

УРОК № 6**Тема уроку.** Розв'язування задач.**Мета уроку:** формування вмінь учнів застосовувати теорему косинусів і наслідки з неї до розв'язування задач.**Тип уроку:** комбінований.**Наочність і обладнання:** таблиця «Співвідношення між сторонами і кутами трикутника» [13], посібник [14].**Вимоги до рівня підготовки учнів:** застосовують теорему косинусів до розв'язування задач.**Хід уроку****I. Перевірка домашнього завдання**

Перевірити наявність виконаних домашніх завдань та відповісти на запитання, які виникли в учнів при їх розв'язуванні

Розв'язування задач

$$1. \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma; \quad c^2 = 144 + 64 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 208 - 96 = 112;$$

$$c = \sqrt{112} \approx 10,6.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \quad 144 = 64 + 112 - 2 \cdot 8 \cdot 10,6 \cos \alpha; \quad 169,6 \cos \alpha = 32;$$

$$\cos \alpha \approx 0,19; \quad \alpha \approx 79^\circ.$$

$$\text{Тоді } \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 180^\circ - 60^\circ - 79^\circ = 41^\circ.$$

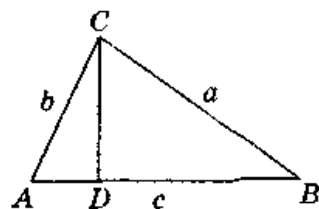
$$\text{Відповідь. } c \approx 10,6, \alpha \approx 79^\circ, \beta \approx 41^\circ.$$

$$2. \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \quad 16 = 49 + 25 - 70 \cos \alpha; \quad 70 \cos \alpha = 58; \quad \cos \alpha = \frac{58}{70} \approx 0,829; \quad \alpha \approx 34^\circ.$$

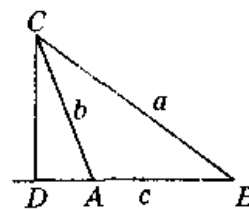
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \quad 25 = 16 + 49 - 56 \cos \beta; \quad 56 \cos \beta = 40; \quad \cos \beta = \frac{40}{56} \approx 0,714; \quad \beta \approx 44^\circ.$$

$$\text{Тоді } \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 34^\circ - 44^\circ = 102^\circ.$$

$$\text{Відповідь. } \alpha \approx 34^\circ, \beta \approx 44^\circ, \gamma \approx 102^\circ.$$

3. Нехай у трикутнику ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 15).Проведемо висоту CD (два випадки).

а



б

Рис. 15

За наслідком із теореми косинусів маємо:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot \text{пр}_c b = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD. \text{ Звідси } AD = \pm \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}.$$

Із трикутника ACD за теоремою Піфагора маємо:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\pm \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \right)^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \right)^2}.$$

$$\text{Відповідь. } \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \right)^2}.$$

II. Самостійна робота

Самостійну роботу навчального характеру можна провести, скориставшись посібником [14], тест 2 «Теорема косинусів та її наслідки».

III. Формування вмінь і навичок учнів

Застосування теореми косинусів

Користуючись теоремою косинусів, можна довести кілька важливих теорем.

Наприклад: *сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.*

Доведемо цю теорему, використовуючи теорему косинусів.

Нехай $ABCD$ — паралелограм, $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ (рис. 16).

За теоремою косинусів із трикутника ABD маємо:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A,$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A.$$

(1)

За теоремою косинусів із трикутника ABC маємо:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B, \text{ або}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - A),$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos A, \quad d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A. \quad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2) почленно, одержимо: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, що і треба було довести.

Розв'язування задач

1. Сторони паралелограма дорівнюють 23 см і 11 см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться як 2 : 3. (Відповідь. 20 см і 30 см.)
2. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 14 см, а різниця сторін становить 4 см. Знайдіть сторони паралелограма. (Відповідь. 7 см і 11 см.)
3. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 11 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 6 см. Знайдіть третю сторону.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC (рис. 17) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, BD — медіана ($AD = DC$), $BD = 6$ см.

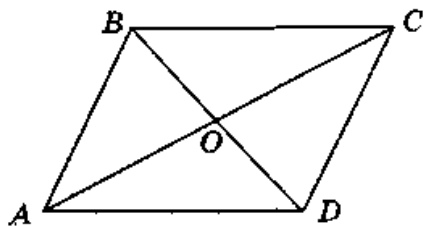


Рис. 16

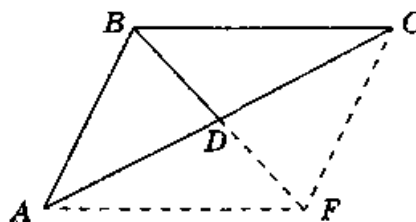


Рис. 17

Продовжимо медіану BD і відкладемо на продовженні відрізок DF так, що $DF = BD$. Чотирикутник $ABCF$ — це паралелограм (оскільки діагоналі AC і BF точкою перетину діляться навпіл), тоді $AC^2 + BF^2 = 2 \cdot (AB^2 + BC^2)$.

Звідси $AC^2 + 12^2 = 2 \cdot (7^2 + 11^2)$, тоді $AC^2 + 144 = 340$; $AC^2 = 196$; $AC = \sqrt{196} = 14$ (см).

Відповідь. 14 см.

4. Доведіть, що в опуклому чотирикутнику сума квадратів діагоналей у 2 рази більша від суми квадратів відрізків, які сполучають середини протилежних сторін.

Доведення

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ (рис. 18) $AN = NB$, $BF = FC$, $CK = KD$, $DM = MA$. Оскільки $NF = MK = \frac{1}{2} AC$, $MN = KF = \frac{1}{2} BD$ і чотирикутник $MNFK$ — паралелограм, то, скориставшись теоремою про суму квадратів діагоналей

паралелограма, маємо: $NK^2 + MF^2 = 2(MK^2 + MN^2) = 2 \left(\left(\frac{1}{2} AC \right)^2 + \left(\frac{1}{2} BD \right)^2 \right) = \frac{1}{2} (AC^2 + BD^2)$ або $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (NK^2 + MF^2)$, що і треба було довести.

5. За трьома сторонами a , b , c трикутника ABC знайдіть його медіани m_a , m_b , m_c (m_a , m_b , m_c — медіани, проведені до сторін a , b , c відповідно).

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC (рис. 19) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, AK — медіана, $AK = m_a$. Продовжимо медіану AK так, що $AK = KD$. Тоді $ABDC$ — паралелограм, у якому діагональ $AD = 2m_a$. Оскільки сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін, то $AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$. Звідси $(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$. Із останньої рівності знаходимо, що m_a :

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Міркуючи аналогічно, знаходимо медіани m_b і m_c :

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}; m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

$$\text{Відповідь. } m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}; m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}; m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

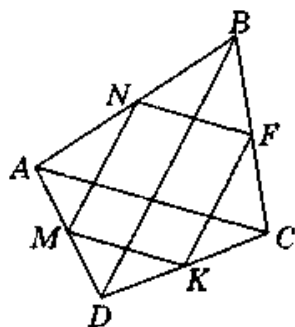


Рис. 18

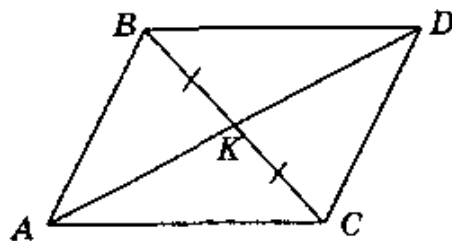


Рис. 19

6. За трьома медіанами m_a, m_b, m_c трикутника ABC знайдіть його сторони a, b, c (m_a, m_b, m_c — медіани, проведені до сторін a, b, c відповідно).

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $AN = m_a$, $BM = m_b$, $CK = m_c$ (рис. 20). Позначимо довжини сторін, які треба знайти, таким чином: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Продовжимо одну із медіан, наприклад AN , так, що $ON = DN$. Сполучимо точку D із точками B і C , одержимо паралелограм $BOCD$, у якого сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін, а саме: $BC^2 + OD^2 = 2(OB^2 + OC^2)$ (1). Підставимо в формулу (1):

$$BC = a, OD = \frac{2}{3} m_a, OB = \frac{2}{3} m_b, OC = \frac{2}{3} m_c, \text{ одержимо:}$$

$$a^2 + \left(\frac{2}{3} m_a\right)^2 = 2 \left(\left(\frac{2}{3} m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3} m_c\right)^2 \right)$$

$$a = \sqrt{2 \left(\left(\frac{2}{3} m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3} m_c\right)^2 \right) - \left(\frac{2}{3} m_a\right)^2} =$$

Звідси знаходимо a :

$$\frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$$

Міркуючи аналогічно, одержимо формули для сторін b і c :

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}; c = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}.$$

$$\text{Відповідь. } a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}; b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}; c =$$

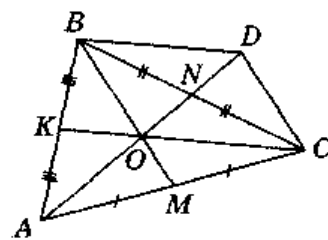


Рис. 20

$$\frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}.$$

IV. Домашнє завдання

Розв'язати задачі.

1. Дано паралелограм з діагоналями c і d і кутом α між ними. Знайдіть сторони паралелограма.
2. Знайдіть медіани трикутника, сторони якого дорівнюють 5 м, 6 м і 7 м.

V. Підбиття підсумків уроку

Завдання класу

1. Сформулюйте теорему про суму квадратів діагоналей паралелограма.
2. Діагоналі паралелограма дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см, а кут між ними становить 30° . Визначте, які з наведених тверджень є правильними, а які — неправильними.
 - а) Сторона паралелограма, що лежить проти кута в 30° , дорівнює 1 см.
 - б) Менша діагональ утворює з меншою стороною паралелограма кут у 120° .
 - в) Сума квадратів усіх сторін паралелограма становить 20 см^2 .
 - г) Більша сторона паралелограма дорівнює $\sqrt{8}$ см.