Производная сложной функции. Примеры решений

На данном уроке мы научимся находить **производную сложной функции**. Урок является логическим продолжением занятия **Как найти производную?**, на котором мы разобрали простейшие производные, а также познакомились с правилами дифференцирования и некоторыми техническими приемами нахождения производных. Таким образом, если с производными функций у Вас не очень или какие-нибудь моменты данной статьи будут не совсем понятны, то сначала ознакомьтесь с вышеуказанным уроком. Пожалуйста, настройтесь на серьезный лад – материал не из простых, но я все-таки постараюсь изложить его просто и доступно.

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, я бы даже сказал, почти всегда, когда Вам даны задания на нахождение производных.

Смотрим в таблицу на правило (№ 5) дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u я буду называть **внешней функцией**, а функцию v **– внутренней (или вложенной) функцией**.

! Данные определения не являются теоретическими и не должны фигурировать в чистовом оформлении заданий. Я применяю неформальные выражения «внешняя функция», «внутренняя» функция только для того, чтобы Вам легче было понять материал.

Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим:

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x-5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x-5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$$\cancel{\sin(3x-5) = \sin(3x) - \sin 5}$$

В данном примере уже из моих объяснений интуитивно понятно, что функция $y = \sin(3x-5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x-5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x-5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде $\sin(3x-5)$ понятно, что под синус вложен многочлен $3x-5$. А как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике.

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x=1$ (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно будет выполнить следующее действие: $3\cdot1-5=-2$, поэтому многочлен $3x-5$ и будет внутренней функцией v:

$$y=\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}$$

Во вторую очередь нужно будет найти $\sin(-2)$, поэтому синус – будет внешней функцией:

$$y=\underbrace{\boxed{\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}}}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$.

Начинаем решать. Из урока **Как найти производную?** мы помним, что оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем всю функцию в скобки и ставим справа вверху штрих:

$$y'=(\sin(3x-5))'$$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)'=\cos x$. **Все табличные шаблоны применимы и в том случае, если «икс» заменить любой дифференцируемой функцией v**. В данном примере ВМЕСТО «икс» у нас $3x-5$:

$$u'(v)=\cos(3x-5)$$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v=3x-5$ не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно очевидно, что $v'=(3x-5)'$

Результат применения формулы $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)'$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0)$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$

$= 3\cos(3x-5)$

Готово

Если осталось какое-либо недопонимание, перепишите решение на бумагу и еще раз прочитайте объяснения.

<u>Пример 2</u>

Найти производную функции $y = \cos 2x$

Это пример для самостоятельного решения.

$y' = -2\sin 2x$

<u>Пример 3</u>

Найти производную функции $y = (2x+1)^5$

Как всегда записываем:

$y' = ((2x+1)^5)'$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x = 1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y = (\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y = \underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для любой дифференцируемой функции** v. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'$$

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\text{не меняется}}{}^4$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$

$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Готово.

<u>Пример 4</u>

Найти производную функции $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^7}$

Это пример для самостоятельного решения.

$y' = -\dfrac{14x}{(x^2-1)^8}$ *Указание: перед дифференцированием необходимо перенести степень наверх, сменив у показателя знак* $\dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$.

Для закрепления понимания производной сложной функции приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

<u>Пример 5</u>

а) Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

<u>Пример 6</u>

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2+tgx+15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Пример 7

Найти производную функции $y = \dfrac{5}{\sqrt[5]{x + \ln x}}$

Это пример для самостоятельного решения .

$$y' = -\frac{1}{\sqrt[5]{(x + \ln x)^6}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Интересно отметить, что иногда вместо правила дифференцирования сложной функции можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но такое решение будет выглядеть ~~как извращение~~ необычно. Вот характерный пример:

Пример 8

Найти производную функции $y=-\dfrac{1}{\cos x}$

Здесь можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, но гораздо выгоднее найти производную через правило дифференцирования сложной функции:

$$y'=\left(-\frac{1}{\cos x}\right)'$$

Подготавливаем функцию для дифференцирования – выносим минус за знак производной, а косинус поднимаем в числитель:

$$y'=\left(-\frac{1}{\cos x}\right)'=-\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-(cos^{-1}x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция.
Используем наше правило $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$:

$$y'=\left(-\frac{1}{\cos x}\right)'=-\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-(cos^{-1}x)'=$$
$$=-(-1)\cdot cos^{-2}x\cdot(\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, косинус сбрасываем обратно вниз:

$$y'=\left(-\frac{1}{\cos x}\right)'=-\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-(cos^{-1}x)'=$$
$$=-(-1)\cdot cos^{-2}x\cdot(\cos x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Готово. В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, ответы должны совпасть.

<u>Пример 9</u>

Найти производную функции $y=\dfrac{1}{\arccos^2 x}$

Это пример для самостоятельного решения.

$$y'=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos^3 x}$$

До сих пор мы рассматривали случаи, когда у нас в сложной функции было только одно вложение. В практических же заданиях часто можно встретить производные, где, как матрёшки, одна в другую, вложены сразу 3, а то и 4-5 функций.

<u>Пример 10</u>

Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ с помощью подопытного значения $x = 1$. Как бы мы считали на калькуляторе?

Сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin^2 x}}}$$

И, наконец, семерку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin^2 x}}}$$

То есть, в данном примере у нас три разные функции и два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$. Только вот ВМЕСТО «икс» у нас функция $\arcsin^2 x$, и мы действуем по шаблону. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Легко убедиться, что внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень. Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» результат:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Готово.

Пример 11

Найти производную функции $y = \ln^2(2x-1)$

Это пример для самостоятельного решения .

$$y' = \frac{4\ln(2x-1)}{2x-1}$$

На практике правило дифференцирования сложной функции почти всегда применяется в комбинации с остальными правилами дифференцирования.

Пример 12

Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u \pm v)' = u' \pm v'$, заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)' = Cu'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)'$$

В обоих слагаемых под штрихами у нас находится произведение функций, следовательно, нужно дважды применить правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)' =$$

$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2-4x+3)'\sin 7x + (x^2-4x+3)(\sin 7x)'$$

Замечаем, что под некоторыми штрихами у нас находятся сложные функции e^{3x}, $\sin 7x$. Каламбур, но это простейшие из сложных функций, и при определенном опыте решения производных Вы будете легко находить их устно.
А пока запишем подробно, согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)' =$$

$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2-4x+3)'\sin 7x + (x^2-4x+3)(\sin 7x)' =$$

$$= -2(1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot (3x)') + (2x-4+0)\sin 7x + (x^2-4x+3)\cos 7x \cdot (7x)' =$$

$$= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x-4)\sin 7x + 7(x^2-4x+3)\cos 7x$$

Готово.

! Обратите внимание на приоритет (порядок) применения правил: <u>правило дифференцирования сложной функции применяется в последнюю очередь</u>.

<u>Пример 13</u>

Найти производную функции $y = \sqrt{x^2+4} \cdot \ln(\sin\ x)$

Это пример для самостоятельного решения .

$$y' = \frac{x\ln(\sin\ x)}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot \cos x}{\sin\ x}$$

Пожалуй, хватит на сегодня. Хочется еще привести пример с дробью и сложной функцией, но такой пример принципиально ничем не отличается от двух последних заданий, единственное отличие – вместо правила $(uv)' = u'v + uv'$ применяем правило $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.