

BÀI 32. CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

1. Bất đẳng thức thường gặp

- **Bất đẳng thức Bunhiacopski**: Cho các số thực a, b, x, y ta luôn có

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

- **Bất đẳng thức Vector**: Cho 2 vectơ $\vec{u}(x; y)$ và $\vec{v}(x'; y')$ ta luôn có

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \geq \sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} < 0$$

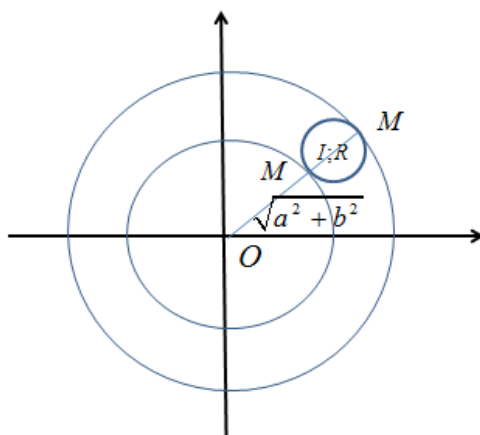
Dấu = xảy ra

2. Phương pháp mẹo sử dụng sử tiếp xúc

- **Dạng 1**: Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) bán kính R . Với mỗi điểm M thuộc đường tròn (C) thì cũng thuộc đường tròn (C') tâm gốc tọa độ bán kính $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

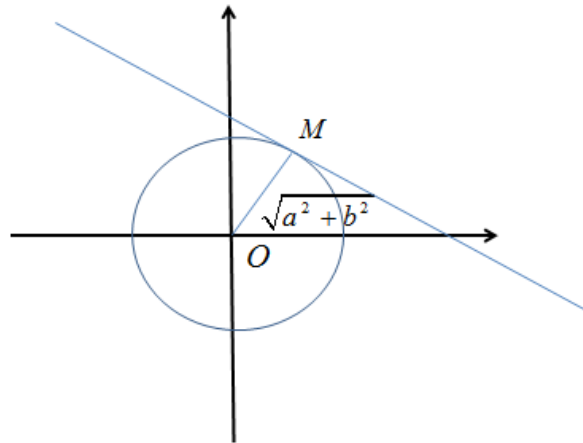
+ Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc trong với đường tròn (C) và $OM = OI + R$

+ Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) và $OM = OI - R$



- **Dạng 2**: Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng (d) . Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (C')

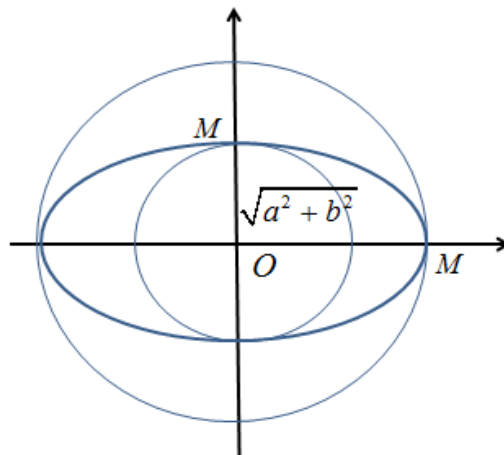
+) Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó OM vuông góc với (d) và $OM = d(O; (d))$



- **Dạng 3 :** Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là Elip có đỉnh thuộc trục lớn $A(a; 0)$ và đỉnh thuộc trục nhỏ $B(0; b)$. Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (E)

+) Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và $\max |z| = OM = OA$

+) Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và $\min |z| = OM = OB$



- **Dạng 4 :** Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

Hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đỉnh thuộc trục thực $A'(-a; 0), A(a; 0)$ thì số phức z có môđun nhỏ nhất nếu điểm biểu diễn số phức z này trùng với các đỉnh trên. (môđun lớn nhất không tồn tại)

VD1-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = -1+i$ B. $z = -2+2i$ C. $z = 2+2i$ D. $z = 3+2i$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

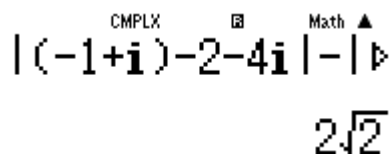
- Trong các số phức ở đáp án, ta sẽ tiến hành sắp xếp các số phức theo thứ tự môđun tăng dần :

$$|-1+i| < |-2+2i| = |2+2i| < |3+2i|$$

- Tiếp theo sẽ tiến hành thử nghiệm từng số phức theo thứ tự môđun tăng dần, số phức nào thỏa mãn hệ thức điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ đầu tiên thì là đúng

Với $z = -1+i$ Xét hiệu : $|(-1+i)-2-4i| - |(-1+i)-2i|$

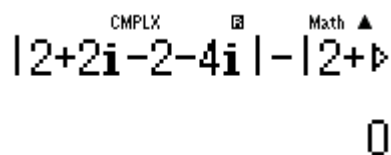
$$\sqrt{(-1-2)^2 + (1-4)^2} - \sqrt{(-1-2)^2 + (1-2)^2}$$



Ra một giá trị khác 0 vậy $z = -1+i$ không thỏa mãn hệ thức. $\Rightarrow$ Đáp án A sai

- Tương tự như vậy với $z = 2+2i$

$$\sqrt{(2-2)^2 + (2-4)^2} - \sqrt{(2-2)^2 + (2-2)^2}$$



Vậy số phức $z = 2+2i$ thỏa mãn hệ thức $\Rightarrow$ Đáp số C là đáp số chính xác

❖ **Cách mệo**

Gọi số phức z có dạng $z = a+bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$

$$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i| = |a+(b-2)i|$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-4)^2 = a^2 + (b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 - 8b + 16 = a^2 + b^2 - 4b + 4$$

$$\Leftrightarrow 4a + 4b = 16$$

$$\Leftrightarrow a + b - 4 = 0$$

Trong các đáp án chỉ có đáp án C thỏa mãn $a+b-4=0 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là C

❖ **Cách tự luận**

Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$

$$\Leftrightarrow |a - 2 + (b - 4)i| = |a + (b - 2)i|$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 4)^2 = a^2 + (b - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 - 8b + 16 = a^2 + b^2 - 4b + 4$$

$$\Leftrightarrow 4a + 4b = 16$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$16 = (a + b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 \geq 8$$

$$\Rightarrow |z| \geq 2\sqrt{2}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i$

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Với các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max |z| = 4$ B. $\max |z| = 3$ C. $\max |z| = 7$ D. $\max |z| = 6$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$
- $$\Leftrightarrow |(a + bi)(1+i) + 1 - 7i| = \sqrt{2}$$
- $$\Leftrightarrow |a - b + 1 + (a + b - 7)i| = \sqrt{2}$$
- $$\Leftrightarrow (a - b + 1)^2 + (a + b - 7)^2 = 2$$
- $$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 50 - 12a - 16b = 2$$
- $$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 8b + 25 = 1$$
- $$\Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 1$$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R = 1$. Ta gọi đây là đường tròn (C)

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì O, I, M thẳng hàng (như hình) và (C') tiếp xúc trong với (C)

Khi đó $OM = OI + R = 5 + 1 = 6$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

- Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$
- $$\Leftrightarrow |(a+bi)(1+i) + 1 - 7i| = \sqrt{2}$$
- $$\Leftrightarrow |a - b + 1 + (a + b - 7)i| = \sqrt{2}$$
- $$\Leftrightarrow (a - b + 1)^2 + (a + b - 7)^2 = 2$$
- $$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 50 - 12a - 16b = 2$$
- $$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 8b + 25 = 1$$
- $$\Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 1$$

- Ta có $|z|^2 = a^2 + b^2 = 6a + 8b - 24 = 6(a - 3) + 8(b - 4) + 26$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có : $6(a - 3) + 8(b - 4) \leq |6(a - 3) + 8(b - 4)|$
 $\leq \sqrt{(6^2 + 8^2)[(a - 3)^2 + (b - 4)^2]} = 10$

Vậy $|z|^2 \leq 36 \Leftrightarrow |z| \leq 6$

$\Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

❖ **Bình luận**

- Việc sử dụng bất đẳng thức để đánh giá $|z|$ là rất khó khăn, đòi hỏi học sinh phải nắm rất vững bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến dạng của nó
- Trong tình huống của bài toán này, khi so sánh 2 cách giải ta thấy dùng mẹo tiếp xúc tỏ ra đơn giản dễ hiểu và tiết kiệm thời gian hơn.

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là :

A. 10 và 4 B. 5 và 4 C. 4 và 3D. 5 và 3

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$
- $$\Leftrightarrow |a - 4 + bi| + |a + 4 + bi| = 10$$
- $$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 4)^2 + b^2} + \sqrt{(a + 4)^2 + b^2} = 10$$
- $$\Leftrightarrow \sqrt{(a + 4)^2 + b^2} = 10 - \sqrt{(a - 4)^2 + b^2}$$
- $$\Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 + b^2 = 100 + a^2 - 8a + 16 + b^2 - 20\sqrt{(a - 4)^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow 20\sqrt{(a-4)^2 + b^2} = 100 - 16a$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(a-4)^2 + b^2} = 25 - 4a$$

$$\Leftrightarrow 25(a^2 - 8a + 16 + b^2) = 625 - 200a + 16a^2$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 + 25b^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{9} = 1$$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường Elip đỉnh thuộc đáy lớn là $A(5;0)$, đỉnh thuộc đáy nhỏ là $B(0;3)$

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và $M \equiv A(5;0)$
 $\Rightarrow OM = 5$
 $\Rightarrow \max|z| = 5$
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và $M \equiv B(0;3) \Rightarrow OM = 3$
 $\Rightarrow \min|z| = 3$
 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ Cách tự luận

- Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. z thỏa mãn $|z-4| + |z+4| = 10$
 $\Leftrightarrow |a-4+bi| + |a+4+bi| = 10$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2 + b^2} + \sqrt{(a+4)^2 + b^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2 + b^2} + \sqrt{(-a+4)^2 + (-b)^2} = 10$$

Theo bất đẳng thức vecto ta có :

$$\Leftrightarrow 10 = \sqrt{(a+4)^2 + b^2} + \sqrt{(-a+4)^2 + (-b)^2} \geq \sqrt{[(a+4) - (-a+4)]^2 + [b - (-b)]^2}$$

$$\Leftrightarrow 10 \geq \sqrt{4a^2 + 4b^2}$$

$$\Leftrightarrow 10 \geq 2|z| \Rightarrow |z| \leq 5$$

- Ta có $\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2 + b^2} + \sqrt{(a+4)^2 + b^2} = 10$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$100 = \left(\sqrt{(a-4)^2 + b^2} + \sqrt{(a+4)^2 + b^2} \right)^2 \leq (1^2 + 1^2) \left[(a-4)^2 + b^2 + (a+4)^2 + b^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow 100 \leq 2(2a^2 + 2b^2 + 32)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 32 \geq 50$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 9$$

Vậy $|z|^2 \geq 9 \Leftrightarrow |z| \geq 3$

$$\Rightarrow 3 \leq |z| \leq 5 \Rightarrow \text{đáp án D là chính xác}$$

VD4-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2| - |z+2| = 2$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

- A. $z = 1 - \sqrt{3}i$ B. $z = -1 + \sqrt{3}i$ C. $z = 1$ D. $z = \sqrt{3} + i$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z = x + yi$. z thỏa mãn $|z-2| - |z+2| = 2$
 $\Leftrightarrow |x-2+yi| - |x+2+yi| = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2 + \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4 + 4\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + (x+2)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2x = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \quad \left(-1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4x + 4x^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là Hypebol $(H): x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ có 2 đỉnh thuộc thực là $A'(-1;0), B(1;0)$

- Số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$ và có môđun là $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 . Để OM đạt giá trị nhỏ nhất thì M trùng với hai đỉnh của (H)
 $M \equiv A \Rightarrow M(1;0) \Rightarrow z = 1$
 $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z - 2 + 2i| = 1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

- A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} - 1$

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3i| + |i\bar{z} + 3| = 10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích $z_1 z_2$ là bao nhiêu

- A. 25 B. -25 C. 16 D. -16

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z - 2 + 2i| = 1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

- A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} - 1$

GIẢI

❖ **Cách mọo**

- Gọi số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|2z - 2 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |2x - 2 + 2yi + 2i| = 1$
 $\Leftrightarrow (2x - 2)^2 + (2y + 2)^2 = 1$
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$

- Với mỗi điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R' = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vì vậy để $R = |z|$ nhỏ nhất thì đường tròn (C') phải tiếp xúc ngoài với đường (C)

Khi đó điểm M sẽ là tiếp điểm của đường tròn (C) và (C') và

$$|z| = OM = OI - R = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$$

s (1 p 0) d + (p 1 p 0) d \$ p a 1 R 2 =

$$\sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$$

⇒ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i| + |\bar{z}+3| = 10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích $z_1 z_2$ là bao nhiêu
A. 25 **B.** -25 **C.** 16 **D.** -16

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z-3i| + |\bar{z}+3| = 10$
 $\Leftrightarrow |x + (y-3)i| + |y+3+xi| = 10$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(y+3)^2 + x^2} = 10$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(y+3)^2 + x^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$
 $\Leftrightarrow (y+3)^2 + x^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + x^2 + (y-3)^2$
 $\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 100 - 12y$
 $\Leftrightarrow 25x^2 + 16y^2 = 400$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ có 2 đỉnh thuộc trục nhỏ là $A(-4;0), A'(4;0)$

- Với mỗi điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R' = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vì elip (E) và đường tròn (C) có cùng tâm O nên để OM nhỏ nhất thì M là đỉnh thuộc trục nhỏ
 $\Rightarrow M \equiv A' \Rightarrow z_1 = -4$, $M \equiv A \Rightarrow z_2 = 4$

Tổng hợp $z_1 \cdot z_2 = (-4) \cdot 4 = -16$

⇒ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Mở rộng**

- Nếu đề bài hỏi tích $z_1 z_2$ với $|z_1|, |z_2|$ có giá trị lớn nhất thì hai điểm M biểu diễn hai số phức trên là hai đỉnh thuộc trục lớn $B(0;-5), B'(0;5)$
 $\Rightarrow M \equiv B' \Rightarrow z_1 = -5i$, $M \equiv A \Rightarrow z_2 = 5i$

Tổng hợp $z_1 z_2 = 5i \cdot (-5i) = -25i^2 = 25$

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

GIẢI

❖ **Cách mọo**

- Gọi số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$

$$\Leftrightarrow |-y-3+xi|=|x-2+(y-1)i|$$

$$\Leftrightarrow (-y-3)^2 + x^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 + x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 100 - 12y$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d): x + 2y + 1 = 0$

- Với mỗi điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thì $|z| = OM \geq OH$ với H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d) và OH là khoảng cách từ điểm O lên đường thẳng (d)

$$OH = d(O; (d)) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Tính

$$|z| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vậy

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

$$\left| x + yi + \frac{1}{x + yi} \right| = \left| \frac{x^2 - y^2 + 1 + 2xyi}{x + yi} \right| = \left| \frac{x^3 - xy^2 + x + x^2yi + y^3i - yi + 2xy^2}{x^2 + y^2} \right|$$