{\partial \langle \dots \rangle_1}{\partial q_i}(q, p) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \langle q, p \rangle_1 \right)_{i \in [1, n]} , \left(H(q, p) \frac{\partial \langle \dots \rangle_1}{\partial p_i}(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \langle q, p \rangle_1 \right)_{i \in [1, n]} \right)$$

d'où:
$$\text{grad}v(q, p) = \left(\left(H(q, p) p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \langle q, p \rangle_1 \right)_{i \in [1, n]} , \left(H(q, p) q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \langle q, p \rangle_1 \right)_{i \in [1, n]} \right)$$

Et $J\text{grad}H(q, p)$ s'écrit matriciellement
$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1}(q, p) \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n}(q, p) \\ \frac{\partial H}{\partial p_1}(q, p) \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n}(q, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1}(q, p) \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n}(q, p) \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1}(q, p) \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial q_n}(q, p) \end{pmatrix}$$
, ce qui donne le vecteur de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$f(q, p) = \left(\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}(q, p), \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}(q, p) \right), \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}(q, p), \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}(q, p) \right) \right)$$

Par suite:

$$\langle \text{grad}v(q, p), f(q, p) \rangle_2 = H(q, p) \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \langle q, p \rangle_1 - H(q, p) \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) q_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \langle q, p \rangle_1$$

$$\langle \text{grad}v(q, p), f(q, p) \rangle_2 = H(q, p) \left(\frac{1}{m} \|p\|^2 - 3W(q) \right)$$

et en exploitant les formules de a) et b), on trouve

Mais comme $W(q) = H(q, p) - \frac{1}{2m} \|p\|^2$, on a finalement
$$\langle \text{grad}v(q, p), f(q, p) \rangle_2 = H(q, p) \left(\frac{3}{m} \|p\|^2 - 3H(q, p) \right)$$

Il est alors clair, puisque $H < 0$ sur U , que $\forall (q, p) \in U, \langle \text{grad}v(q, p), f(q, p) \rangle_2 < 0$.

(En revanche, je ne vois pas à quoi sert la propriété $\langle q, p \rangle_1 < 0$ et je l'enlève pour la suite de la définition de U).

2°) a) Comme $\varphi(t, q_0, p_0)$ est solution de (H) , on a $\varphi'(t, q_0, p_0) = J\text{grad}H(\varphi(t, q_0, p_0))$. Par conséquent:

$$v'(t) = \langle \text{grad}v(\varphi(t, q_0, p_0)), \varphi'(t, q_0, p_0) \rangle_2 = \langle \text{grad}v(\varphi(t, q_0, p_0)), J\text{grad}H(\varphi(t, q_0, p_0)) \rangle_2 = \langle \text{grad}v(\varphi(t, q_0, p_0)), f(\varphi(t, q_0, p_0)) \rangle_2$$

$$v'(t) = H(\varphi(t, q_0, p_0)) \left(\frac{3}{m} \|p\|^2 - 3H(\varphi(t, q_0, p_0)) \right) \leq -3(H(\varphi(t, q_0, p_0)))^2$$

D'après la question précédente, car $H < 0$ sur U .

Or, d'après la question III.1°), $H(\varphi(t, q_0, p_0)) = \text{constante} = H(\varphi(0, q_0, p_0)) = C_0$. Donc $\forall t \geq 0, v'(t) \leq -3C_0^2$.

$$\forall t > 0, \exists c > 0, \frac{v(t) - v(0)}{t} = v'(c) \Rightarrow v(t) \leq -3C_0^2 t + v(0)$$

b) D'après la formule des accroissements finis, on a alors

On en déduit immédiatement (car $C_0 < 0$ puisque $(q_0, p_0) \in U$) que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = -\infty$.

Ceci est une contradiction, car B_ε étant bornée, la fonction $(q, p) \mapsto v(q, p)$ étant continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, devrait rester bornée sur B_ε , et donc de même la fonction $t \mapsto v(t)$.

c) On en déduit que l'hypothèse "la solution reste dans B_ε " est erronée, et donc que pour tout $\varepsilon > 0$ toute solution de (H) partant d'un point de U finit par sortir de B_ε . Or elle ne peut pas sortir de U car elle reste sur la ligne de niveau $H(q, p) = C_0$. Donc nécessairement elle finit par sortir de la boule de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon ε .

d) $(0; 0)$ est bien un point d'équilibre de (H) , car la fonction nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vérifie bien (H) . En effet,

$$\text{grad}H(0,0)=\left(\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}(0,0)\right)_{i\in[1;n]},\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}(0,0)\right)_{i\in[1;n]}\right)=\left(\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(0,0)\right)_{i\in[1;n]},\left(\frac{p_i}{m}(0,0)\right)_{i\in[1;n]}\right)=(\text{grad}W(0),0)=(0,0)$$

L'équilibre stable se traduirait par: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|(q_0, p_0)\|_2 < \delta \Rightarrow \forall t \in I, \|\varphi(t, q_0, p_0)\|_2 < \varepsilon$ (voir III.5°).

Or on vient de voir qu'en prenant par exemple $\varepsilon = 1$, pour n'importe quel $\delta > 0$, on pouvait choisir un couple

(q_0, p_0) tel que $\|(q_0, p_0)\|_2 < \delta$ (ce qui est possible puisque $(0;0)$ est adhérent à U) pour lequel il existe $t \in I$ tel que $\|\varphi(t, q_0, p_0)\|_2 \geq \varepsilon$. Cela traduit que $(0;0)$ est un équilibre instable de (H) .