

Môn thi: **TOÁN**
 Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)
 Ngày thi: **18/3/2017**

1. Cho biểu thức: $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

2. Cho biểu thức: $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên.

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực x, y dương, ta luôn có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2$

Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA . Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC . Chứng minh rằng: Khi M di động trên trục đẳng trục:

$$\text{MH} + \text{MI} + \text{MK} = \frac{2\sqrt{3}(\text{S} + 2\text{S}')}{3\text{R}}$$

đoạn FD, lấy N trên tia DE sao cho $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh MA là tia phân
giác của góc $\widehat{NMF}$

ĐÁP ÁN

Bài 1 (6,0 điểm).

1a) Rút gọn được $P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$ (với $m \geq 0, m \neq 1$)

1b)

$$P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1}$$

Ta có: $P \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1$ là ước dương của 2 $\Rightarrow m \in \{4; 9\}$ (TMĐK)

Vậy $m = 4; m = 9$ là giá trị cần tìm.

2) $a + b + c \equiv 4 \pmod{4}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

Đặt $a + b + c = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow a + b = 4k - c; b + c = 4k - a; a + c = 4k - b$

Ta có: $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc = (4k - c)(4k - a)(4k - b) - abc$

$$= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k - b) - abc$$

$$= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc$$

$$= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc \quad (*)$$

Giả sử a, b, c đều chia 2 dư 1 $\Rightarrow a + b + c$ chia 2 dư 1 (1)

Mà: $a + b + c \equiv 4 \pmod{4} \Rightarrow a + b + c \equiv 2 \pmod{2}$ (theo giả thiết) (2)

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai

$\Rightarrow$ Trong ba số a, b, c ít nhất có một số chia hết cho 2

$\Rightarrow 2abc \equiv 0 \pmod{4}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow P \equiv 4 \pmod{4}$

Bài 2 (5,0 điểm).

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng)

b) PT có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2}$ và $x_1 \cdot x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2 = \dots =$$

$$(x_1 - x_2)^2 \left[1 + \frac{(1 - x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} \right] = \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \right] \left[1 + \frac{(1 - x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} \right]$$

$$= \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) m^2 + 8\sqrt{2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$

Vậy GTNN của M là $8\sqrt{2} + 8$ khi $m = 0$

Bài 3 (2,0 điểm)

Áp dụng BĐT Cô si cho các số dương x^2 và yz , ta có:

$$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2 yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{yz}}$$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y\sqrt{xz}}$ và $\frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{xy}}$

Suy ra:
$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right) \quad (1)$$

Ta có:
$$\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \quad (2)$$

Ta có:
$$\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} \leq x + y + z \quad (3)$$

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \leq 2x + 2y + 2z$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ (BĐT đúng)

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$

Từ (2) và (3) suy ra:
$$\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \leq \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra:
$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Bài 4 (7,0 điểm).

1.a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: $\triangle BEM$ là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$\triangle BMA = \triangle BEC \Rightarrow MA = EC$

Do đó: $MB + MC = MA$

Cách 2:

Trên AM lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: $\triangle BEM$ là tam giác đều

$\Rightarrow BE = BM = EM$

$\triangle MBC = \triangle EBA$ (c.g.c) $\Rightarrow MC = AE$

Do đó: $MB + MC = MA$

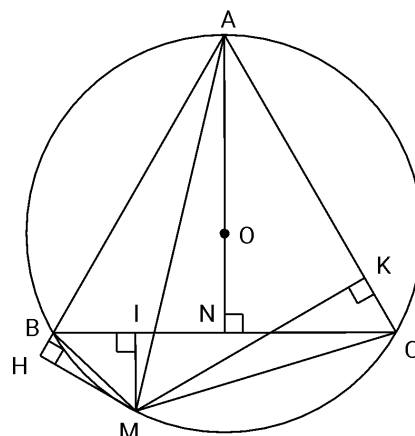
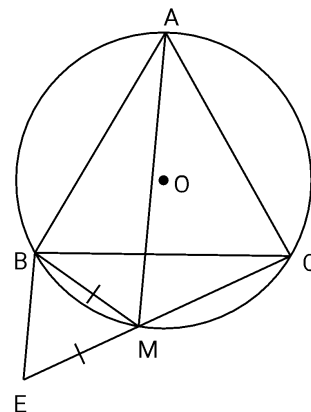
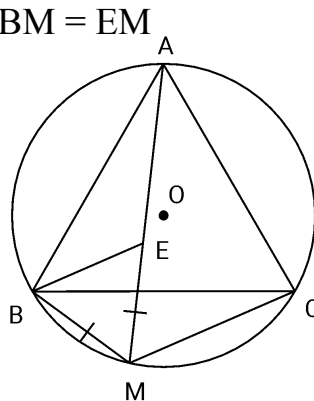
1.b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng $\Rightarrow AN = \frac{3}{2}R$

Ta có: $AN = AB \cdot \sin \angle ABN \Rightarrow AB = \frac{AN}{\sin \angle ABN} = \frac{3}{2}R : \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Lbìnhpn thespuochoa



Ta có: $\frac{1}{2}MH.AB = S_{ABM} \Leftrightarrow MH = \frac{2S_{ABM}}{AB} = \frac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{2}MK.AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \frac{2S_{ACM}}{AC} = \frac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2}MI.BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \frac{2S_{BCM}}{BC} = \frac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \frac{2S'}{R\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } MH + MK + MI &= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}(S_{ABM} + S_{ACM}) = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.S_{ABMC} \\ &= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.(S + S') = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R} \end{aligned}$$

2. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K

Tứ giác AEDB nội tiếp $\Rightarrow \angle CDE = \angle BAC$

Mà: $\angle MKD = \angle CDE$ (vì $MK \parallel BC$).

Do đó: $\angle MKD = \angle MAN \Rightarrow$ Tứ giác AMKN nội tiếp

$$\Rightarrow \angle AMN = \angle AKN$$

Ta có: $\angle D_3 = \angle D_4 (= \angle BAC) \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$

$\triangle DMK$ có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại D
 $\Rightarrow DM = DK$

$\triangle AMD = \triangle AKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AMD = \angle AKD$

Nên: $\angle AMF = \angle AKN$. Ta có: $\angle AMF = \angle AMN (= \angle AKN)$

Vậy: MA là phân giác của góc $\angle NMF$

