

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (x + 1)^3 - x(-x + 1)(x - 1)$$

A. Να δείξετε ότι: $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

B. Να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα: $\left(x + \frac{P(0)}{x}\right) - \left(x - \frac{P(0)}{x}\right) = 4$

Γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\left(2025 + \frac{1}{2025}\right) - \left(1 - \frac{1}{2025}\right)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left[\frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^3 - x} \cdot \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 6x + 9} \right] : \frac{3x-3}{x-3}$$

$$B = \frac{x^2 + x + 1}{x+1} - \frac{x^2 - x + 1}{x-1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

A. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις A και B.

B. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις A και B.

Αν $A = \frac{1}{3}$ και $B = 1$

Γ. Αν οι εξισώσεις $2x - B = 0$ και $x^2 + \lambda x = A$ έχουν κοινή λύση, να βρεθεί το λ.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left[(xy^2)^5 \cdot (x^2y^3)^{-4} \cdot y \right] : \left(\frac{y^3}{x^{-4}} \right)^{-2}$$

A. Να αποδείξετε ότι: $A = x^5 \cdot y^5$

B. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2$ και $y = 5$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$B = 2(x + A^{-5} - 11)^3 - 2x(x - 1)^2 + 2(x - 2)(x + 2) + 2(-2x)$$

είναι ανεξάρτητη του x.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία:

$$\varepsilon_1: 6x + 2y = 8 - 2\lambda$$

A. Να βρεθεί το λ αν η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B. Να βρεθεί το λ αν η εξίσωση επαληθεύεται από το σημείο $A(\lambda, \lambda-1)$

Γ. Να βρεθεί το λ , ώστε η ευθεία ε_1 να είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_2 = 3x - y + 5 = 0$

ΘΕΜΑ 5

Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: 2x + y = 4$$

$$\varepsilon_2: x - y = -1$$

A. Να βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 με τους άξονες.

B. Να λυθεί γραφικά το σύστημα: $\{2x + y = 4 \quad x - y = -1$

Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι: ε_1 και ε_2 και ο $y'y$.

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$$

A. Αν ισχύει $P(-1) = 0$ και $P(2) = 0$, να βρείτε τους αριθμούς a και b .

B. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) - (x^3 + x^2) - x + 15 = 0$

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 + (a^2 - 4)x - 3(5a - 4) = 0$

Αν είναι 2ου βαθμού και έχει λύση τη $x=3$

A. Να βρείτε τον αριθμό a .

B. Να βρείτε την άλλη λύση της εξίσωσης.

Γ. Αν $a \neq 0$: να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η εξίσωση:

$$x^a + (a\lambda - 3)x + \lambda^a - 3\lambda + 2a$$

δεν έχει πραγματικές λύσεις.

ΘΕΜΑ 8

Αν η γωνία ω είναι οξεία και η γωνία φ αμβλεία, τότε

A. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

B. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\varphi > \sigma\upsilon\nu\varphi$

Γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha = \eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi$ και $\beta = 2\sigma\upsilon\nu\varphi + \epsilon\varphi\varphi$

ΘΕΜΑ 9

Αν $\epsilon\varphi\theta = \sqrt{2}$ και $0^\circ < \theta < 90^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

A. $A = \epsilon\varphi\theta + \eta\mu(180^\circ - \theta) - \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta)$

B. $B = \eta\mu\theta + \eta\mu(90^\circ - \theta) - 2\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)$

$$\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται αμβλεία γωνία ω για την οποία ισχύει:

$$4\epsilon\varphi^2\omega - 5\epsilon\varphi\omega - 6 = 0$$

A. Να βρείτε την $\epsilon\varphi\omega$

B. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \eta\mu\omega + \eta\mu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι αμβλεία.

ΘΕΜΑ 11

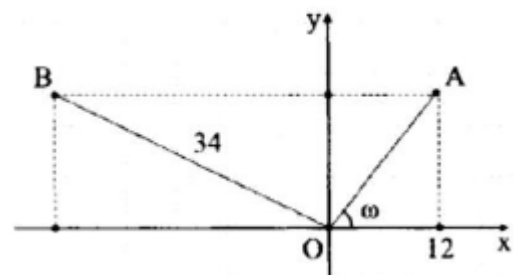
Στο παρακάτω σχήμα, η τετμημένη του A είναι 12 και ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$ και $OB = 34$.

Να βρείτε:

A. Την τεταγμένη του A

B. Το $\eta\mu\omega$ και τη $\sigma\upsilon\nu\omega$

Γ. Τις συντεταγμένες του B.



ΤΕΛΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ