

Il Triangolo di Tartaglia

Che cos'è

Il triangolo di Tartaglia è un utile strumento per ricordare i coefficienti della potenza di un binomio. E' stato elaborato da Niccolò Tartaglia, matematico Bresciano.¹

Come si costruisce

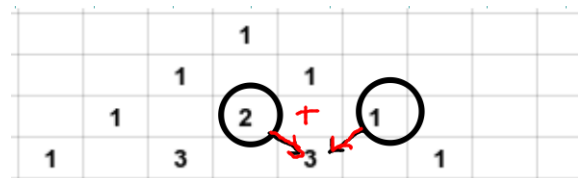
Numeriamo le righe del triangolo a partire dalla riga 0, dove si comincia con lo scrivere il numero 1 al centro.

Nelle righe successive il primo e l'ultimo numero sono sempre 1.

I numeri in ogni riga successiva alla prima vengono scritti in modo alternato e si ottengono come somma dei due sovrastanti.

Pertanto la riga 1 sarà composta da 1 e 1 e la riga 2 da 1 2 1 .

Iterativamente di seguito si costruisce il triangolo di Tartaglia:



riga 0										1									
riga 1										1		1							
riga 2										1		2		1					
riga 3										1		3		3		1			
riga 4										1		4		6		4		1	
riga 5										1		5		10		10		5	
riga 6										1		6		15		20		15	
riga 7										1		7		21		35		35	
riga 8										1		8		28		56		70	
riga 9										1		9		36		84		126	
riga 10										1		10		45		120		210	
riga 11										1		11		55		165		330	
riga 12										1		12		66		220		495	
riga 13										1		13		78		286		715	
riga 14										1		14		91		364		1001	

¹ Tartaglia nacque da una povera famiglia bresciana e a 6 anni rimase orfano del padre. Durante il sacco di Brescia da parte dei francesi il 19 febbraio 1512, con la famiglia si rifugiò nel duomo di vecchia Brescia. Il padre venne ucciso mentre Niccolò subì una frattura al cranio e un colpo di sciabola gli ferì mascella e palato. Sopravvisse grazie alle cure della madre ma gli rimase una evidente difficoltà ad articolare le parole. Per questo ebbe il soprannome "Tartaglia" che accettò e lui stesso utilizzò tutta la vita per firmare le sue opere.

A 14 anni poté finalmente pagarsi delle lezioni per imparare a scrivere. Grazie alla sua abilità in matematica, poté comunque guadagnarsi da vivere a Verona, dove fu insegnante di matematica dal 1521 e risolse l'equazione cubica o equazione di terzo grado. Tartaglia nel 1556 scrisse il "General trattato di numeri et misure", opera enciclopedica di matematica elementare, dove compare il famoso "triangolo di Tartaglia", applicato a problemi di probabilità. Il triangolo era già noto prima di Tartaglia ai cinesi. Diede anche un importante contributo alla diffusione delle opere dei matematici antichi. Sua è la prima traduzione dal latino in italiano degli Elementi di Euclide (1543).

La sua teoria sulle curve balistiche venne ripresa da Luis Collado nel 1586 nell'opera intitolata Platica manual de artilleria. Morì a Venezia il 13 dicembre del 1557.

Come si utilizza nelle potenze di un binomio

Per costruire la formula della potenza n-esima di un binomio si vanno a vedere i coefficienti presenti nella riga n del triangolo di Tartaglia e si utilizzano per i monomi formati da potenze decrescenti del primo monomio (da n a 0) e crescenti del secondo (da 0 a n), andando a formare un polinomio di grado n.

Esempio:

per costruire la formula della potenza 6 di un binomio si vanno a vedere i coefficienti presenti nella riga 6 del triangolo di Tartaglia: **1 6 15 20 15 6 1** e si utilizzano per i monomi formati da potenze decrescenti del primo monomio e crescenti del secondo, andando a formare un polinomio di sesto grado nel seguente modo:

$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$$

Perché funziona

Per scoprire il funzionamento del triangolo di Tartaglia, partiamo dalla riga 0. essa rappresenta $(a+b)^0$ che vale 1. Per $(a+b)^1$, riga 1 ho i coefficienti 1 1; In generale in $(a+b)^n$ si avrà come primo monomio a^n e come ultimo monomio b^n , entrambi con coefficiente 1.

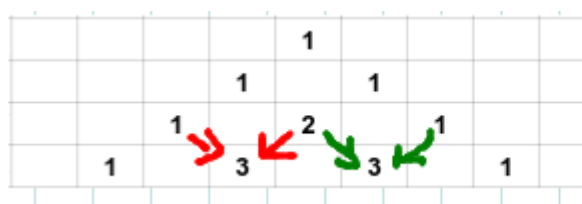
Cerchiamo di scoprire ora perché i coefficienti ottenuti dalla somma dei coefficienti della riga precedente

Svolgo $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$ notando che il coefficiente di ab (1) si somma al coefficiente di ba (1).

Svolgo ora $(a+b)^3 = (a+b)^2 (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$; inserisco questo prodotto in una tabella a doppia entrata per osservarlo meglio:

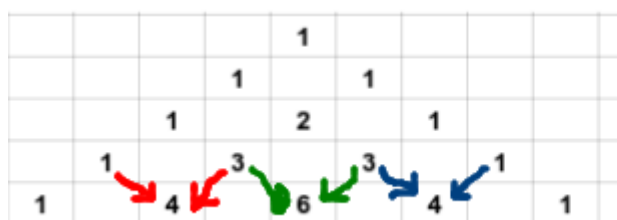
La somma dei termini simili produce proprio la somma che si deve fare nel triangolo di Tartaglia.

	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	a^2b	$2ab^2$	b^3



	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	a^2b	$2ab^2$	b^3

Svolgo analogamente la potenza quarta di un binomio, osservando la corrispondenza tra la somma di monomi simili e la somma che si deve fare per costruire la riga 4 del triangolo di Tartaglia.



	a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3
a	a^4	$3a^3b$	$3a^2b^2$	ab^3
b	a^3b	$3a^2b^2$	$3ab^3$	b^4

Somma dei coefficienti di ogni riga

Si può notare che sommando i numeri ottenuti in ogni riga si trovano questi valori:

Riga 0 : 1

Riga 1 : 2

Riga 2 : 4

Riga 3 : 8

Riga 4 : 16

Riga 5 : 32

...

Ad ogni riga corrisponde una potenza di 2

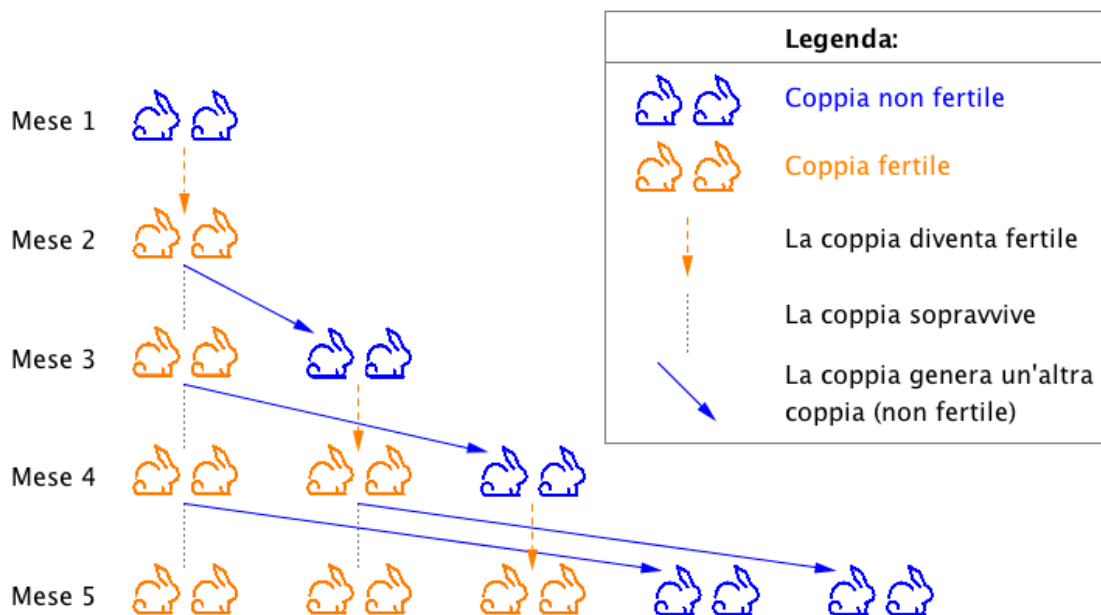
Per capire il perché si può ricordare che in ogni riga ci sono coefficienti delle potenze di un binomio, originati dal prodotto di $(a+b)$ n volte. Se non si sommassero i termini simili ci sarebbero in tutto 2^n monomi. I coefficienti presenti nella riga del triangolo non sono altro che il numero di monomi simili di un certo tipo, in particolare alla posizione i c'è il numero di monomi della potenza $a^{n-i} b^i$.

Ad esempio con $(a+b)^4$:

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = (a^2+ab+ba+b^2)(a^2+ab+ba+b^2) =$
 $= a^4 + a^3b + ba^3 + a^2b^2 + a^3b + a^2b^2 + a^2b^2 + ab^3 + a^3b + a^2b^2 + a^2b^2 + ab^3 + ab^3 + b^4$
che sono in tutto $16=2^4$ elementi.

I numeri di Fibonacci nel triangolo di Tartaglia

Leonardo Pisano detto il Fibonacci (1175-1250), cioè figlio di Bonaccio, individuò questa serie per la prima volta nel 1202, per risolvere un problema pratico: **quante coppie di conigli si ottengono in un anno da una sola coppia supponendo che produca ogni mese (tranne il primo) una nuova coppia che a sua volta diventa fertile a partire dal secondo mese?** La risposta è **144** coppie di conigli. In questa serie ogni numero è il risultato della somma dei due precedenti: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... fino all'infinito.



In matematica, la successione di Fibonacci si usa per indicare una sequenza di numeri interi positivi nella quale ciascun elemento è dato dalla somma dei due precedenti.

La successione è la seguente : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

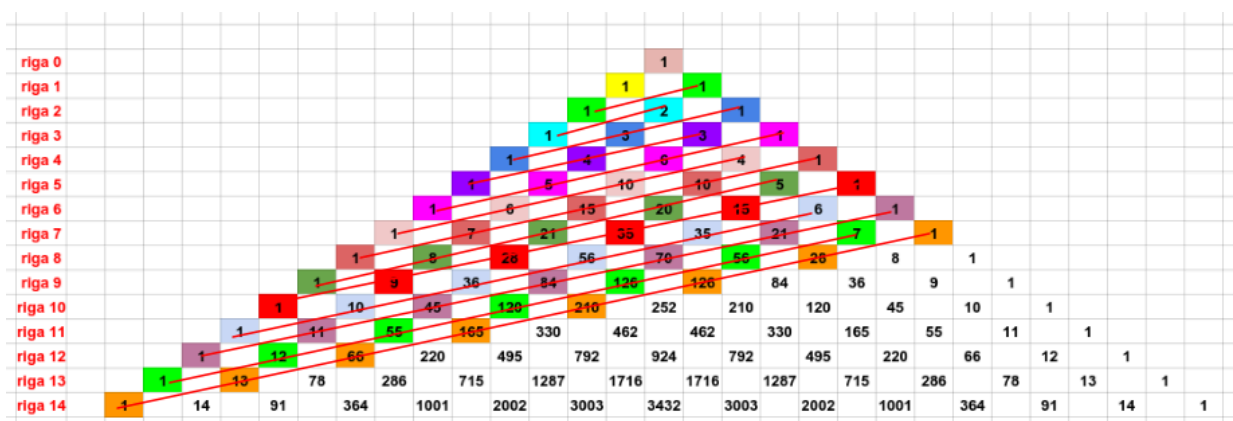
Può essere scritto in modo ricorsivo come

$$F_1=1$$

$$F_2=1$$

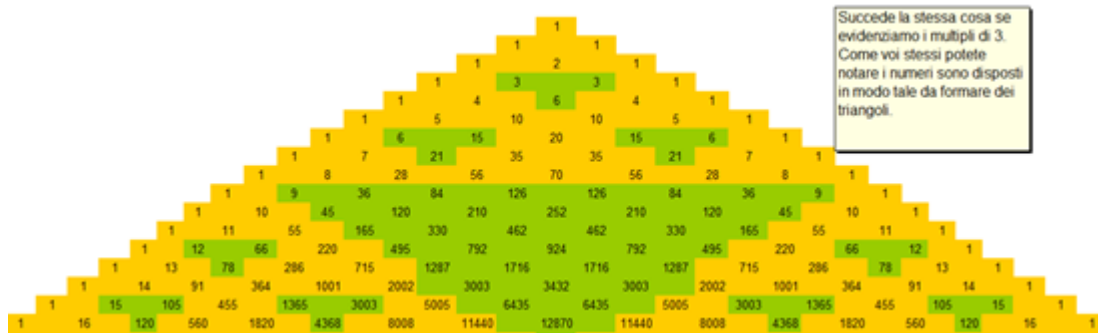
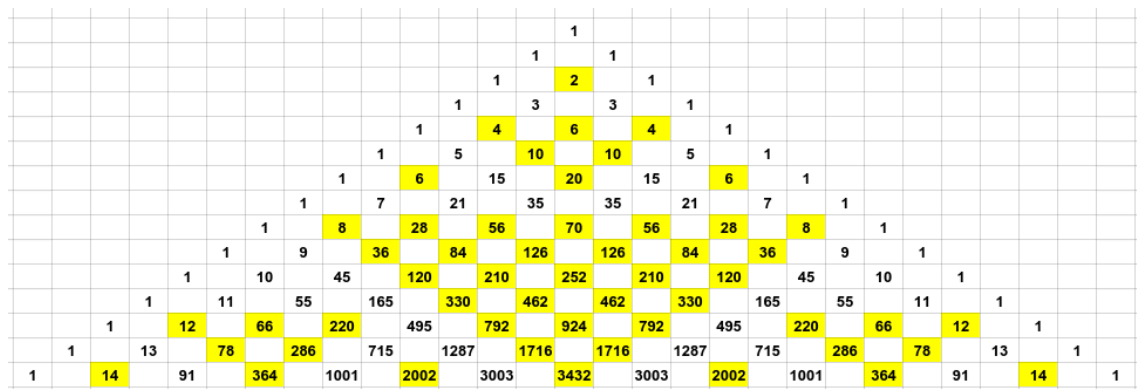
$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \text{ con } n>2$$

Se sommiamo nel triangolo di tartaglia le diagonali come indicato nel disegno otteniamo i numeri di Fibonacci:



Configurazione dei multipli di 2,3,4,5;

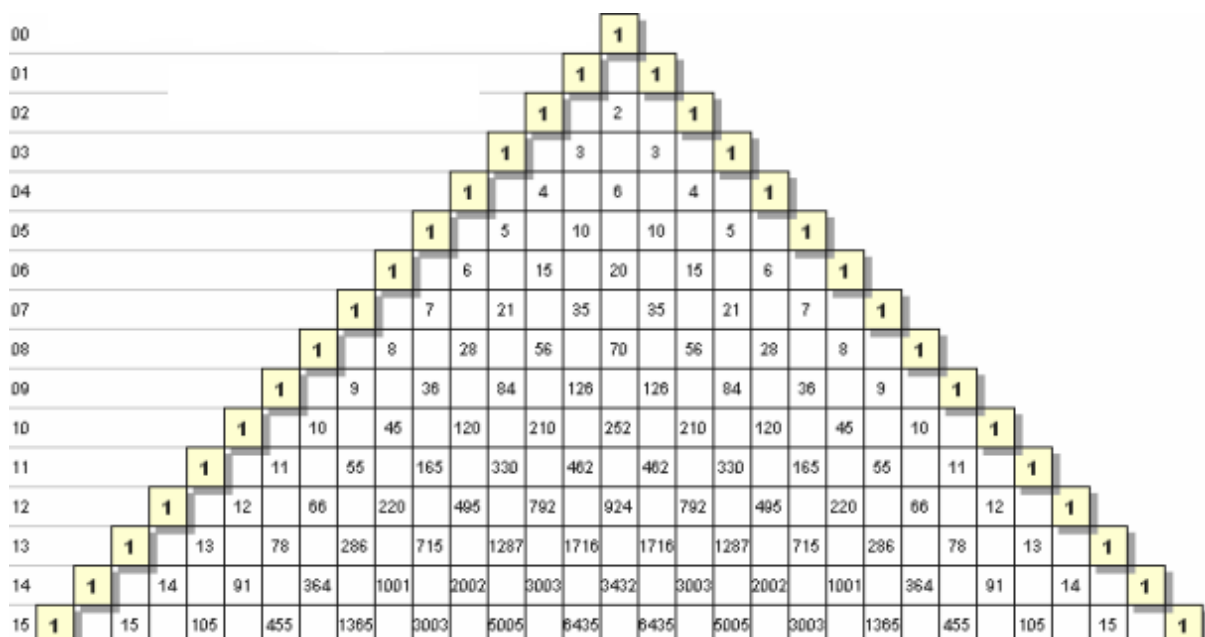
Dato un numero n fissato, i numeri del triangolo che sono suoi multipli interi formano dei nuovi triangoli con il vertice in basso, oppure dei punti isolati, che sono ovviamente anch'essi dei triangoli di lato unitario. Tali triangoli non si intersecano, né sono adiacenti.



Questo avviene perché quando 2 numeri adiacenti sono multipli del numero n , dato che il numero sotto è la somma dei rispettivi numeri sopra, sarà anch'esso multiplo di n .
Invece se due numeri adiacenti sono uno multiplo di n e uno no, la loro somma non sarà multipla di n .

Diagonali

Diagonale di 1



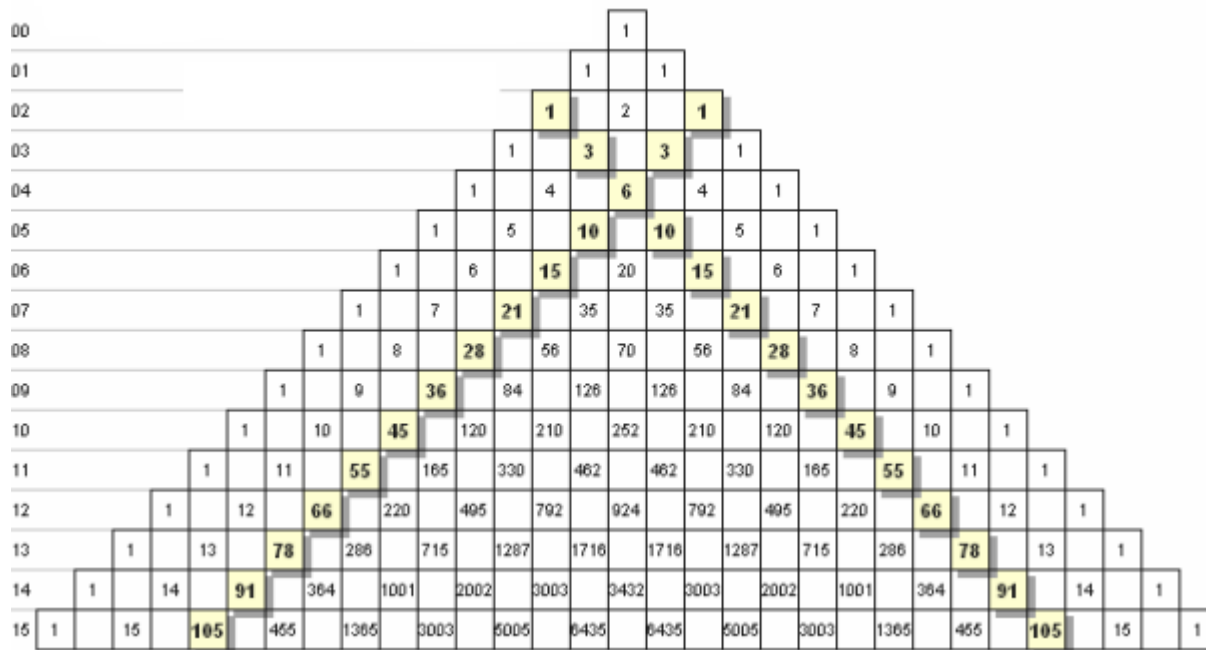
La diagonale di 1 è semplicemente formata da numeri 1. Essa parte dalla riga 0. Rappresenta infatti il numero di monomi del tipo a^n e b^n , ovvero 1.

Diagonale dei numeri naturali

[illegible]

La diagonale dei numeri naturali è la semplice successione di tutti i numeri naturali: essa infatti è data dalla somma dei numeri sovrastanti $n-1$ e 1 (banalmente: $n=(n-1)+1$). Essa parte dalla seconda riga. Indica il numero dei coefficienti del tipo $a^{n-1}b$ e ab^{n-1} , che sono appunto n .

Diagonali della somma dei numeri naturali



la diagonale della somma dei primi numeri naturali è anche chiamata diagonale dei numeri triangolari² e, come tutte le altre diagonali è la somma dei numeri sovrastanti: il numero precedente della stessa diagonale e il numero in alto a sinistra della diagonale dei numeri naturali. Essa parte dalla riga 2.

Altre diagonali

Per le altre diagonali Bisogna tornare a quanto già detto sul perchè i coefficienti del triangolo di Tartaglia rispecchiano il numero di monomi simili di una data caratteristica; procediamo con alcuni esempi e studiamo i possibili i modi in cui possiamo disporre 2 oggetti diversi in una successione di n oggetti.

POSSIBILI CONFIGURAZIONI DI 3 ELEMENTI DI CUI SI PRESENTANO SOLO 2 OGGETTI DIVERSI

I due oggetti diversi sono l'oggetto a e l'oggetto b

Avremo quindi le seguenti disposizioni

aaa	3 a	1 sola possibilità
aab aba baa	2a e 1b	3 possibilità
bba bab abb	1a e 2b	3 possibilità

² I numeri triangolari si chiamano così perchè possono essere pensati come la successione di palline necessarie per costruire una piramide di lato n .

Per costruire una pallina di lato 1 serve una sola pallina.

per un triangolo di lato 2, 3 palline

per uno di lato 3, 6 palline e così via

bbb	3 b	1 sola possibilità
-----	-----	--------------------

POSSIBILI CONFIGURAZIONI DI 4 ELEMENTI DI CUI SI PRESENTANO SOLO 2 OGGETTI DIVERSI

anche in questo caso i 2 oggetti diversi sono l'oggetto a e l'oggetto b

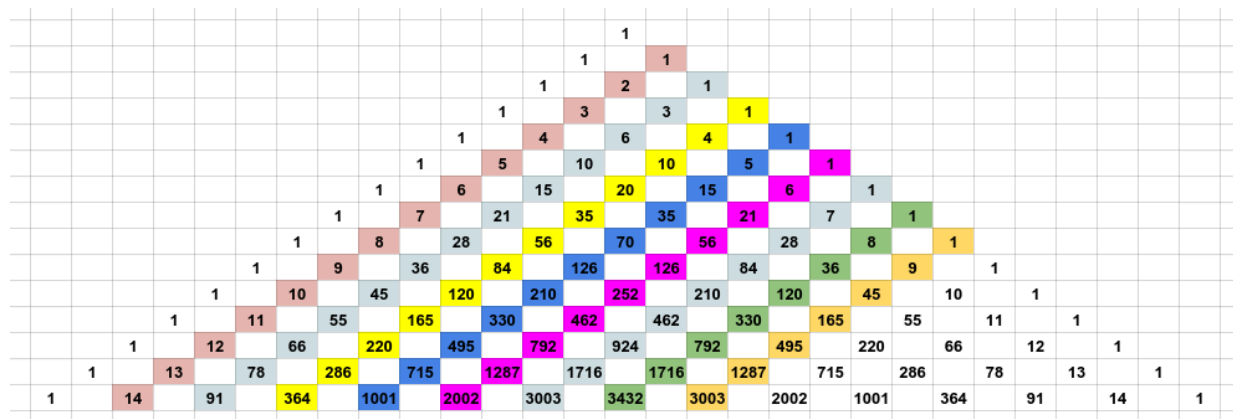
aaaa	4 a	1 sola possibilità
aaab aaba abaa baaa	3a e 1b	4 possibilità
aabb abab baab baba abba bbaa	2b e 2a	6 possibilità
abbb babb bbab bbba	1a e 3b	4 possibilità
bbbb	4 b	1 sola possibilità

POSSIBILI CONFIGURAZIONI DI 5 ELEMENTI DI CUI SI PRESENTANO SOLO 2 OGGETTI DIVERSI

2 oggetti diversi, l'oggetto a e l'oggetto b

aaaaa	5 a	1 sola possibilità
aaaab aaaba aabaa abaaa baaaa	4a e 1b	5 possibilità
aaabb aabab abaab baaab baaba ababa aabba abbaa babaa bbaaa	3a e 2b	10 possibilità
aabbb ababb baabb babab bbaab bbaba bbbba abbba bbbba babba	2a e 3b	10 possibilità
abbbb babbb bbabb bbbab bbbba	1a e 4b	5 possibilità
bbbbb	4 b	1 sola possibilità

Alla luce di quanto detto analizziamo ora le diagonali nella seguente figura, escludendo il primo valore che è 1



La prima diagonale colorata (quella del 2) rappresenta la sequenza si possibili modi in cui si possono disporre n oggetti di cui $n-1$ uguali e 1 diverso avendo a disposizione n caselle da riempire

La seconda diagonale colorata (quella del 3) rappresenta la sequenza si possibili modi in cui si possono disporre n oggetti di cui $n-2$ uguali e 2 diversi dai precedenti ma uguali tra loro avendo a disposizione n caselle da riempire.

La terza diagonale colorata (quella del 4) rappresenta la sequenza si possibili modi in cui si possono disporre n oggetti di cui $n-3$ uguali e 3 diversi dai precedenti ma uguali tra loro avendo a disposizione n caselle da riempire...e così via

Il calcolo delle permutazioni

Il calcolo delle permutazioni è quel calcolo che ci permette di sapere quanti possibili modi ci sono per ordinare diversi oggetti. Per fare ciò si usa il prodotto dei primi n numeri, che espresso con un simbolo sarebbe $n!$ dove $n! = n (n-1) (n-2) \dots 1$. Dal seguente schema possiamo capire il perchè di questa formula.

Prendiamo 4 oggetti diversi e descriviamo le possibili posizioni degli oggetti:

alla prima posizione ci può stare qualunque dei quattro oggetti; alla seconda posizione per ciascuna scelta della prima posizione ho tre possibilità. In 2 posizioni ho $4 \cdot 3$ possibilità. Per ciascuno di questi 12 casi ho 2 possibilità diverse, mentre l'ultima posizione è obbligata a essere occupata dall'ultimo oggetto rimasto.

Posso ovviamente generalizzare con un numero n di elementi: nella prima posizione avrò n scelte, nella seconda $n-1$, nella terza $n-2$..e così via; in questo modi si costruisce la formula enunciata sopra.

prima posizione	seconda posizione	terza posizione	quarta posizione
-----------------	-------------------	-----------------	------------------

a	b	c	d
		d	c
	c	b	d
		d	b
	d	b	c
		c	b
b	a	b	c
		c	b
	c	a	d
		d	a
	d	a	c
		c	a
c	a	b	d
		d	b
	b	a	d
		d	a
	d	a	b
		b	a
d	a	b	c
		c	b
	b	a	c
		c	a
	c	a	b
		b	a

Può capitare che abbiamo n oggetti di cui k sono uguali tra loro e i restanti n-k diversi dai precedenti e diversi tra loro.

Per esempio ho 5 oggetti di cui 3 uguali aaabc.

Se facciamo uno schema come il precedente, avremo molte meno possibilità, perchè scambiando tra loro le a, che sono uguali non ottengo nessun cambiamento.

Per ragionare sulla formula da utilizzare facciamo un esempio con 5 oggetti di cui 3 uguali tra loro. immaginiamo di poter distinguere i tre oggetti uguali: **aaabc**.

In questo caso avremo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ possibili disposizioni, ma potranno essere raggruppate tre loro quelle uguali. Le uguali tra loro sono tante quante le possibili permutazioni dei 3 oggetti uguali (**aaa**).

Generalizzando le possibili permutazioni di n oggetti di cui k uguali e n-k diversi dai primi k e diversi tra loro sono $\frac{n!}{k!}$.

Generalizziamo il problema e indichiamo la formula per le permutazioni possibili di n oggetti di cui k sono uguali, l uguali i restanti n-k-l saranno quelli diversi in $\frac{n!}{k!l!}$

Infine torniamo sul caso che ci riguarda indicando la formula per le permutazioni di n oggetti di cui k uguali tra loro e i restanti n-k sono anch'essi uguali tra loro ma diversi dai precedenti:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Questo numero prende il nome di coefficiente binomiale ed è espresso con il seguente

simbolo: $\binom{n}{k}$.

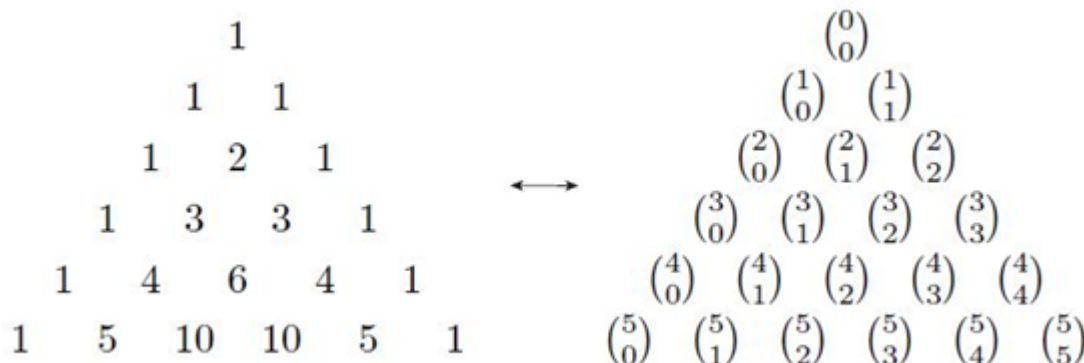
Il numero delle permutazioni di n oggetti dove k sono uguali e n-k sono uguali si scrive:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Per esempio $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$ infatti nella 6° riga del triangolo di Tartaglia, nel

posto in cui nel triangolo riscritto con i coefficienti binomiali troviamo $\binom{6}{2}$, possiamo notare che nel corrispettivo triangolo di Tartaglia c'è il numero 15.

Con la precedente scrittura formeremo anche il Triangolo di Tartaglia con i Coefficienti binomiali osservando la regolarità nella riga:



Analizzando i due triangoli possiamo notare che utilizzando la formula $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ e sostituendo a n i valori corrispondenti al numero della riga (0,1,2,3...) e a k i valori sottostanti al numero della riga che prendiamo in considerazione otteniamo i valori numerici corrispondenti nel triangolo di Tartaglia "classico"

Infatti per esempio: $\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$

Binomio di Newton e sua scrittura compatta con il simbolo di sommatoria

In algebra il teorema binomiale o Binomio di Newton esprime lo sviluppo della potenza n di un binomio qualsiasi con la formula seguente:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

si tratta di un modo compatto per scrivere la potenza di un binomio.

La lettera greca Σ rappresenta il simbolo di sommatoria e si legge somme per k che va da 0 a n . di seguito c'è il termine generale; per ottenere tutto il binomio si sostituisce a quel termine generico $k=0, k=1, k=2, \dots$ e si ottiene così il polinomio che è la potenza n -esima del binomio.

Cenni di CALCOLO COMBINATORIO

PERMUTAZIONI SEMPLICI

Una permutazione è una sequenza di un insieme di oggetti, dove ogni oggetto si presenta una e una sola volta nella presentazione ordinata.

Prendiamo come esempio un insieme 5, che ha come elementi 1-2-3-4-5 e proviamo a fare le sue possibili permutazioni semplici.

Iniziamo col posizionare un elemento al primo posto ed avremmo 5 possibilità (n possibilità) sull'elemento da scegliere:

1 _ _ _ _

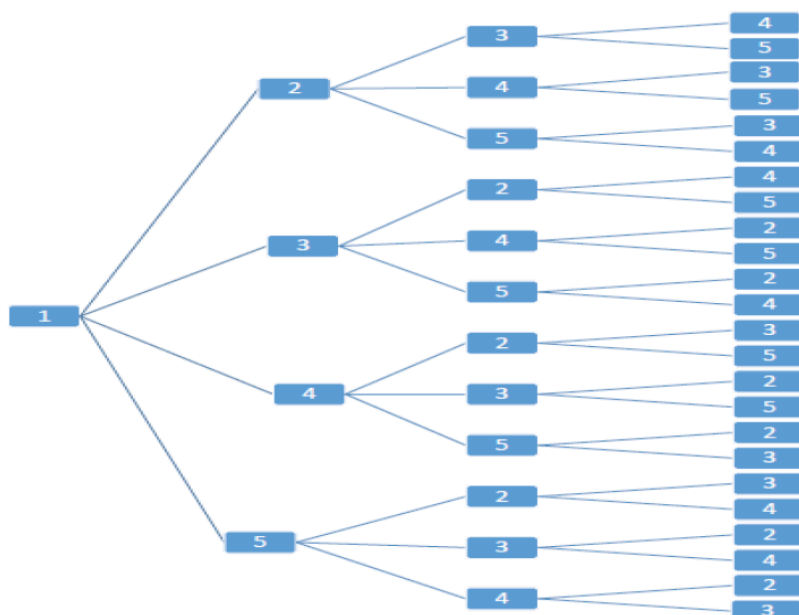
In questa sequenza l'elemento 1 non si potrà più ripetere, perciò al secondo posto avremmo un elemento in meno tra cui scegliere, quindi avremmo solamente 4 possibilità ($n-1$ possibilità):

1 5 _ _ _

Ora, oltre all'elemento 1, nemmeno l'elemento 5 potrà essere ripetuto, dunque rimarrebbero solo 3 possibilità ($n-2$ possibilità).

Procedendo analogamente arriveremmo all'ultimo "posto" della sequenza con un solo elemento possibile da inserire.

Queste sarebbero le possibili permutazioni semplici dell'insieme 5 con il primo posto occupato dall'elemento 1:



Per calcolare il numero delle permutazioni dell'insieme 5 si utilizza questa formula:

$$P_5 = 5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! \text{ (5 fattoriale)}$$

Perché si ha un elemento in meno tre cui scegliere
Perché si hanno due elementi in meno tra cui scegliere

In generale la formula per calcolare le possibili permutazioni semplici di un insieme di n elementi è:

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 1 = n!$$

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Le disposizioni semplici formate da k elementi presi da un insieme S formato da n elementi (con $k < n$), sono raggruppamenti ordinati di k elementi in cui un elemento non può apparire più di una volta. Una disposizione semplice differisce da un'altra anche solo da come sono ordinati i k elementi.

Prendiamo come esempio un insieme $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con $n=5$ elementi e $k=2$

Il primo posto della disposizione di 2 elementi può essere di 5 modi diversi, il secondo di $5-2+1$ (perché è l'ultimo numero della disposizione).

In generale il primo componente può essere scelto in n modi, il secondo in $n-1$, il terzo $n-2$ e si procede così finché non si arriva al posto k della quale si ha una scelta di $n-k+1$ modi.

Pertanto la disposizione semplice di k elementi estratti da un insieme di n elementi è uguale a:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1) \dots 1}{(n-k)(n-k-1) \dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Le permutazioni sono delle particolari disposizioni di n oggetti divisi in gruppi da n oggetti ($P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$)

