

Propriétés physiques

Séparation

A. 1

Dans le référentiel terrestre (supposé par la suite galiléen) ; l'accélération (sa composante radiale) peut s'écrire :

$$a_r = -r \Omega^2$$

Or la vitesse angulaire n'est autre que Ω :

$$a_r = -r \Omega^2$$

et donc :

$$a_r = -r \Omega^2$$

A. 2

Une bactérie est soumise à trois forces :

- son poids qui n'interviendra pas ici, car c'est une force verticale,
- la poussée d'ARCHIMÈDE dont l'expression doit ici dépendre de la rotation du tube et qui doit avoir une composante Π_r radiale (et centripète),
- la force de frottement donnée par la formule de STOKES :

!Fin de l'expression

$$F_{\text{Archimède}} = \rho_b V_b g$$

!Fin de l'expression inattendue.

!Fin de l'expression inattendue.

!Fin de l'expression

$$F_{\text{frottement}} = -6 \pi R_b \eta v$$

!Fin de l'expression inattendue.

Pour une bactérie, la projection de la 2ème loi de NEWTON sur l'expression inattendue. donne :

$$m_b \Omega^2 = -6 \pi R_b \eta v + \Pi_r$$

$$\Pi_r = m_b \Omega^2 + 6 \pi R_b \eta v$$

La masse de la bactérie est :

$$m_b = \rho_b V_b$$

Une particule de fluide de même géométrie (de même volume en particulier) a pour masse :

$$m_e = \rho_e V_b$$

avec ρ_e masse volumique de l'eau :

$$\rho_e = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$$

cette particule de fluide, de même volume, est soumise à la même poussée que la bactérie :

$$m_e \left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right) = -6\pi R_b \eta \left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right)$$

$$+ \Pi_r$$

donc : elle est en équilibre et $\frac{d\Omega}{dt} = 0$; $\frac{d\Omega}{dt} = 0$

$$\Pi_r = -m_e r \Omega^2$$

On reporte cette expression dans l'équation du mouvement de la bactérie :

$$m_b \left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right) = -m_e r \Omega^2 - 6\pi R_b \eta \left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right)$$

après division par m_b :

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right) \left(1 - \frac{m_e}{m_b} \right) = - \frac{6\pi R_b \eta}{m_b} \left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right)$$

et enfin :

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right) = - \frac{6\pi R_b \eta}{m_b \left(1 - \frac{m_e}{m_b} \right)} \left(\frac{d\Omega}{dt} - r \Omega^2 \right)$$

A. 3

Par comparaison des coefficients des termes en **!Fin de l'expression inattendue.** et en **!Fin de l'expression inattendue.**, on peut définir une constante de temps :

cette constante de temps correspond à la durée d'un régime transitoire pendant lequel la bactérie acquiert une accélération. Cette constante de temps est très petite :

T = !Fin de l'expression inattendue. = !Fin de l'expression inattendue.

$$\text{AN : } R_b = 1 \mu\text{m} ;$$

$$\rho_b = 1 \text{ } 100 \text{ kg.m}^{-3} ;$$

$$\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s} ;$$

$$T = 0,24 \mu\text{s}$$

Hormis pendant une période de quelques

T on peut négliger l'accélération :

$0 = r \Omega^2 (1 -) -$!Fin de l'expression inattendue. **!Fin de l'expression inattendue.**

et donc :

!Fin de l'expression inattendue. = !Fin de l'expression inattendue. = !Fin de l'expression inattendue. = k

par intégration :

$$\ln(r) = kt + \text{Cte}$$

en notant r_0 la distance initiale à l'axe :

$$\ln(r_0) = \text{Cte}$$

par soustraction membre à membre :

$$\ln() = kt$$

ou encore :

$$r = r_0 \exp(kt)$$

avec :

$k =$!Fin de l'expression inattendue.

A. 4

$$\text{AN : } R_b = 1 \mu\text{m} ;$$

$$\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s} ;$$

$$k = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\rho_b = 1 \text{ } 100 \text{ kg.m}^{-3} ; \quad \rho_e = 1 \text{ } 000 \text{ kg.m}^{-3} ;$$

$$\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$$\Omega = 10 \text{ } 000 \text{ tr.min}^{-1} = 167 \text{ tr.s}^{-1} = 1 \text{ } 047 \text{ rad.s}^{-1}$$

90 % des bactéries se trouvent initialement à une distance r_0 de l'axe comprise entre 10 % L et L ; soit ici, entre 1 cm et 10 cm.

Lorsque les bactéries présentes initialement à une distance $r_0 = 1 \text{ cm}$ de l'axe atteignent le fond du tube c'est que l'on y a concentré 90 % des bactéries.

$$t = \ln() = \ln(10)$$

$$\text{AN : } L = 10 \text{ cm} ;$$

$$t = 95 \text{ s}$$

A. 5

Lorsque le milieu est très concentré, tout se passe comme si le milieu était nettement plus visqueux ; en effet les bactéries interagissent entre elles (via le fluide) et se freinent mutuellement ; la durée réelle de la séparation est donc nettement plus grande.

Mesures de volume

B. 1. a $R_0 =$ $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$

B. 1. b Addition des résistances placées en série : $R = +$
 ou $R = = R_0 +$
 d'où : $= =$
 soit approximativement $= =$

B. 1. c Appliquée au cas considéré la formule devient : $=$
 avec V_b volume d'une bactérie $V_b = R_{b3}$
 Le nombre de bactéries par unité de volume est : $N =$
 d'où : $= N R_{b3}$
 AN : $N = 10^{15} \text{ m}^{-3}$; $R_b = 1 \mu\text{m}$ $= 4,2 \cdot 10^{-3} = 0,42 \%$
 ;

B. 2. a On note respectivement v_- , v_+ , et v_s les potentiels des bornes d'entrée inverseuse, non inverseuse et de sortie de l'amplificateur opérationnel.

Le théorème de MILLMAN $v_- =$
 permet d'exprimer v_- :

De même pour v_+ : $v_+ =$

L'amplificateur opérationnel supposé idéal $v_- = v_+$
 fonctionnant en mode linéaire :

on en $v_- = v_+ =$
 déduit que :

(pour éliminer v_s de
 l'expression finale)
 enfin :

$$v_+ = \rho i$$

d'où :

$$i =$$

B. 2. b

Pour que $i = 0$ si $R = R_0$
il faut que :

$$= \beta \quad \text{c'est à dire que :} \quad R_2 =$$

ce choix permet de vérifier aisément l'absence de bactéries.

(réglage du zéro de l'appareil)

Si cette condition est réalisée :

$$i =$$

ou encore

$$i =$$

B. 2. c

Il est facile de voir qu'il ne faut pas choisir β trop grand car
alors on aurait :

et alors on ne réaliserait pas la mesure souhaitée.

$$i =$$

$$\ll 1$$

Il faut donc choisir β suffisamment petit (mais pas nul bien
sûr) pour que l'on puisse faire l'approximation :

En fait, on adoptera la plus grande valeur de β compatible avec cette approximation.Dans ces conditions l'expression de i est :

$$i = \beta$$

B. 2. d

On voit que ce choix permet également d'obtenir un courant indépendant des caractéristiques de l'ampèremètre.

B. 2. e

Estimation du courant

(en faisant l'approximation $R = R_0$)

$$i = \beta N R_{b3}$$

$$\beta = 100 ; \quad e = 1 \text{ V} ; \quad R_0 = 1 \text{ k}\Omega ;$$

$$= 4,2 \cdot 10^{-3} = 0,42 \%$$

$$i = 0,42 \text{ mA}$$

Si le volume des bactéries varie de 1% ; le courant i
varie également de 1% soit :

$$\Delta i = 4,2 \text{ }\mu\text{A}$$

C'est petit mais décelable.

B. 2. f

Un microscope peut permettre de compter les bactéries ; il peut donc permettre de
mettre en évidence une variation de 1 % du nombre de bactéries et donc une variation de 1 %
du volume total des bactéries.

En revanche si la variation du volume n'est pas due à une variation du nombre de
bactéries mais est due à la variation des volumes des bactéries, le microscope ne sera pas
assez précis pour la mettre en évidence.

Pression osmotique

C. 1. Notations : on utilisera l'indice T pour le système total : l'énergie interne totale est donc notée U_T ;

U concerne le sous-système de gauche (P, V), $U_T = U + U'$
tandis que U' concerne le sous-système de droite (P', V').

Évolution isotherme d'un système.

Celui-ci ne peut échanger que du travail et de la chaleur.

En raison du 2nd principe de la thermodynamique :

$$Q \leq T \Delta S_T$$

Le travail de compression s'écrit :

(les pressions P et P' sont permanentes)

$$W = -P \Delta V - P' \Delta V'$$

En additionnant le travail à gauche
et à droite des deux termes de l'inégalité :

$$\Delta U_T \leq -P \Delta V - P' \Delta V' + T \Delta S_T$$

L'enthalpie libre du système est ici
(compte tenu des deux sous-systèmes) :

$$G_T = U_T + PV + P'V' - TS_T$$

Les paramètres T, P et P' étant
supposés fixés :

$$\Delta G_T = \Delta U_T + P \Delta V + P' \Delta V' - T \Delta S_T$$

En conclusion l'évolution du système est telle que :

$$\Delta G_T \leq 0$$

L'enthalpie libre est donc minimale à l'équilibre

Cette propriété est classique pour une évolution isotherme et isobare ; elle est généralisée ici à un système dibare et isotherme.

C. 2. Pour savoir comment évolue l'enthalpie libre, il faut écrire l'identité thermodynamique.

Pour la solution :

$$dG = VdP - SdT + \mu dn = \mu dn$$

puisque les paramètres T , et P sont supposés fixés.

μ est le potentiel chimique de l'eau dans la solution, n est la quantité d'eau.

Pour l'eau pure :

$$dG' = V'dP' - S'dT + \mu' dn' = \mu' dn'$$

Pour le système global :

$$dG_T = \mu dn + \mu' dn'$$

La quantité totale d'eau étant fixée :

$$dn_T = dn + dn' = 0$$

et donc :

$$dG_T = (\mu - \mu') dn$$

à l'équilibre l'enthalpie libre est
minimale et donc stationnaire :

$$\mu = \mu'$$

À l'équilibre, il y aura nécessairement **égalité des potentiels chimiques du solvant** de part et d'autre de la paroi.

C. 3. Cette égalité
peut être explicitée :

$$\mu' = \mu^*(T, P') = \mu = \mu(\text{solution}, T, P) = \mu(\text{solution}, T, P' + \Pi)$$

N.B. L'astérisque * est réservé au corps purs.

Pour le compartiment où il y a
des solutés, **on suppose le mélange
liquide idéal** :

$$\mu(\text{solution}, T, P' + \Pi) = \mu^*(T, P' + \Pi) + RT \ln x$$

il y a un terme correctif qui s'explique facilement avec la fraction molaire du solvant (cf. la loi de RAOULT).

En regroupant les termes relatifs
au solvant pur :

$$\mu^*(T, P' + \Pi) - \mu^*(T, P) = -RT \ln x$$

Pour le solvant pur, on déduit de l'identité :

$$d\mu = -s dT + v dP$$

la différence :

$$\mu^*(T, P' + \Pi) - \mu^*(T, P) = v^*(T) (P' + \Pi - P) = v^*(T) \Pi$$

où $v^*(T)$ est le volume molaire de l'eau pure.

par ailleurs, la fraction molaire du solvant étant très proche de 1 (**on suppose la solution peu concentrée**) :

$$\ln x = x - 1 = -x_{\text{solutés}}$$

où $x_{\text{solutés}}$ représente la fraction molaire de l'ensemble des solutés.

et donc :

$$v^* \Pi = x_{\text{solutés}} RT$$

La quantité des solutés étant notée n , celle d'eau étant n_e :

$$x_{\text{solutés}} =$$

et approximativement :

$$x_{\text{solutés}} =$$

de même on peut faire l'approximation :

$$V = n_e v^*$$

qui revient à négliger l'influence des solutés sur le volume :

$$x_{\text{solutés}} =$$

En conclusion :

$$v^* \Pi = RT$$

après simplification :

$$\Pi V = n RT$$

C. 4

Le passage spontané de l'eau se fait du compartiment "concentré" (eau pure) vers le compartiment "dilué" (avec les solutés) comme pour une simple diffusion.

La pression calculée est une pression d'équilibre ; une surpression est nécessaire pour compenser la tendance au passage de l'eau dans le compartiment qui contient les solutés. Une pression plus forte permet une migration en sens inverse ("osmose inverse").

C. 5

À l'intérieur des bactéries règne une surpression d'origine osmotique mais, si la solution dans laquelle baignent les bactéries a une osmolarité plus grande, les bactéries se vident et leurs volumes diminuent considérablement.

On voit que l'osmolarité critique est $0,4 \text{ mol.L}^{-1}$; on en déduit une estimation de la pression osmotique :

$$\Pi =$$

$$= 0,4 \text{ mol.L}^{-1} = 400 \text{ mol.m}^{-3} ; R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} ; T = 300 \text{ K}$$

$$\Pi = 1.106 \text{ Pa} = 10 \text{ bar}$$

Propriétés de la paroi

D. 1.a Ici, contrairement à la partie précédente (pression osmotique) où les pressions étaient imposées, c'est le volume total (*i.e.* le volume de l'enceinte) qui est imposé.

Comme dans la partie précédente, l'indice T est utilisé pour le système total.

Il n'y a pas de travail échangé avec l'extérieur (évolution isochore) :

$$W = 0 \Rightarrow \Delta U_T = Q$$

Évolution isotherme d'un système.

Celui-ci ne peut échanger que de la chaleur. En raison du 2nd principe de la thermodynamique :

$$Q \leq T \Delta S_T$$

et donc :

$$\Delta U_T \leq T \Delta S_T$$

ce que l'on peut écrire :

$$\Delta F_T \leq 0$$

L'énergie libre est donc minimale à l'équilibre

Cette propriété est classique pour toute évolution isotherme et isochore.

D. 1.b Pour savoir comment évolue l'énergie libre, il faut écrire l'identité thermodynamique, soit pour le liquide :

$$dF = -PdV - SdT = -PdV$$

(puisque la température est imposée)

et pour le fluide situé à l'extérieur du ballon :

$$dF' = -P'dV' - S'dT = -P'dV'$$

Pour l'énergie libre du système global :

$$dF_T = dF + dF' = -PdV - P'dV'$$

Le volume du système global est imposé :

$$dV_T = dV + dV' = 0$$

et donc :

$$dF_T = -(P - P') dV$$

à l'équilibre l'enthalpie libre est minimale et donc

stationnaire :

$$P = P'$$

Il devrait y avoir **égalité des pressions** à l'équilibre (si on néglige l'énergie élastique du ballon)

D. 2. a E est une pression.

(on obtient une énergie en multipliant par un volume)

2. b Le volume de l'enveloppe est :

$$4 \pi R_2 h$$

ce volume est invariable :

$$4 \pi R_2 h = 4 \pi R_{02} h_0$$

et donc :

$$=$$

d'où une autre

expression de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = E \left(2 + \right) 4 \pi R_{02} h_0$$

2. c On recherche toujours le minimum de l'énergie libre. Sa variation élémentaire s'écrit désormais :

$$dF_T = -(P - P') dV + d\mathcal{E}$$

À l'équilibre l'énergie libre est minimale et donc stationnaire :

$$P - P' =$$

De l'expression de $\mathcal{E}$,
on obtient par différentiation :
Le ballon étant sphérique :

$$d\mathcal{E} = 2 E \left(- \right) 4 \pi R_0 h_0 dR$$

on obtient bien
l'expression demandée :

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 4 \pi R^2 dR \\ &= P - P' = 2 E \left(- \right) \end{aligned}$$

2. d Les variations de $P - P'$ en fonction de R sont représentées ci-dessous.

Pour le
rayon,
adoptée est :

R_0

pour la
surpression c'est :

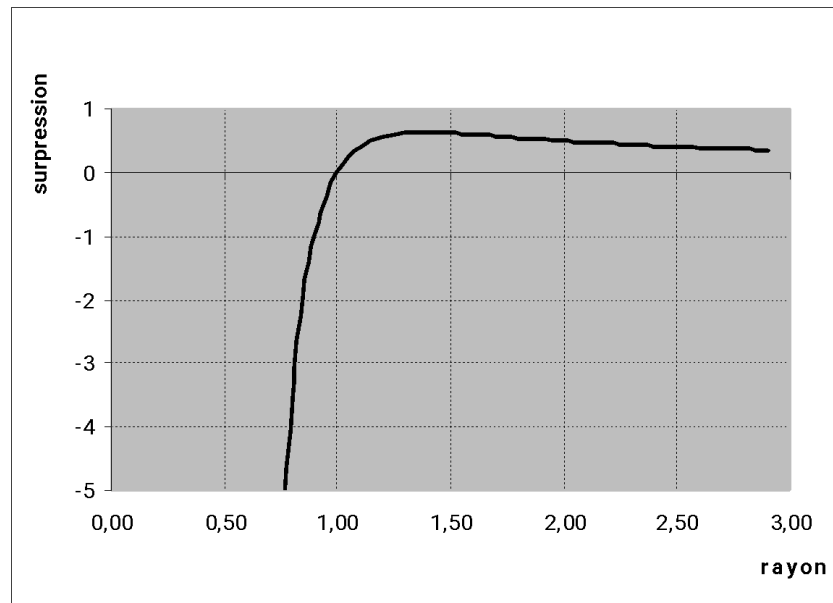
2

E

Le maximum
de surpression se
rencontre pour :

$R = 1,4 R_0$

(approximativement)



3. a L'énoncé ne précise pas la valeur exacte du rayon ; on se contentera d'un calcul approximatif.

Dès que R est sensiblement supérieur à R_0 on peut négliger le terme qui est élevé à la puissance 7 :

d'où un ordre de grandeur de E :

$$P - P' = 2 E$$

$$E = (P - P')$$

$$\text{AN : } P - P' = 5 \text{ kPa ; } R_0 = 1 \text{ cm ; } h_0 = 0,1 \text{ mm}$$

$$E = 250 \text{ kPa}$$

3. b Même méthode pour la bactérie :

$$\text{AN : } P - P' = 1 \text{ MPa ; } R_b = 1 \text{ } \mu\text{m ; } h_0 = 0,1 \text{ nm}$$

$$E = 5 \text{ GPa}$$

Équilibre et propulsion

Insectes aquatiques

1. a

On oriente l'axe vertical vers le haut.

On adopte comme système la colonne d'eau de hauteur

h . Cette colonne est soumise à quatre forces verticales :

- son poids :

$$P_{\text{oids}} = - \pi a^2 h \rho_e g$$

- la force pressante exercée par l'atmosphère :

$$F_{\text{atm}} = - \pi a^2 P_{\text{atm}}$$

- la force pressante exercée par l'eau située au dessous de la colonne :

$$F_{\text{eau}} = \pi a^2 P_{\text{atm}}$$

- la force de tension :

$$F_{\text{tension}} = \sigma 2 \pi a$$

Puisqu'il y a équilibre :

et donc :

$$\sigma 2 \pi a - \pi a^2 h \rho_e g = 0$$

$h = \frac{2 \sigma}{\rho_e g a}$
!Fin de l'expression inattendue.

1. b

AN : $\sigma = 50 \text{ mN.m}^{-1}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $\rho_e = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$

$h = 5 \text{ mm}$

$a = 2 \text{ mm}$;

$h = 20 \text{ cm}$

$a = 50 \text{ }\mu\text{m}$

2. a

Calcul des forces de tension superficielle exercée sur les pattes (verticales et dirigées vers le haut) :

- pour une patte de longueur L :

(il faut multiplier par 2 L car chaque patte a deux côtés ; on néglige les extrémités, la longueur du pourtour étant a priori :

$$F = 2 L \sigma$$

$2 L + 2 \pi r$)

- pour l'ensemble des 6 pattes :

$$F_{\text{total}} = 4 (L_1 + L_2 + L_3) \sigma$$

σ

2. b

La somme des forces appliquées au gerris doit être nulle :

$$4 (L_1 + L_2 + L_3) \sigma - m g = 0$$

On a négligé les forces pressantes résultant de l'enfoncement (supposé très réduit) des pattes dans l'eau (pour une profondeur h).

Par ailleurs le moment résultant des forces doit être nul.

- c'est forcément vérifié pour tout axe vertical (chaque force étant verticale) ;

- c'est également vérifié (par raison de symétrie) pour un axe horizontal passant par le corps du gerris (et ce, parce que les pattes sont organisées par paires) ;
- il reste un axe horizontal passant par le centre de masse de l'animal et parallèle aux pattes de longueurs L_2 :

En orientant cet axe dans le sens d'un basculement vers l'arrière, le moment résultant est :

en effet, les moments des forces s'exerçant sur la deuxième paire de pattes sont nuls, il en est de même pour le poids.

$$\Gamma = d_2 \cdot 4 L_3 \sigma - d_1 \cdot 4 L_1 \sigma$$

2. c L'absence de basculement vers l'arrière ou vers l'avant se traduit donc par la relation : $d_2 L_3 = d_1 L_1$
2. d A N : $L_1 = 1 \text{ cm} ; L_2 = 3 \text{ cm} ; L_3 = 1 \text{ cm} ;$ $m = 1 \text{ g}$
- $\sigma = 50 \text{ mN.m}^{-1} ; g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
- Il s'agit d'une masse maximale, car on a supposé que toutes les pattes étaient enfoncées.
2. f Si on multiplie toutes les dimensions d'un gerris par 2, son poids est multiplié par 8, mais les forces de tension seulement par 2.
- Un "gerris géant" ne devrait donc pas ressembler au gerris commun ; il devrait avoir des pattes bien plus longues en proportion, d'où une fragilité considérable.
3. a Le nombre de REYNOLDS associé au mouvement est : $Re = 60$
- $h = 3 \text{ mm} ; v = 2 \text{ cm.s}^{-1} ; \rho_e = 1\,000 \text{ kg.m}^{-3} ; \eta = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$
- Ce nombre est trop élevé pour un écoulement rampant ;
- l'écoulement est turbulent**
3. b La quantité de mouvement reçue par une patte pendant un intervalle de temps dt (impulsion) est : $dm \ v = D \ dt \ v$
- où D est le débit-masse de l'écoulement arrivant sur la surface : $D = \rho_e \ v \ h \ L_2$
- L'écoulement est ensuite tangentiel à la surface ; on peut donc considérer que cette impulsion est entièrement transférée à la surface d'où une force : $F = \rho_e \ v^2 \ h \ L_2$
- Il y a une paire de patte qui agit ; la force totale est double, d'où une accélération : $a =$
- $a = 0,72 \text{ m.s}^{-2}$
- AN : $h = 3 \text{ mm} ; v = 2 \text{ cm.s}^{-1} ; \rho_e = 1\,000 \text{ kg.m}^{-3} ;$
- $L_2 = 3 \text{ cm} ; m = 0,1 \text{ g}$
3. c Pour sauter, il faudrait que le gerris puisse acquérir une accélération supérieure à la pesanteur, soit donc une accélération 14 fois plus forte, et une pour cela il faut une vitesse des pattes 14 fois plus grande soit : $v_{\text{saut}} = 7,5 \text{ cm.s}^{-1}$

Bactéries

1 a

Une bactérie est soumise à trois forces :

- son poids :
- la poussée d'ARCHIMÈDE dont on admettra qu'elle obéit à la même expression que si la bactérie était immobile :
- la force de frottement donnée par la formule de STOKES :

!Fin de l'expression

$$\text{inattendue.} = Rb3 \rho_b$$

!Fin de l'expression inattendue.

!Fin de l'expression

$$\text{inattendue.} = - Rb3 \rho_e$$

!Fin de l'expression inattendue.

!Fin de l'expression

$$\text{inattendue.} = - 6 \pi Rb \eta$$

!Fin de l'expression inattendue.

En orientant l'axe vertical vers le bas (vecteur unitaire **!Fin de l'expression inattendue.**), en supposant la vitesse toujours verticale et en posant :

$$\text{!Fin de l'expression inattendue.} = v$$

$$\text{!Fin de l'expression inattendue.} = g$$

$$\text{!Fin de l'expression inattendue.} = m$$

$$\text{!Fin de l'expression inattendue.} =$$

On obtient l'équation différentielle :

$$Rb3 (\rho_b - \rho_e) g - 6 \pi Rb \eta v$$

que l'on peut également écrire :

$$T \text{ !Fin de l'expression inattendue.} + v$$

$$= V_0$$

dont la solution est (si on suppose que la vitesse est nulle à l'instant initial) :

$$v = V_0 (1 - \exp(-t/T))$$

La comparaison des deux écritures de l'équation différentielle donne :

$$T = \text{!Fin de l'expression inattendue.} = \text{!Fin de l'expression inattendue.} = \text{!Fin de l'expression inattendue.}$$

$$V_0 = \text{!Fin de l'expression inattendue.}$$

V_0 est la vitesse à laquelle les bactéries tombent sous l'effet de la gravité.

En effet après une durée de quelques T on peut admettre que :

$$v = V_0$$

$$V_0 = \text{!Fin de l'expression inattendue.}$$

$$V_0 = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{AN : } Rb = 1 \mu\text{m} ; \rho_b = 1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} ; \rho_e = 1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$; g = 10 \text{ m.s}^{-2} ; \eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

1. b

Le nombre de REYNOLDS associé à ce mouvement est :

$$Re = \text{!Fin de l'expression inattendue.}$$

soit numériquement :

$$Re = 4 \cdot 10^{-7}$$

Il s'agit donc d'un écoulement rampant ; l'utilisation de la formule de STOKES est donc validée *a posteriori*.

La vitesse de chute est vraiment très faible ; en pratique il y aura toujours un peu de convection et cette vitesse ne sera pas observée.

2. a Quand la bactérie se déplace à une vitesse uniforme, la force **totale** exercée par l'eau sur la bactérie (flagelle compris) est nulle : $F_{totale} = F + F_b = 0$

la loi de STOKES s'applique à la bactérie ;

$$F_b = -6 \pi R_b \eta v$$

le flagelle est soumis à ;

$$F = h\eta (-n_1 v + n_2 a \Omega)$$

la force totale est donc :

$$F_{totale} = \eta [n_2 a h \Omega - v (h n_1 + 6 \pi R_b)] = 0$$

On en déduit la vitesse de la bactérie : $v = \Omega R$ Fin de l'expression inattendue.

$$v = 26 \mu\text{m.s}^{-1}$$

AN : $\nu = 100 \text{ Hz}$; $\Omega = 2\pi\nu = 628 \text{ rad.s}^{-1}$; $n_1 = n_2 = 1$;

$a = 0,2 \mu\text{m}$; $R_b = 1 \mu\text{m}$; $h_b = 5 \mu\text{m}$;

2. b Le nombre de REYNOLDS associé à ce mouvement est : $Re = \frac{\rho v R}{\eta}$ Fin de l'expression inattendue. $= 5,3 \cdot 10^{-5}$

$R_b = 1 \mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$; $\rho_e = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$; $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$;

$$v = 26 \mu\text{m.s}^{-1} = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$$

Le nombre de REYNOLDS est suffisamment petit ; **l'écoulement est rampant.**

2. c La rotation de la bactérie est une conséquence du principe des actions réciproques. Pour faire tourner le flagelle dans un sens donné, la bactérie doit exercer un moment de rotation dans ce sens, inversement le flagelle exerce sur la bactérie un moment opposé et fait tourner (beaucoup plus lentement, car l'inertie n'est pas comparable) la bactérie en sens inverse de la rotation du flagelle.

2. d À petit nombre de REYNOLDS (écoulement rampant), les équations de la mécanique des fluides sont linéaires, ainsi les forces et moments sont multipliés par 2 si les vitesses sont multipliées par 2.

2. e Envisageons d'abord un cas particulier où $\Omega = 0$ (pas de rotation du flagelle)

$$\text{alors : } F = - h \eta n_1 v$$

le signe " - " exprime qu'il s'agit d'une force de frottement (fluide).

Envisageons maintenant un cas particulier où $v = 0$ (pas de mouvement de la bactérie).

alors :

$$M = - c_2 \Omega \quad (\text{moment de frottement visqueux})$$

(le signe " - " est indispensable ; il y a une **erreur d'énoncé** ou c_2 doit être négatif)

toujours dans le cas où $v = 0$:

$$F = h \eta n_2 a \Omega$$

la force est motrice (vers la droite) ; cela n'est pas forcément ainsi ; cela dépend de la nature de l'hélice ; par analogie avec une vis on peut penser qu'il en est ainsi si **l'hélice est droite**. En revanche, si l'hélice était gauche, la force serait inversée et il faudrait introduire un signe " - " dans la formule.

Retournons sur le cas particulier où $\Omega = 0$ (pas de rotation du flagelle)

$$\text{alors : } M = - c_1 v \quad \text{force de frottement visqueux}$$

Le signe " - " est cohérent avec le signe " + " envisagé ci-dessus ; en effet puisque qu'une rotation positive crée une vitesse positive, il est indispensable qu'une vitesse positive crée un moment négatif et ralentisse la rotation (loi de modération).

2. f c_1 est homogène au produit d'une force par une durée ou, ce qui revient au même, à une pression multipliée par une aire et par une durée. Par ailleurs c_1 doit être proportionnel à la viscosité dynamique η (homogène à une pression multipliée par une durée) ; c_1 est donc égal au produit de la viscosité par une aire.

Or le moment $M = - c_1 v$ est sans doute proportionnel au rayon a (M serait nul

si le flagelle était linéaire), par ailleurs il y a forcément proportionnalité à la longueur totale de l'hélice ; d'où une proposition :

$$c_1 = A \eta h \alpha$$

avec A nombre sans dimension (qui dépend sûrement de l'angle α)

c_2 est homogène au produit d'une force par une longueur et par une durée ou, ce qui revient au même, à une pression multipliée par un volume et par une durée. Il est, d'autre part, évident que c_2 doit être proportionnel à la viscosité dynamique η . c_2 est donc égal au produit de la viscosité par un volume.

On peut penser que les forces orthoradiales qui s'exercent en chaque point de l'hélice sont proportionnelles au rayon α de celle-ci, pour passer au moment il faut multiplier par le bras de levier α , enfin il y a forcément proportionnalité à la longueur totale de l'hélice d'où une proposition :

$$c_2 = B \eta h \alpha^2$$

avec B nombre sans dimension (qui dépend sûrement de l'angle α)

Colonies de bactéries

1. a

Le coefficient de diffusion D est homogène à une aire divisée par une durée.

Si le coefficient dépend uniquement de la vitesse v et de la durée T , la seule formule possible (à un coefficient multiplicateur près) est :

$$D = v^2 T$$

$$\text{AN : } T = 1 \text{ s ; } v = 10 \text{ } \mu\text{m.s}^{-1}$$

$$D = 10^{-10} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

Bien d'autres raisonnements sont possibles, en voici un :

- on imagine de part et d'autre d'une frontière d'aire S : N_1 bactéries d'un côté et N_2 bactéries de l'autre à une distance $v T$.

- au bout d'un temps $T/2$ traverseront la frontière $N_1/2$ bactéries dans un sens et $N_2/2$ bactéries dans l'autre soit un flux de :

$$\Phi =$$

$$j =$$

- qui correspond à une densité de flux :

$$D = v^2 T$$

- le gradient de concentration est de l'ordre de :

- on obtient une estimation du coefficient de diffusion en divisant la densité de flux par le gradient de concentration (loi de FICK) on obtient :

1. b

Le raisonnement dimensionnel conduit à :

$$\Delta t =$$

$$\text{AN : } L = 10 \text{ cm ; } D = 10^{-10} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

$$\Delta t = 10^8 \text{ s}$$

Valeur trop élevée ; d'autres phénomènes doivent faciliter le remplissage.

soit quelques années

2. a

Recherche d'une équation de la diffusion modifiée

Système (élémentaire)

volume élémentaire : dV

nombre de bactéries : dN

variation du nombre de bactéries : $d(dN)$
pendant dt

Flux de bactéries

en général

à l'entrée du système

à la sortie du système

Nombre de bactéries entrant pendant dt

Nombre de bactéries sortant pendant dt

$$dV = S dx$$

$$dN = n dV = n S dx$$

$$d(dN) = S dx dn$$

$$d(dN) = S dx \quad dt$$

$$\Phi = j S$$

$$\Phi(x) = j(x) S$$

$$\Phi(x + dx) = j(x + dx) S$$

$$\delta N_{\text{entrée}} = j(x) S dt$$

$$\delta N_{\text{sortie}} = j(x + dx) S dt$$

Principe du bilan : la variation du nombre de bactéries du système est due à trois causes :

- les entrées
- les sorties.
- les divisions

$$d(dN) = \delta N_{\text{entrée}} - \delta N_{\text{sortie}} + \delta_2 N_d$$

Grâce à un développement limité au premier ordre, on peut simplifier les termes d'entrée et sortie :

$$dN_{\text{entrée}} - dN_{\text{sortie}} = S dt [j(x) - j(x + dx)] = - dx S dt$$

$$j = - D$$

$$= - D$$

En écrivant la première loi de FICK et en négligeant une éventuelle variation du coefficient D :

$$dN_{\text{entrée}} - dN_{\text{sortie}} = dx S dt$$

et donc :

Par ailleurs le nombre de divisions (qui est une contribution à l'augmentation du nombre de cellules) est :

$$\delta_2 N_d = dN = S dx dt$$

En conclusion :

$$S dx dt = dx S dt + S dx dt$$

et après simplification :

$$= D +$$

Remarque si la durée T tend vers l'infini, ce qui revient à négliger la division cellulaire, on retrouve la classique équation de la diffusion (ou 2ème loi de FICK) :

$$= D$$

2. b

Solutions stationnaires

En régime stationnaire

$$= 0$$

et donc :

$$D + = 0$$

(N.B. en régime indépendant du temps n ne dépend que de x d'où la disparition du caractère partiel de la dérivée)

la solution générale de cette équation est harmonique :

$$n = B \cos$$

Une telle solution n'a bien entendu aucune signification physique ; n doit être positif !

2. c

Solution uniforme

Si n ne dépend que de la date t :

$$= +$$

il y a une croissance exponentielle :

$$n = n_0 \exp$$

3. a

Prise en compte de la mort des bactéries

Le bilan envisagé plus haut doit être écrit en tenant compte du terme supplémentaire correspondant à la mort :

$$d(dN) = \delta N_{\text{entrée}} - \delta N_{\text{sortie}} + \delta_2 N_p - \delta_2 N_m$$

Par ailleurs le nombre de morts (qui est une contribution à la diminution du nombre de cellules) est :

$$\delta_2 N_m = dN \ S \alpha$$

N_c est un nombre critique de bactéries (relatif à un volume $S \alpha$) tel, qu'en l'absence de diffusion, il y a stationnarité : c'est à dire que les morts sont compensées par les divisions.

le nombre de morts peut également s'écrire :

$$\delta_2 N_m = n_2 dx$$

ce qui conduit bien à l'équation annoncée :

$$= D + d_1 n - d_2 n_2 \quad (6)$$

avec :

$$d_1 = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

et :

$$d_2 =$$

(pour la définition de n_2 , cf. ci-dessous)

Il semblerait qu'il manque une donnée pour calculer la valeur numérique de d_2 .

On peut éventuellement comprendre qu'il faut adopter $N_c = 1$ pour $S = \alpha$.

Dans ces conditions :

$$AN : \alpha = 10 \text{ } \mu\text{m}$$

$$d_2 = 8,3 \cdot 10^{-19} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

3. b

Solutions stationnaires et uniformes

Si le régime est permanent et uniforme :

$$= 0 ; \quad = 0$$

l'équation se simplifie :

$$d_1 n - d_2 n_2 = 0$$

Il y a deux solutions n_1 et n_2 :

$$n_1 = 0 \text{ et } n_2 =$$

$n_1 = 0$ est une solution triviale qui correspond à la mort de toutes les cellules et donc à une absence totale de bactéries.

n_2 est une solution uniforme et stationnaire où les morts et les divisions cellulaires se compensent parfaitement (cf. 3. a)

3. c

Solution progressive

L'expression $n(x, t) = f(x - ct)$ correspond à une onde progressive :

- déplacement dans le sens croissant de l'axe des x (" vers la droite ")

- avec une vitesse c .

Les conditions aux limites signifient que les bactéries ont saturé l'espace situé à gauche, elles se dirigent donc vers la droite qui est encore vide de bactéries :

à gauche :

$$n = n_2$$

à droite :

$$n = n_1 = 0$$

3. d **Simplification mathématique**

$$= -c f' \quad = f' \quad = f''$$

L'équation s'écrit donc :

$$-c f' = D f'' + d_1 f - d_2 f_2$$

ou :

$$e_1 f'' = e_2 f' + e_3 f + e_4 f_2 \quad (7)$$

avec :

$$e_1 = D ; \quad e_2 = -c ; \quad e_3 = -d_1 ; \quad e_4 = d_2 ;$$

3. e **Interprétation mécanique**

On interprète cette équation comme une deuxième loi de Newton.

$$D f'' = -c f' - d_1 f + d_2 f_2$$

On adopte des notations conforme aux habitudes de la mécanique :

$$D f'' = -c f' - d_1 x + d_2 x_2 = 0$$

La particule a une masse D , et une accélération f'' elle est soumise à une force de frottement fluide :

$$-c f'$$

et à une force conservative :

$$-d_1 x + d_2 x_2$$

qui dérive d'une énergie potentielle :

$$= d_1 x_2 - d_2 x_3$$

3. f **Bilan "énergétique"**

État initial : $x = n_2$

$$D f'' = -c f' - d_1 x + d_2 x_2 = 0$$

$$= d_1 n_2 - d_2 n_3 = d_1 n_2$$

en utilisant le fait que :

$$d_1 = d_2 n_2$$

État final : $x = n_1 = 0$

$$D f'' = -c f' - d_1 x + d_2 x_2 = 0$$

Le bilan d'énergie mécanique s'écrit :

$$\Delta = \Delta = -d_1 n_2 = W_f$$

Le travail de la force de frottement est :

$$W_f =$$

ou encore :

$$W_f =$$

On en déduit que :

$$d_1 n_2 = c$$

En reprenant les notations relatives à la diffusion :

$$c =$$

$$(d_1 =)$$

3. g

Sens du déplacement / célérité

La célérité c est donc positive ; il y a bien progression " vers la droite " (sens croissant des abscisses)

On constate que la célérité ne dépend pas du coefficient de diffusion D ; cela signifie que le déplacement est davantage lié à la division cellulaire (*cf.* la constante $\mathbf{T}$) qu'à la diffusion.

Dans ces conditions le remplissage d'un récipient peut être beaucoup plus rapide qu'au 1.b. En effet au 1. b il s'agit d'un mouvement au hasard (diffusion) ; la distance parcourue est proportionnelle à la racine carrée du temps, tandis qu'ici il y a une vitesse qui est constante ; la distance parcourue est proportionnelle à la durée du déplacement.

Corrigé rédigé par Michel AUBERT (Lycée FÉNELON BCPST2)

(version révisée en septembre 07)

Merci de signaler, erreurs et maladresses,

AUBERTMi@wanadoo.fr