

高師大附中106學年度第二學期高三(自然組)第一次段考數學試題

一、多重選擇題:每題5分,共20分

(每題均有五個選項,其中至少有一個選項是正確的。答錯一個選項給3分,答錯兩個選項得1分,錯二個以上的選項不給分)

1.若下列五個函數在 $x=0$ 處的函數值均定義為0,試問哪些函數在 $x=0$ 處「不連續」?

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2+3, & x < 0 \end{cases}$$

(1) $\frac{|x|}{x}$ (2) $\frac{[x]}{\sin x}$ (3) $\frac{x}{|x-1|-|x+1|}$ (4) $\frac{x}{|x-1|-|x+1|}$ (5) $[x - [x]]$ ($[x]$ 表小於或等於 x 的最大整數)。

2.若函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$,則下列選項哪些是正確的? (1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ (2)

$\lim_{x \rightarrow 2} xf(x) = 0$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2} = 2$ (4) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x)}{x-2} + \frac{2x^2-3x-2}{x-2} \right) = 7$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$

3.下列何者正確? (1)若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列, $\langle b_n \rangle$ 為發散數列, 則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 發散 (2)若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列, $\langle b_n \rangle$ 為發散數列, 則數列 $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ 發散 (3)設 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ 為三個數列,且對任意正整數 $n, a_n \leq b_n \leq c_n$ 均成立,若 $\langle a_n \rangle$ 及 $\langle c_n \rangle$ 均為收斂數列, 則 $\langle b_n \rangle$ 為收斂數列, (4)若數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂, 數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂, 則數列 $\langle b_n \rangle$ 收斂 (5)若 $\langle a_{2n} \rangle$ 為收斂數列, 則 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列。

4.則下列何者正確? (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3 + x^3}{x}$ 極限值存在 (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{3x}$ 極限值存在 (3)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{x}{4} + 3 \right]}{2x}$ 極限值不存在 (4) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^{n-1} - 1}{4^n}$ 收斂 (5)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} \right)$ 極限值存在。

二、填充題:共74分

配分表

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
分數	8	16	22	28	34	40	44	48	52	56	60	64	68	70	72	74

1.求下列各式的極限值,若極限值不存在,則寫不存在

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} = \underline{(1)}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+2} - 2 \times 5^{n+3}}{4^{n+3} + 3^{2n-1}} = \underline{(2)}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} + \dots + \frac{2n-1}{n} \right) \right] =$ (3) (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1-x^{200}}{1-x} - 200 \right) =$ (4) (5)

$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} + \dots =$ (5)

2. 若無窮級數收斂且 $\sum_{k=1}^{\infty} (1+x)x^{k-1} = \frac{4-5x}{2}$ 時則 $x =$ (6)

3. 無窮等比級數的首項為 2, 和為 6, 若前 n 項和 S_n 滿足 $|6 - S_n| < \frac{1}{1000}$, 則 n 的最小值為 (7)。

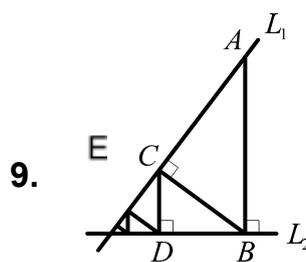
4. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$. (1) 求 $f(x) =$ (8) (2) 求 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-3} =$ (9)。

5. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n+3} = 3$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n-1} =$ (10)。

6. 函數 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ 的定義域為 (11); 值域為 (12)。

7. 若 a, b 為異於 0 之實數, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+a}-b}{x-1} = \frac{1}{3}$, 求 $a+b =$ (13)

8. 座標平面上有二相交直線 L_1 及 L_2 , $L_1: 4x-3y=0$, $L_2: y=0$, 自 L_1 上一點 A 作 L_2 之垂線, 交 L_2 於 B 點, 再自 L_2 上一點 B 作 L_1 之垂線, 交 L_1 於 C 點, 自 C 點作 L_2 之垂線, 交 L_2 於 D 點, 再自 L_2 上一點 D 作 L_1 之垂線, 交 L_1 於 E 點, 如此繼續下去, 已知 $\overline{AB} = 5$, 求 ΔABC 的面積 + ΔCDE 的面積 + ... 此無窮多個三角形面積和 (這些直角三角形的一股均在直線 L_1 上) (14)。



已知 a, b 為實數, n 為自然數, 若函數

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax + b}{x^{2n} + 1}$, 若對所有實數 x , $f(x)$ 為連續函

數, 試求數對 $(a, b) =$ (15)。

10. 已知 $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$, $f_2(x) = f(f(x))$, 且對正整數 $n \geq 2$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) =$ (16)。

三、計算證明題: 共 6 分 (請詳列算式, 否則不予計分)

設數列 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}$, 利用夾擠定理求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = ?$

高師大附中106學年度第二學期高三(自然組)第一次段考數學答案卷

班級: __ 座號: __ 姓名:

一、多重選擇題: 每題5分, 共20分

(每題均有五個選項, 其中至少有一個選項是正確的。答錯一個選項給3分, 答錯兩個選項得1分, 錯二個以上的選項不給分)

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

二、填充題: 配分表

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
分	8	16	22	28	34	40	44	48	52	56	60	64	68	70	72	74

數																	
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(1)	(2)	(3)	(4)
(5)	(6)	(7)	(8)
(9)	(10)	(11)	(12)
(13)	(14)	(15)	(16)

三、計算題:共6分(請詳列算式, 否則不予計分)

高師大附中106學年度第二學期高三(自然組)第一次段考數學答案卷

班級:___ 座號:___ 姓名:

一、多重選擇題:每題5分, 共20分

(每題均有五個選項, 其中至少有一個選項是正確的。答錯一個選項給3分, 答錯兩個選項得1分, 錯二個以上的選項不給分)

1. 1234	2. 24	3. 14	4. 125
------------	----------	----------	-----------

二、填充題: 配分表

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
分數	8	16	22	28	34	40	44	48	52	56	60	64	68	70	72	74

(1)	(2)	(3)	(4)
不存在	27	1	19900
(5)	(6)	(7)	(8)
2	$\frac{1}{5}$	22	$(x-1)(x-2)(3x-4)$

(9)	(10)	(11)	(12)
48	4	$\{x \mid -1 < x < 5, x \in R\}$	$\left\{y \mid y \geq \frac{1}{3}, y \in R\right\}$
(13)	(14)	(15)	(16)
10	$\frac{1875}{272}$	(1,0)	4

三、計算題:共6分(請詳列算式, 否則不予計分)

2