

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 30. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

1. Các khái niệm thường gặp

- Hệ trục thực ảo gồm có 2 trục vuông góc với nhau : Trục nằm ngang là trục thực, trục đứng dọc là trục ảo
- Số phức $z = a + bi$ khi biểu diễn trên hệ trục thực ảo là điểm $M(a; b)$
- Môđun của số phức $z = a + bi$ là độ lớn của vectơ OM

2. Lệnh Caso

- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3
- Lệnh giải phương trình bậc ba MODE 5 4

VD1-[Câu 31 Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn số phức z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q

A. điểm P B. điểm Q C. điểm M D. điểm N

GIẢI

□ Cô lập $z = \frac{3-i}{1+i}$

Sử dụng máy tính Casio trong môi trường CMPLX để tìm z

w 2 a 3 p b R 1 + b =

$$\frac{3-i}{1+i}$$

$$1-2i$$

$\Rightarrow z = 1 - 2i$ và điểm biểu diễn z trong hệ trục thực ảo có tọa độ $(1; -2)$.

Điểm có thực dương và ảo âm sẽ nằm ở góc phần tư thứ IV

$\Rightarrow$ Điểm phải tìm là Q và đáp án chính xác là B

VD2-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ với $b \in R$, nằm trên đường thẳng có phương trình là :

A. $x = 7$

B. $y = x$

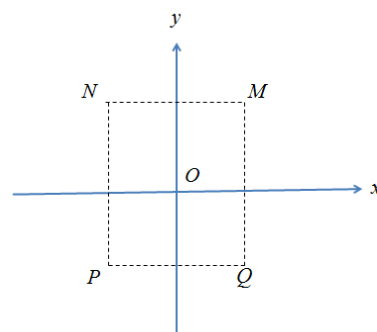
C. $y = x + 7$

D. $y = 7$

GIẢI

□ Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ là điểm M có tọa độ $M(7; b)$

Ta biết điểm M thuộc đường thẳng d nếu tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình đường thẳng d



- ☐ Thử đáp án A ta có $x = 7 \Leftrightarrow 1.x + 0.y - 7 = 0$. Thế tọa độ điểm M vào ta được :
- $$1.7 + 0.b - 7 = 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy điểm M thuộc đường thẳng $x = 7 \Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

VD3-[Thi thử Group Nhóm toán – Facebook lần 5 năm 2017]

Các điểm M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = \frac{4i}{i-1}$;
 $z_2 = (1-i)(1+2i)$; $z_3 = -1+2i$

- A. Tam giác vuông B. Tam giác cân C. Tam giác vuông cân D. Tam giác đều**
GIẢI

- ☐ Rút gọn z_1 bằng Casio
 a 4 b R b p 1 =

The screenshot shows a Casio calculator in the CMPLX mode. The input is $\frac{4i}{i-1}$ and the result displayed is $2-2i$.

Ta được $z_1 = 2 - 2i$ vậy điểm $M(2; -2)$

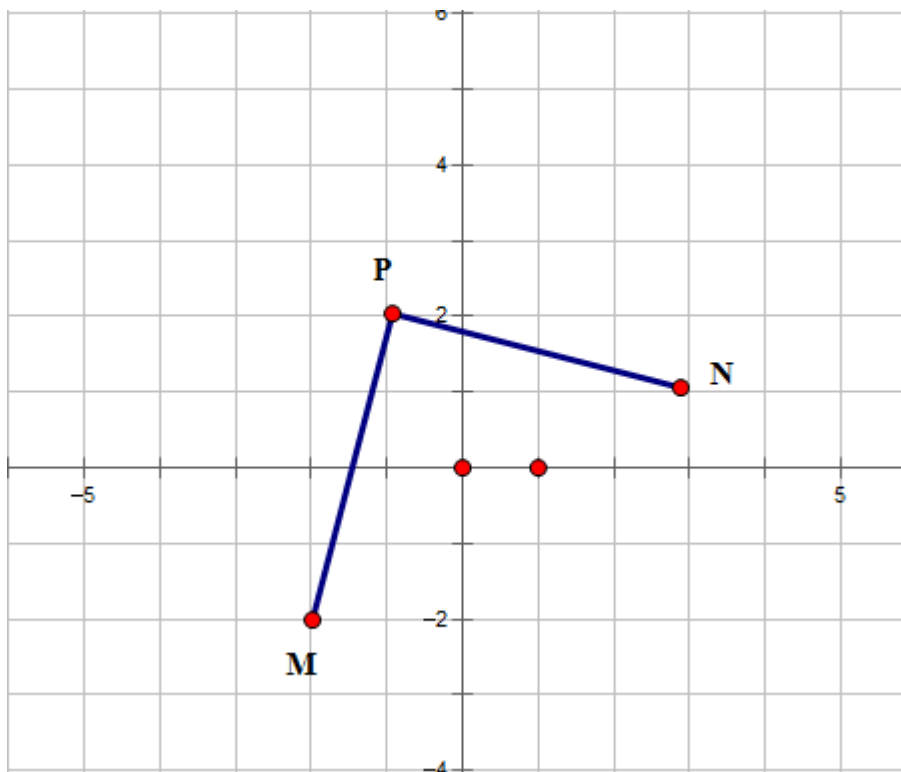
- ☐ Rút gọn z_2 bằng Casio
 (1 p b) (1 + 2 b) =

The screenshot shows a Casio calculator in the CMPLX mode. The input is $(1-i)(1+2i)$ and the result displayed is $3+i$.

Ta được $z_2 = 3 + i$ vậy điểm $N(3; 1)$

Tương tự $z_3 = -1 + 2i$ và điểm $P(-1; 2)$

- ☐ Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M, N, P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại P $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học Tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy , gọi các điểm M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 2i$. Gọi G là trọng tâm tam giác OMN , với O là gốc tọa độ. Hỏi G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây.

- A. $5 - i$ B. $4 + i$ C. $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$ D. $2 + \frac{1}{2}i$

GIẢI

☐ Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 1 - i \Rightarrow$ tọa độ $M(1; -1)$

Điểm N biểu diễn số phức $z_2 = 3 + 2i \Rightarrow$ tọa độ $N(3; 2)$

Gốc tọa độ $O(0; 0)$

☐ Tọa độ điểm $G\left(\frac{x_M + x_N + x_O}{3}, \frac{y_M + y_N + y_O}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Vậy G là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i \Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

VD5-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$, điểm M'

là điểm biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

- A. $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{4}$ B. $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{2}$ C. $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{4}$ D. $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{2}$

GIẢI

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i \Rightarrow$ tọa độ $M(3; -4)$

Điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2} z \Rightarrow$ tọa độ $N\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

a 1 + b R 2 \$ O (3 p 4 b) =

$$\frac{1+i}{2} \times (3-4i) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$$

Gốc tọa độ $O(0;0)$

- Để tính diện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vectơ trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O, M, M' là xong

$$OM(3; -4; 0), OM'\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'} \right]$$

Tính $\left[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'} \right]$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 = 0 = 0$$

$$\text{VectA} \cdot \text{VectB}$$

12.5

$$\text{Vậy } \left[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'} \right] = 12.5 = \frac{25}{2} \Rightarrow S_{OMM'} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'} \right] = \frac{25}{4}$$

$\Rightarrow$ A là đáp án chính xác

VD6-[Đề thi minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$.

Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz_0$

- A. $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ C. $M\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ D. $M\left(\frac{1}{4}; 1\right)$

GIẢI

- Sử dụng lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3 để giải phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$

$$w = 5 \quad 3 \quad 4 = p \quad 1 \quad 6 = 1 \quad 7 = = =$$

$$X_1 =$$

$$2 + \frac{1}{2}i$$

$$x_2 =$$

Math $\blacktriangle$

$$2 - \frac{1}{2}i$$

Vậy phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$ có hai nghiệm $z = 2 + \frac{1}{2}i$ và $z = 2 - \frac{1}{2}i$

- Để z_0 có phần ảo dương $\Rightarrow z = 2 - \frac{1}{2}i$. Tính $w = z_0 i$
 $w = 2 \left(2 + \frac{1}{2}i \right) i =$

$$\left(2 + \frac{1}{2}i \right) i = -\frac{1}{2} + 2i$$

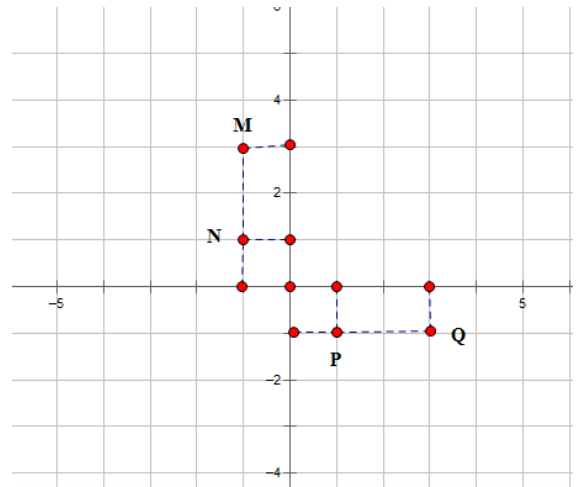
Vậy phương trình $w = -\frac{1}{2} + 2i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức w là $M \left(-\frac{1}{2}; 2 \right)$
 $\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z = 2 + i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w = (1 - i)z$

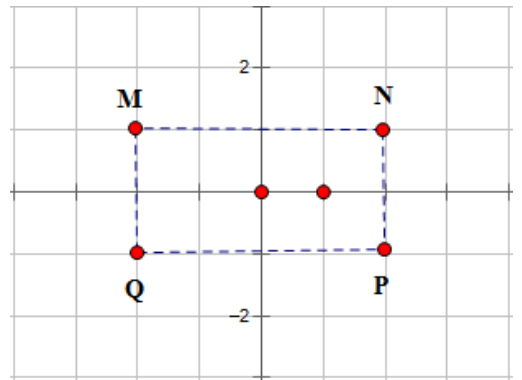
- A. Điểm M B. Điểm N
 C. Điểm P D. Điểm Q



Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)z = 4z + 5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên.

- A. Điểm N B. Điểm P
 C. Điểm M D. Điểm Q



Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức

$$\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i}, (1-i)(1+2i), -2i^3$$

Khi đó tam giác ABC

- A. Vuông tại C B. Vuông tại A C. Vuông cân tại B D. Tam giác đều

Bài 4-Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số : $1-i, 2+3i, 3+i$ và

$3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

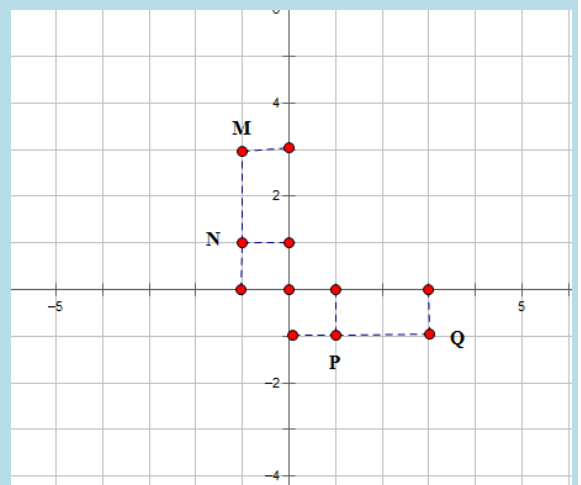
- A. G trùng G' B. Vecto $\overrightarrow{GG'} = (1; -1)$
C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA'}$ D. Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z = 2+i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w = (1-i)z$

- A. Điểm M B. Điểm N
C. Điểm P D. Điểm Q



GIẢI

- Tính số phức $w = (1-i)z$ bằng máy tính Casio
(1 p b) (2 + b) =

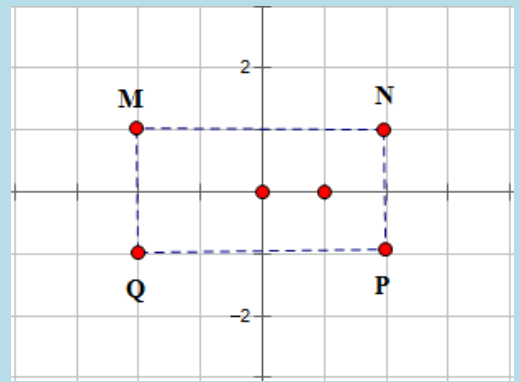
$$(1-i)(2+i) = 3-i$$

Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức w là $(3;-1)$. Đây là tọa độ điểm Q
 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z = 4z + 5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên.

- A. Điểm N
- B. Điểm P
- C. Điểm M
- D. Điểm Q



GIẢI

- Cô lập $(2-i)z - 4z = 5 \Leftrightarrow -(2+i)z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{-5}{2+i}$

- Tìm số phức $z = \frac{-5}{2+i}$
a p 5 R 2 + b =

$$\frac{-5}{2+i} = -2+i$$

Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức z là $(-2;1)$. Đây là tọa độ điểm M
 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức

$$\frac{4}{-5} + \frac{4}{5}i, (1-i)(1+2i), -2i^3$$

Khi đó tam giác ABC

A. Vuông tại C

B. Vuông tại A

C. Vuông cân tại B D. Tam giác đều

GIẢI

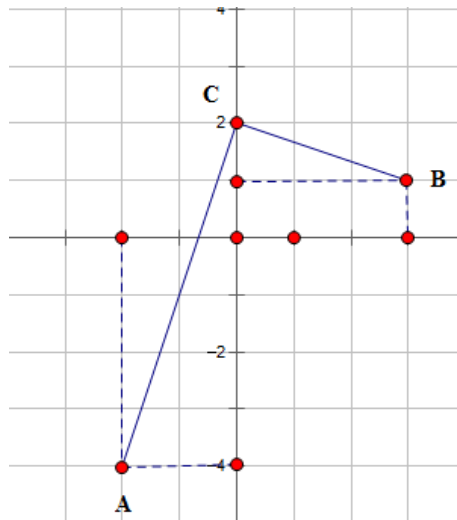
- Rút gọn $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ được $-2-4i$ vậy tọa độ điểm $A(-2;-4)$
 $a \ 4 \ R \ p \ a \ 2 \ R \ 5 \ \$ \ + \ a \ 4 \ R \ 5 \ \$ \ b \ =$

$$\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i} = -2-4i$$

- Rút gọn $(1-i)(1+2i)$ được $3+i$ vậy tọa độ điểm $B(3;1)$
 $(\ 1 \ p \ b \) \ (\ 1 \ + \ 2 \ b \) \ =$

$$(1-i)(1+2i) = 3+i$$

- Rút gọn $-2i^3 = -2i.i^2 = 2i$ vậy tọa độ điểm $C(0;2)$
- Để phát hiện tính chất của tam giác ABC ta chỉ cần biểu diễn trên hệ trục tọa độ là thấy ngay



Dễ thấy tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 4-Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số: $1-i, 2+3i, 3+i$ và $3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. G trùng G'

B. Vecto $\overrightarrow{GG'} = (1; -1)$

C. $\overline{GA} = 3\overline{GA'}$

D. Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

GIẢI

- Ta có tọa độ các đỉnh $A(1;-1), B(2;3), C(3;1) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G(2;1)$
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \end{cases}$$
- Ta có tọa độ các đỉnh $A'(0;3), B'(3;-2), C'(3;2) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G'(2;1)$
$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'}}{3} = 2 \\ y_{G'} = \frac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'}}{3} = 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $G \equiv G' \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**.