Наибольший общий делитель двух натуральных чисел и его свойства

Наибольшим общим делителем двух натуральных чисел называется наибольшее из натуральных чисел, на которое делится каждое из данных чисел.

Обозначение наибольшего общего делителя чисел a и $в$: $НОД\ (a;\ в)$.

Из определения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел следует, что $НОД\ (a;\ в) = НОД\ (в;\ a)$, $НОД\ (a;\ a) = a$, $НОД\ (a;\ 1) = 1$, $НОД\ (a;\ 0) = a$.

Если числа a и $в$ взаимно просты (числа, у которых общий делитель 1), то

$НОД\ (a;\ в) = 1$.

Пример. $НОД\ (3;\ 5) = 1$.

Если a – простое число, $в$ – составное число и $в$ не делится на a, то

$НОД\ (a;\ в) = 1$.

Пример. $НОД\ (7;\ 12) = 1$.

$НОД\ (-a;\ в) = НОД\ (a;\ -в) = НОД\ (-a;\ -в)$. Это связано с тем, что противоположные числа a и $-a$, $в$ и $-в$ имеют общие делители.

Пусть $НОД\ (a;\ в) = n$, тогда a делится на n и $в$ делится на n ($a \vdots n$, $в \vdots n$), $a = nк$,

$в = pк$, $к$ и p – взаимно простые числа. $a - в = n(к - p) \vdots n$, $a + в = n(к + p) \vdots n$.

Пусть $НОД\ (a;\ в) = n$, $НОД\ (a;\ a - в) = n_1$, $a > в$. Тогда $a \vdots n$, $(a - в) \vdots n$. Значит

$n_1 \geq n$, т. к. $n_1 = НОД\ (a;\ a - в)$, а n – общий делитель чисел a и $a - в$.

Т. к. $НОД\ (a;\ a - в) = n_1$, то $a \vdots n_1$, $(a - в) \vdots n_1$, $a - (a - в) = в \vdots n_1$. Значит $n \geq n_1$, т. к.

$n = НОД\ (a;\ в)$, а n_1 – общий делитель чисел a и $в$. Из того, что $n_1 \geq n$, $n \geq n_1$, следует, что

$n = n_1$, т. е. если $a > в$, то $НОД\ (a;\ в) = НОД\ (a;\ a - в)$.

Примеры. 1) $НОД\ (36;\ 24) = НОД\ (36;\ 12) = 12$; 2) $НОД\ (n + 5;\ n + 3) = НОД\ (n + 5;\ 2)$. Если n чётно, то $НОД\ (n + 5;\ 2) = 1$, если n нечётно, то $НОД\ (n + 5;\ 2) = 2$.

Пусть $НОД\ (a;\ в) = n$, $НОД\ (в;\ a - в) = n_2$, $a > в$. Тогда $в \vdots n$, $(a - в) \vdots n$. Значит

$n_2 \geq n$, т. к. $n_2 = НОД\ (в;\ a - в)$, а n – общий делитель чисел $в$ и $a - в$.

Т. к. $НОД\,(в;\,а-в)=n_2$, то $в \vdots n_2$, $(в-а) \vdots n_2$, $в+а-в=а \vdots n_2$. Значит $n \geq n_2$, т. к.

$n = НОД\,(а;\,в)$, а n_2 – общий делитель чисел $а$ и $в$. Из того, что $n_2 \geq n$, $n \geq n_2$, следует, что

$n = n_2$, т. е. если $а > в$, то $НОД\,(а;\,в) = НОД\,(в;\,а-в)$.

Примеры. 1) $НОД\,(10;\,8) = НОД\,(10;\,2) = 2$; 2) $НОД\,(n+5;\,n+4) = НОД\,(n+4;\,1) = 1$.

Пусть $НОД\,(а;\,в) = n$, $НОД\,(а;\,в-а) = n_3$, $в > а$. Тогда $а \vdots n$, $(в-а) \vdots n$. Значит

$n_3 \geq n$, т. к. $n_3 = НОД\,(а;\,в-а)$, а n – общий делитель чисел $а$ и $в-а$.

Т. к. $НОД\,(а;\,в-а) = n_3$, то $а \vdots n_3$, $(в-а) \vdots n_3$, $в-а+а=в \vdots n_3$. Значит $n \geq n_3$, т. к.

$n = НОД\,(а;\,в)$, а n_3 – общий делитель чисел $а$ и $в$. Из того, что $n_3 \geq n$, $n \geq n_3$, следует, что

$n = n_3$, т. е. если $в > а$, то $НОД\,(а;\,в) = НОД\,(а;\,в-а)$.

Примеры. 1) $НОД\,(12;\,14) = НОД\,(12;\,2) = 2$; 2) $НОД\,(2n+1;\;3n+2) = НОД\,((2n+1,\,n+1) = НОД\,(n+1;\,2n+1) = НОД\,(n+1;\,n) = НОД\,(n;\,n+1) = НОД\,(n;\,1) = 1$.

Пусть $НОД\,(а;\,в) = n$, $НОД\,(в;\,в-а) = n_4$, $в > а$. Тогда $в \vdots n$, $(в-а) \vdots n$. Значит

$n_4 \geq n$, т. к. $n_4 = НОД\,(в;\,в-а)$, а n – общий делитель чисел $в$ и $в-а$.

Т. к. $НОД\,(в;\,в-а) = n_4$, то $в \vdots n_4$, $(в-а) \vdots n_4$, $в-(в-а)=а \vdots n_4$. Значит $n \geq n_4$, т. к.

$n = НОД\,(а;\,в)$, а n_4 – общий делитель чисел $а$ и $в$. Из того, что $n_4 \geq n$, $n \geq n_4$, следует, что

$n = n_4$, т. е. если $в > а$, то $НОД\,(а;\,в) = НОД\,(в;\,в-а)$.

Примеры. 1) $НОД\,(8;\,12) = НОД\,(12;\,4) = 4$; 2) $НОД\,(n+2;\,n+3) = НОД\,(n+3;\,1) = 1$.

Пусть $НОД\,(а;\,в) = n$, $НОД\,(а;\,а+в) = n_5$. Тогда $а \vdots n$, $в \vdots n$, $(а+в) \vdots n$. Значит

$n_5 \geq n$, т. к. $n_5 = НОД\,(а;\,а+в)$, а n – общий делитель чисел $а$ и $а+в$.

Т. к. $НОД\,(а;\,а+в) = n_5$, то $а \vdots n_5$, $(а+в) \vdots n_5$, $а+в-а=в \vdots n_5$. Значит $n \geq n_5$, т. к.

$n = НОД\,(а;\,в)$, а n_5 – общий делитель чисел $а$ и $в$. Из того, что $n_5 \geq n$, $n \geq n_5$, следует, что

$n = n_5$, т. е. $НОД\,(а;\,в) = НОД\,(а;\,а+в)$.

Пример. $НОД\,(6,\,5) = НОД\,(6,\,11) = 1$.

Пусть $НОД\,(a;\, в) = n$, $НОД\,(в;\, a + в) = n_6$. Тогда $a \vdots n$, $в \vdots n$, $(a + в) \vdots n$. Значит

$n_6 \geq n$, т. к. $n_6 = НОД\,(в;\, a + в)$, а n – общий делитель чисел $в$ и $a + в$.

Т. к. $НОД\,(в;\, a + в) = n_6$, то $в \vdots n_6$, $(a + в) \vdots n_6$, $a + в - в = a \vdots n_6$. Значит $n \geq n_6$, т. к.

$n = НОД\,(a;\, в)$, а n_6 – общий делитель чисел a и $в$. Из того, что $n_6 \geq n$, $n \geq n_6$, следует, что

$n = n_5$, т. е. $НОД\,(a;\, в) = НОД\,(в;\, a + в)$.

Примеры. 1) $НОД\,(6;\, 5) = НОД\,(5;\, 11) = 1$; 2) $НОД\,(n;\, n + 3) = НОД\,(n,\, 3)$. Если n делится на 3, то $НОД\,(n;\, 3) = 3$, если n не делится на 3, то НОД $(n;\, 3) = 1$.

Пусть $a = вq + r$, $a, в, q, r$ – натуральные числа, $НОД\,(a;\, в) = d$, $НОД\,(в;\, r) = d_1$.

Тогда $НОД\,(вq + r;\, в) = d$, $(вq + r) \vdots d$, $в \vdots d$, $вq \vdots d$, $(вq + r - вq) = r \vdots d$, $d_1 \geq d$, т. к.

$d_1 = НОД\,(в;\, r)$, а d - общий делитель чисел $в$ и r. Т. к. $НОД\,(в;\, r) = d_1$, то $в \vdots d_1$, $r \vdots d_1$,

$в\, q \vdots d_1$, $(вq + r) \vdots d_1$, $a \vdots d_1$, тогда $d \geq d_1$, т. к. $d = НОД\,(a;\, в)$, а d_1 – общий делитель чисел a и $в$. Из того, что $d_1 \geq d$, $d \geq d_1$, следует, что $d = d_1$, т. е. если $a = вq + r$, $a, в, q, r$ – натуральные числа, то $НОД\,(a;\, в) = НОД\,(в;\, r)$.

Примеры. 1) $НОД\,(38;\, 12) = НОД\,(12;\, 2) = 2$, т. к. $38 = 12 \cdot 3 + 2$;

2) $НОД\,(n^2 + 2;\, n) = НОД\,(n;\, 2)$, т. к. $n^2 + 2 = n \cdot n + 2$. Если n нечётно, то $НОД\,(n;\, 2) = 1$, если n чётно, то $НОД\,(n;\, 2) = 2$.

Пусть для натуральных чисел а *и в* справедлив ряд равенств

$$
\begin{aligned}
a &= вq_1 + r_1,\ \ 0 < r_1 < в,\\
в &= r_1q_2 + r_2,\ \ 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2q_3 + r_3,\ \ 0 < r_3 < r_2,\\
r_2 &= r_3q_4 + r_4,\ \ 0 < r_4 < r_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{к-2} &= r_{к-1}\, q_к + r_к,\ \ 0 < r_к < r_{к-1},\\
r_{к-1} &= r_к\, q_{к+1}.
\end{aligned}
$$

Двигаемся по записанным равенствам снизу вверх:

$r_{к-1} = r_к\ q_{к+1}$, следовательно $r_{к-1} \vdots\ r_к$;

$r_{к-2} = r_{к-1}\ q_к + r_к$, следовательно $r_{к-2} \vdots\ r_к$, т. к. $r_{к-1} \vdots\ r_к$ и $r_к \vdots\ r_к$;

$r_{к-3} = r_{к-2}\ q_{к-1} + r_{к-1}$, следовательно $r_{к-3} \vdots\ r_к$, т. к. $r_{к-2} \vdots\ r_к$ и $r_{к-1} \vdots\ r_к$;

…………………………………………………………………………

$в = r_1q_2 + r_2$, следовательно $в \vdots\ r_к$, т. к. $r_1 \vdots\ r_к$ и $r_2 \vdots\ r_к$;

$а = вq_1 + r_1$, следовательно $а \vdots\ r_к$, т. к. $в \vdots\ r_к$ и $r_1 \vdots\ r_к$. Значит, $r_к$ – общий делитель чисел $а$ и $в$.

Пусть r_0 – любой общий делитель чисел $а$ и $в$, $а \vdots\ r_0$ и $в \vdots\ r_0$. Двигаемся по записанным равенствам сверху вниз:

$а = вq_1 + r_1$, $НОД\,(а; в) = НОД\,(вq_1 + r_1; в) = НОД\,(в; r_1)$, $а \vdots\ r_0$, $в \vdots\ r_0$, $(вq_1 + r_1) \vdots\ r_0$,

$вq_1 \vdots\ r_0$, $(вq_1 + r_1 – вq_1) = r_1 \vdots\ r_0$;

$в = r_1q_2 + r_2$, $НОД\,(в; r_1) = НОД\,(r_1q_2 + r_2; r_1) = НОД\,(r_1; r_2)$, $r_1 \vdots\ r_0$, $(r_1q_2 + r_2) \vdots\ r_0$,

$(r_1q_2 \vdots\ r_0$, $(r_1q_2 + r_2 – r_1q_2) = r_2 \vdots\ r_0$;

……………………………………………………………………………………………

$r_{к-2} = r_{к-1}\ q_к + r_к$, $НОД\,(r_{к-2}; r_{к-1}) = \text{НОД}\,(r_{к-1}\ q_к + r_к, r_{к-1}) = НОД\,(r_{к-1}; r_к)$, $r_{к-1} \vdots\ r_0$,

$r_к \vdots\ r_0$;

$r_{к-1} = r_к\ q_{к+1}$, $НОД\,(r_к\ q_{к+1}; r_к) = r_к$, $r_к \vdots\ r_0$.

Таким образом, $НОД\,(а; в) = НОД\,(в; r_1) = НОД\,(r_1; r_2) = … = НОД\,(r_{к-2}; r_{к-1}) =$

$= НОД\,(r_{к-1}; r_к) = НОД\,(r_к\ q_{к+1}; r_к) = r_к$, где $а = вq_1 + r_1$, $0 < r_1 < в$,

$в = r_1q_2 + r_2$, $0 < r_2 < r_1$,

$r_1 = r_2q_3 + r_3$, $0 < r_3 < r_2$,

$$r_2 = r_3q_4 + r_4,\ \ 0 < r_4 < r_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{к-2} = r_{к-1}\,q_к + r_к,\ \ 0 < r_к < r_{к-1},$$

$$r_{к-1} = r_к\ q_{к+1}.$$

Мы получили алгоритм Евклида: *если для натуральных чисел а и в справедлив ряд равенств* $a = вq_1 + r_1,\ \ 0 < r_1 < в,$

$$в = r_1q_2 + r_2,\ \ 0 < r_2 < r_1,$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3,\ \ 0 < r_3 < r_2,$$

$$r_2 = r_3q_4 + r_4,\ \ 0 < r_4 < r_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{к-2} = r_{к-1}\,q_к + r_к,\ \ 0 < r_к < r_{к-1},$$

$$r_{к-1} = r_к\ q_{к+1},\ \text{то}\ \ НОД\ (a;\, в) = r_к.$$

Пример: Найти *НОД* (9249, 8568).

Делимое	*Делитель*	*Частное*	*Остаток*
9240	8568	1	672
8568	672	12	504
672	504	1	168
504	168	3	

Значит, *НОД* (9249, 8568) = 3.

Умножим обе части каждого из равентсв алгоритма Евклида на *m*, получим:

$$am = вq_1\,m + r_1m,$$

$$вm = r_1q_2\,m + r_2m,$$

$$r_1m = r_2q_3m + r_3m,$$

$$r_2m = r_3q_4\,m + r_4m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{к-2}\,m = r_{к-1}\,q_к\,m + r_к\,m,$$

$$r_{к-1}\,m = r_к\ q_{к+1}\,m.$$

$НОД\ (am;\, вm) = НОД\ (вq_1\,m + r_1m;\, вm) = НОД\ (вm;\, r_1m) = НОД\ (r_1q_2\,m + r_2m;\, r_1m) =$

$= НОД\ (r_1m;\, r_2m) = НОД\ (r_2q_3m + r_3m;\, r_2m) = НОД\ (r_2m;\, r_3m) = НОД\ (r_3q_4\,m + r_4m;\, r_3m) =$

$= НОД\,(r_3m;\, r_4m) = \ldots = НОД\,(r_{к-1}\,m;\, r_к\,m) = НОД\,(r_к\,q_{к+1}\,m;\, r_к\,m) = НОД\,(r_к m;\, r_к\,m) =$

$= r_к m, = mНОД\,(a;\, в)$, т. к. $r_к = НОД\,(a;\, в)$.

Значит, справедлива формула $НОД\,(am;\, вm) = mНОД\,(a;\, в)$.

Примеры: 1) $НОД\,(24;\, 26) = НОД\,(2 \cdot 12;\, 2 \cdot 13) = 2НОД\,(12;\, 13) = 2 \cdot 1 = 2$;

2) $НОД\,(3n;\, 3n + 6) = 3НОД\,(n;\, n + 2) = 3НОД\,(n;\, 2)$. Если n нечётно, то $3НОД\,(n;\, 2) = 3$, если n чётно, то $3НОД\,(n;\, 2) = 6$.

Пусть $в$ делится на $а$, т. е. $в = ас$, тогда $НОД\,(а;\, в) = НОД\,(а;\, ас) = аНОД(1;\, с) = а$.

Если $в$ делится на $а$, то $НОД\,(а;\, в) = а$.

Примеры: 1) $НОД\,(4;\, 16) = 4$; 2) $НОД\,(n^2 + 4;\, 2n^2 + 8) = НОД\,(n^2 + 4;\, 2(n^2 + 4)) =$

$= n^2 + 4$.

Пусть $НОД\,(а;\, в) = 1$, $НОД\,(с;\, в) = n_1$ тогда $с \vdots n_1$, $в \vdots n_1$, $(ас) \vdots n_1$. Пусть

$НОД\,(ас;\, в) = n_2$. Тогда $n_2 \geq n_1$, т. к. n_1 – общий делитель чисел $ас$ и $в$, а $n_2 = НОД\,(ас;\, в)$.

Т. к. $НОД\,(ас;\, в) = n_2$, то $(ас) \vdots n_2$, $в \vdots n_2$, $(вс) \vdots n_2$. Т. К. $а$ и $в$ взаимно простые числа и

$(ас) \vdots n_2$, $(вс) \vdots n_2$, то $с \vdots n_2$. Тогда $n_1 \geq n_2$, т. к. $n_1 = НОД\,(с;\, в)$, а n_2 – общий делитель чисел $с$ и $в$. Т. к. $n_2 \geq n_1$, $n_1 \geq n_2$, то $n_1 = n_2$. Значит , если $НОД\,(а;\, в) = 1$, то $НОД\,(ас;\, в) =$
$= НОД\,(с;\, в)$.

Примеры: 1) $НОД\,(4;\, 5) = 1$, $НОД\,(4 \cdot 2;\, 5) = НОД\,(2;\, 5) = 1$;

2) $НОД\,(m;\, n) = 1$. Тогда $НОД\,(5m;\, n) = НОД\,(5;\, n)$. Если n не делится на 5, то

$НОД\,(5;\, n) = 1$, если n делится на 5, то $НОД\,(5;\, n) = 5$.

Наименьшее общее кратное двух натуральных чисел и его свойства

Особый интерес и особую практическую значимость представляет наименьшее общее кратное двух натуральных чисел.

Наименьшим общим кратным двух натуральных чисел называется наименьшее из натуральных чисел, которое делится на каждое из данных чисел.

Обозначение наименьшего общего кратного чисел $а$ и $в$: $НОК\,(а;\, в)$.

Из определения наименьшего общего кратного двух натуральных чисел следует, что $НОК\,(а;\, в) = НОК\,(в;\, а)$, $НОК\,(а;\, а) = а$, $НОК\,(а;\, 1) = а$.

НОК (–*а*; *в*) = *НОК* (*а*; –*в*) = *НОК* (–*а*; –*в*). Это связано с тем, что противоположные числа *а* и –*а*, *в* и –*в* имеют общие кратные.

Пусть *НОК* (*а*; *в*) = *М*, тогда $M \vdots a$ и $M \vdots в$, т. е. $M = a \cdot к$, $M = l \cdot к$ и l – натуральные числа, $(a \cdot к) \vdots в$.

Пусть *НОД* (*а*; *в*) = *d*. Тогда $a = a_1 \cdot d$, $в = в_1 \cdot d$, a_1 и $в_1$ – взаимно простые числа.

$(a \cdot к) \vdots в$ означает, что $(a_1 \cdot d \cdot к) \vdots (в_1 \cdot d)$, из этого следует, что $(a_1 \cdot к) \vdots в_1$. Т. к. $(a_1 \cdot к) \vdots в_1$, а a_1 не делится на $в_1$, то $к \vdots в_1$, тогда $к = в_1 \cdot t$, t – натуральное число. Т. к. $в_1 = \dfrac{в}{d}$, то $к = \dfrac{вt}{d}$. $M = a \cdot к$, $M = \dfrac{вta}{d}$ - вид всех общих кратных чисел *а* и *в*. Т. к. а и в – числа натуральные, то при $t = 1$ получим наименьшее общее кратное, которое равно $\dfrac{a \cdot в}{d}$.

Получим формулу

$$НОК(a; в) = \frac{a \cdot в}{НОД(a; в)}.$$

Примеры: 1)

$$НОК(24;26) = \frac{24 \cdot 26}{НОД(24;26)} = \frac{24 \cdot 26}{2} = 312;$$

2)

$$НОК(n+5; n+3) = \frac{(n+5)(n+3)}{НОД(n+5; n+3)}.$$

Если n чётно, то *НОК* $(n + 5; n + 3) = (n + 5; n + 3)$, если n нечётно, то *НОК* $(n + 5; n + 3) = ½ (n + 5; n + 3)$.

Если *НОД* (*а*; *в*) = 1, то наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению: *НОК* (*а*; *в*) = *а* · *в*.

Примеры: 1) *НОК* (2; 3) = 2 · 3 = 6, 2) *НОК* (4; 7) = 4 · 7 = 28.

Т. к. *НОД* (*ат*; *вт*) = *тНОД* (*а*; *в*), то

$$НОК(am; вm) = \frac{am \cdot вm}{mНОД(a, в)} = m\frac{a \cdot в}{НОД(a; в)},$$

НОК (*ат*; *вт*) = *тНОК* (*а*; *в*).

Пример: *НОК* (36; 40) = *НОК* (4 · 9; 4 · 10) = 4*НОК* (9; 10) = 4 · 90 = 360.

Пусть *в* делится на *а*, т. е. *в* = *ас*, тогда *НОК* (*а*; *в*) = *НОК* (*а*; *ас*) = *аНОК* (1; *с*) = *ас* = *в*.

Если *в* делится на *а*, то *НОК* (*а*; *в*) = *в*.

Примеры: 1) *НОК* (12; 24) = 24; 2) *НОК* (16; 8) = 16.

Если *а* – простое число, *в* – составное число и *в* не делится на *а*, то *НОК* (*а*, *в*) = *а* · *в*.

Пример: *НОК* (7; 12) = 7 · 12 = 98.

Решение текстовызх задач с помощью НОД и НОК двух натуральных чисел

Задача 1. В наборе 185 бусинок лилового цвета и 111 бусинок бирюзового. Сколько браслетов для кукол можно сплести из одинакового числа бусин каждого цвета? Сколько бусин каждого цвета в браслете?

Решение.

1) *НОД* (185; 111) = *НОД* (111; 74) = *НОД* (74; 37) = *НОД* (37; 37) = 37 браслетов можно сплести;

Делимое	*Делитель*	*Частное*	*Остаток*
185	111	1	74
111	74	1	37
74	37	2	

2) 185 : 37 = 5 бусин лилового цвета;

3) 111 : 37 = 3 бусин бирюзового цвета.

Ответ: 37 браслетов, по 3 и 5 бусин.

Задача 2. Стол размером 480 см на 360 см решили декорировать разноцветными квадратными плитками. Коковы наибольшие размеры плитки? Сколько плиток надо?

Решение.

1) *НОД* (480; 360) = *НОД* (120 · 4; 120 · 3) = 120*НОД* (4; 3) = 120 (см) – наибольшие размеры плитки;

2) 480 · 360 = 172800 (см^2) – площадь стола;

3) 120 · 120 = 14400 (см^2) – площадь плитки;

4) 172800 : 14400 = 12 плиток надо.

Ответ: 12 плиток по 120 на 120 см.

Задача 3. Садовый участок размером 54 м на 48 м по периметру необходимо оградить забором, для этого через равные промежутки надо поставить бетонные столбцы.

Сколько столбцов необходимо привезти для участка, и на каком максимальном расстоянии друг от друга будут стоять столбцы?

Решение.

1) $2(54 + 48) = 204$ (м) = периметр участка;

2) *НОД* (54; 48) = *НОД* (48; 54 – 48) = *НОД* (48, 6) = 6 (м) – расстояние между столбцами;

3) 204 : 6 = 34 столбца.

Ответ: 34 столбца, на расстоянии 6 м.

Задача 1. Требуется изготовить ящик с квадратным дном для укладки коробок размером 16 см на 20 см. Какова должна быть наименьшаа длина стороны квадратного дна, чтобы уместить коробки в ящик вплотную?

Решение.

1) *НОК* (16; 20) = 4*НОК* (4; 5) = $4 \cdot 20 = 80$ коробок;

2) $16 \cdot 20 = 320$ (см^2) – площадь дна одной коробки;

3) $320 \cdot 80 = 25600$ (см^2) – площадь квадратного дна;

4) $x^2 = 25600$, $x = 160$ (см) – сторона квадратного дна.

Ответ: 160 см.

Задача 2 На столе лежат книги, число которых меньше, чем 20. Сколько лежит книг, если известно, что их можно связывать пачки по 3 и по 4 штук?

Решение.

x – количество книг, x [3, x [4.

x = *НОК* (3; 4) = 12.

Ответ: 12 книг лежит.

Задачи на наибольший общий делитель

Покажем, как применяются свойства наибольшего общего делителя двух натуральных чисел при решении задач повышенной трудности.

Задачи на нахождение НОД двух натуральных чисел

Покажем, как применяются свойства наибольшего общего делителя двух натуральных чисел при решении олимпиадных заданий.

Задача 1. Найти *НОД* $(2^{100} - 1;\ 2^{120} - 1)$.

Решение.

Обозначим *НОД* $(2^{100} - 1;\ 2^{120} - 1) =$ *НОД* $(2^{120} - 1;\ 2^{100} - 1) = n$.

Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$2^{120} - 1 = 2^{100} \cdot 2^{20} - 1 = \underline{2^{100} \cdot 2^{20} - 1} + \underline{2^{20} - 2^{20}} = 2^{20}(2^{100} - 1) + (2^{20} - 1)$, значит,

$n =$ *НОД* $(2^{100} - 1;\ 2^{20} - 1)$.

$2^{100} - 1 = \underline{2^{80} \cdot 2^{20} - 1} + \underline{2^{80} - 2^{80}} = 2^{80}(2^{20} - 1) + (2^{80} - 1)$, значит, $n =$ *НОД* $(2^{20} - 1;\ 2^{80} - 1) =$

$=$ *НОД* $(2^{80} - 1;\ 2^{20} - 1)$.

$2^{80} - 1 = \underline{2^{60} \cdot 2^{20} - 1} + \underline{2^{60} - 2^{60}} = 2^{60}(2^{20} - 1) + (2^{60} - 1)$, значит, $n =$ *НОД* $(2^{20} - 1;\ 2^{60} - 1) =$

$=$ *НОД* $(2^{60} - 1;\ 2^{20} - 1)$.

$2^{60} - 1 = \underline{2^{40} \cdot 2^{20} - 1} + \underline{2^{40} - 2^{40}} = 2^{40}(2^{20} - 1) + (2^{40} - 1)$, значит, $n =$ *НОД* $(2^{20} - 1;\ 2^{40} - 1) =$

$=$ *НОД* $(2^{40} - 1;\ 2^{20} - 1)$.

$2^{40} - 1 = \underline{2^{20} \cdot 2^{20} - 1} + \underline{2^{20} - 2^{20}} = 2^{20}(2^{20} - 1) + (2^{20} - 1)$, значит, $n =$ *НОД* $(2^{20} - 1;\ 2^{20} - 1) =$

$= 2^{20} - 1$.

Ответ: $2^{20} - 1$.

Задача 2. Найти *НОД* $(\underbrace{11\ldots11}_{100\ \text{единиц}};\ \underbrace{11\ldots11}_{60\ \text{единиц}})$.

Решение.

Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\underbrace{11\ldots11}_{100\text{ единиц}} = \underbrace{11\ldots11}_{60\text{ единиц}} \cdot \underbrace{10\ldots00}_{40\text{ единиц}} + \underbrace{11\ldots11}_{40\text{ единиц}}$$

$$\underbrace{11\ldots11}_{60\text{ единиц}} = \underbrace{11\ldots11}_{40\text{ единиц}} \cdot \underbrace{10\ldots00}_{20\text{ единиц}} + \underbrace{11\ldots11}_{20\text{ единиц}}$$

$$\underbrace{11\ldots11}_{40\text{ единиц}} = \underbrace{11\ldots11}_{20\text{ единиц}} \cdot \underbrace{10\ldots00}_{20\text{ единиц}} + \underbrace{11\ldots11}_{20\text{ единиц}}$$

Значит, *НОД* $(\underbrace{11\ldots11}_{100\text{ единиц}},\ \underbrace{11\ldots11}_{60\text{ единиц}}) = \underbrace{11\ldots11}_{20\text{ единиц}}$.

Ответ: $\underbrace{11\ldots11}_{20\text{ единиц}}$.

Задача 3. Натуральные числа *а* и *в* взаимно просты. Найти все значания *НОД* (*ав*; *а* + *в*).

Решение.

Т. к. числа *а* и *в* взаимно просты, то *НОД* (*а*; *в*) = 1. Значит, *НОД* (*а*; *а* + *в*) = 1 =

$= НОД\,(ав;\ а + в) = НОД\,(в;\ а + в) = НОД\,(а;\ в) = 1.$

Воспользовались свойствами: $НОД\,(а;\ в) = НОД\,(а;\ а + в)$; если $НОД\,(а;\ в) = 1$, то

$НОД\,(ас;\ в) = НОД\,(с;\ в)$; $НОД\,(а;\ в) = НОД\,(в;\ а + в)$.

Ответ: 1.

Задача 4. Натуральные числа $а$ и $в$ взаимно просты. Найти все значания

$НОД\,(а + в;\ а^2 – ав + в^2)$.

Решение.

Обозначим $НОД\,(а + в;\ а^2 – ав + в^2) = n = НОД\,(а^2 – ав + в^2;\ а + в)$. Воспользуемся свойством: если $а = вq + r$, $а, в, q, r$ – натуральные числа, то $НОД\,(а;\ в) = НОД\,(в;\ r)$.

$а^2 – ав + в^2 = (а + в)^2 – 3ав = (а + в)(а + в) – 3ав$, значит, $n = НОД\,(а + в;\ 3ав) =$

$= НОД\,(ав \cdot 3;\ а + в)$.

Воспользуемся тем, что, $НОД\,(ав;\ а + в) = 1$ (см. задачу 3) и свойством:

если $НОД\,(а;\ в) = 1$, то $НОД\,(ас;\ в) = НОД\,(с;\ в)$, получим: $НОД\,(ав \cdot 3;\ а + в) =$

$= НОД\,(3;\ а + в) = 1$ или 3.

Ответ: 1 или 3.

Задача 5. Найти все значания наибольшего общего делителя чисел $8р + 3$ и $5р + 2$, где $р$ – натуральное число.

Решение.

Воспользуемся свойством: $НОД\,(а;\ в) = НОД\,(а;\ а + в)$:

$НОД\,(8р + 3;\ 5р + 2) = НОД\,(5р + 2;\ 8р + 3) = НОД\,(5р + 2;\ 5р + 2 + 3р + 1) =$

$= НОД\,(5р + 2;\ 3р + 1) = НОД\,(3р + 1;\ 5р + 2) = НОД\,(3р + 1;\ 3р + 1 + 2р + 1) ==$

$= НОД\,(3р + 1;\ 2р + 1) = НОД\,(2р + 1;\ 3р + 1) = НОД\,(2р + 1;\ 2р + 1 + р) =$

$= НОД\,(2р + 1;\ р) = НОД\,(р;\ 2р + 1) = НОД\,(р;\ р + р + 1) = НОД\,(р;\ р + 1) =$

$= НОД\,(р;\ 1) = 1.$

Ответ: 1.

Задача 6. Натуральные числа $а$ и $в$ взаимно просты. Найти все значения наибольшего общего чисел $11а + 2в$ и $18а + 5в$.

Решение.

Обозначим *НОД* $(11a + 2в;\ 18a + 5в) = n$. По определению наибольшего общего делителя $(11a + 2в) \vdots n$, $(18a + 5в) \vdots n$. Тогда $18(11a + 2в) = (198a + 36в) \vdots n$,

$11(18a + 5в) = (198a + 55в) \vdots n$, $(198a + 55в - (198a + 36в)) = 19в \vdots n$.

$5(11a + 2в) = (55a + 10в) \vdots n$, $2(18a + 5в) = (36a + 10в) \vdots n$, $(55a + 10в - (36a + 10в)) =$

$= 19a \vdots n$. Т. к. числа a и $в$ взаимно просты, то $19 \vdots n$. Значит, $n = 1$, или $n = 19$.

Ответ: 1 или 19.

Мы создали викторину «Наибольший общий делитель двух натуральных чисел» в приложении Приложение

Задачи на сокращение дробей

Сокращение дроби гораздо проще ввыполнить, если найти наибольший общий делитель числителя и знаменателя. Покажем, как на основании свойств *НОД* чисел и с помощью алгоритма Евклида можно сокращать дроби.

Задача 1. На какое число и при каких натуральных значениях n сократима дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$?

Решение.

Способ 1. *НОД* $(12n + 1;\ 30n + 2) =$ *НОД* $(12n + 1;\ 18n + 1) =$ *НОД* $(12n + 1;\ 6n) =$ *НОД* $(6n;\ 6n + 1) =$ *НОД* $(6n;\ 1) = 1$, значит, дробь несократима.

Воспользовались свойствами: если $в > a$, то *НОД* $(a;\ в) =$ *НОД* $(a;\ в - a)$;

если $a > в$, то *НОД* $(a;\ в) =$ *НОД* $(в;\ a - в)$; *НОД* $(a;\ в) =$ *НОД* $(a;\ a + в)$.

Способ 2. Если дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ можно сократить на некоторое число, то и дробь $\dfrac{30n+2}{12n+1}$ также можно сократить на это же число.

$$\frac{30n+2}{12n+1} = 1 + \frac{18n+1}{12n+1} = 1 + 1 + \frac{6n}{12n+1} = 2 + \frac{6n}{12n+1}.$$

Если дробь $\dfrac{30n+2}{12n+1}$ сократима на некоторое число, то и дроби $\dfrac{6n}{12n+1}$ и $\dfrac{12n+1}{6n}$ сократимы на это же число. $\dfrac{12n+1}{6n}=1+\dfrac{6n+1}{6n}=2+\dfrac{1}{6n}$.

Всё зависит от того, сократима ли дробь $\dfrac{1}{6n}$, а дробь $\dfrac{1}{6n}$ несократима.

Ответ: дробь несократима.

Таким образом, используя свойства наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, можно быстрее сокращать дробь.

Задача 2. На какое число и при каких натуральных значениях *n* сократима дробь $\dfrac{2n+5}{3n+4}$?

Решение.

НОД $(2n + 5; 3n + 4)$ = *НОД* $(2n + 5; 2n + 5 + n - 1)$ = *НОД* $(2n + 5; n - 1)$ =

= *НОД* $(n - 1) \cdot 2 + 7; n - 1)$ = *НОД* $(n - 1; 7) = 1$ или 7. Значит, если данная дробь сократима, то только на 7. Найдём все натуральные значения *n*, при которых дробь сократима на 7.

Дробь сократима на 7 при $n = 1$, $n = 8$, $n = 15$, $n = 22$ и т. д. Общий вид таких значений

$n = 1 + 7к$, $к = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Воспользовались свойствами: *НОД* $(a; в)$ = *НОД* $(a; a + в)$; если $a = вq + r$, $a, в, q, r$ – натуральные числа, то *НОД* $(a; в)$ = *НОД* $(вq + r; в)$ = *НОД* $(в; r)$.

Ответ: на 7 при $n = 1 + 7к$, $к = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Задача 3. На какое число и при каких натуральных значениях *n* сократима дробь $\dfrac{4n^3+7n^2+4n+3}{4n^2+7n}$?

Решение.

Воспользуемся алгоритмом Евклида.

Обозначим *НОД* $(4n^3 + 7n^2 + 4n + 3,\ 4n^2 + 7n) = p$.

$$
-\begin{array}{r|l}
4n^3 + 7n^2 + 4n + 3 & 4n^2 + 7n \\ \cline{2-2}
4n^3 + 7n^2 & n \\ \cline{1-1}
4n + 3 &
\end{array}
\qquad\qquad
-\begin{array}{r|l}
4n^2 + 7n & 4n + 3 \\ \cline{2-2}
4n^2 + 3n & n \\ \cline{1-1}
4n &
\end{array}
$$

Значиит, $p =$ *НОД* $(4n^2 + 7n;\ 4n + 3) =$ *НОД* $(4n + 3; 4n) =$ *НОД* $(4n; 3) = 1$ или 3.

Значит, если данная дробь сократима, то только на 3. Найдём все натуральные значения n, при которых дробь сократима на 3.

Дробь сократима на 3 при $n = 3$, $n = 6$, $n = 9$, $n = 12$ и т. д. Общий вид таких значений

$n = 3к$, $к =$, 1, 2, 3, … .

Ответ: на 3 при $n = 3к$, $к =$, 1, 2, 3, … .

Задача 4. На какое число и при каких натуральных значениях n сократима дробь $\frac{n^2+1}{n+1}$?

Решение.

Обозначим *НОД* $(n^2 + 1; n + 1) = p$.

Воспользуемся свойством: если $a = вq+r$, a, $в$, q, r – натуральные числа, то *НОД* $(a, в) = =$ *НОД* $(вq + r; в) =$ *НОД* $(в; r)$.

$n^2 + 1 = (n + 1) \cdot n + 1 - n$. Значит, $p =$ *НОД* $(n + 1; 1 - n)$.

Воспользуемсмя свойством: *НОД* $(a; в) =$ *НОД* $(a; a + в)$.

$p =$ *НОД* $(n + 1; 1 - n) =$ *НОД* $(n + 1; n + 1 + 1 - n) =$ *НОД* $(n + 1; 2) = 1$ или 2.

Значит, если данная дробь сократима, то только на 2. Найдём все натуральные значения n, при которых дробь сократима на 2.

Дробь сократима на 2 при $n = 1$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 7$ и т. д. Общий вид таких значений

$n = 2к + 1$, $к = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ответ: на 2 при $n = 2к + 1$, $к = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Задача 5. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\dfrac{9m+7n}{3m+2n}$, если известно, что числа m и n взаимно просты?

Решение.

Воспользуемся свойствами: если $a > в$, то $НОД\,(a;\,в) = НОД\,(в;\,a - в)$; если $в > a$, то $НОД\,(a;\,в) = НОД\,(a;\,в - a)$.

$НОД\,(9m + 7n;\,3m + 2n) = НОД\,(3m + 2n;\,6m + 5n) = НОД\,(3m + 2n;\,3m + 3n) =$

$= НОД\,(3m + 2n;\,n)$.

Воспользуемся свойством: если $a = вq + r$, $a, в, q, r$ – натуральные числа, то $НОД\,(a;\,в) = = НОД\,(вq + r;\,в) = НОД\,(в;\,r)$.

$НОД\,(3m + 2n;\,n) = НОД\,(n \cdot 2 + 3m;\,n) = НОД\,(n;\,3m) = НОД\,(3m;\,n)$. Т. к. числа m и n взаимно просты, то $НОД\,(m;\,n) = 1$.

Воспользуемся свойством: если $НОД\,(a;\,в) = 1$, то $НОД\,(ac;\,в) = НОД\,(c;\,в)$

$НОД\,(3m;\,n) = НОД\,(m \cdot 3;\,n) = НОД\,(3;\,n) = 1$ или 3.

Значит, если данная дробь сократима, то только на 3.

Ответ: на 3.

Задачи на доказательство

Задача 1. Доказать, что наибольший общий делитель любых двух последовательных чётных натуральных чисел равен 2.

Доказательство.

Ваоспользуемся свойствами: $НОД\,(am;\,вm) = mНОД\,(a;\,в)$; $НОД\,(a;\,в) =$

$= НОД\,(a;\,a + в)$. $НОД\,(2n;\,2n + 2) = 2НОД\,(n;\,n + 1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Задача 2. Доказать, что $НОД\,(5a + 3в;\,13a + 8в) = НОД\,(a;\,в)$.

Доказательство.

Воспользуемся свойством: если $a = вq + r$, $a, в, q, r$ – натуральные числа, то $НОД\,(a;\,в) = НОД\,(вq + r;\,в) = НОД\,(в;\,r)$.

$13a + 8в = (5a + 3в) \cdot 2 + 3a + 2в$,

$5a + 3в = (3a + 2в) \cdot 1 + 2a + в,$

$3a + 2в = (2a + в) \cdot 1 + a + в.$

НОД $(5a + 3в; 13a + 8в) =$ НОД $(13a + 8в; 5a + 3в) =$ НОД $(2a + в; a + в) =$

$=$ *НОД* $(a + в; 2a + в) =$ *НОД* $(a + в; a + в + a) =$ *НОД* $(a + в; a) =$ *НОД* $(a; в)$.

Задача 3. Доказать, что при любом натуральном значении n числа $n^5 + 4n^3 + 3n$ и $n^4 +$ $+ 3n^2 + 1$ взаимно просты.

Доказательство.

Воспользуемся алгоритмом Евклида.

$$-\begin{array}{l|l} n^5 + 4n^3 + 3n & n^4 + 3n^2 + 1 \\ \cline{2-2} n^5 + 3n^3 + n & n \\ \cline{1-1} \quad n^3 + 2n & \end{array} \qquad -\begin{array}{l|l} n^4 + 3n^2 + 1 & n^3 + 2n \\ \cline{2-2} n^4 + 2n^2 & n \\ \cline{1-1} \quad n^2 + 1 & \end{array}$$

$$-\begin{array}{l|l} n^3 + 2n & n^2 + 1 \\ \cline{2-2} n^3 + n & n \\ \cline{1-1} \quad n & \end{array} \qquad -\begin{array}{l|l} n^2 + 1 & n \\ \cline{2-2} n^2 & n \\ \cline{1-1} \quad 1 & \end{array}$$

$$-\begin{array}{l|l} n & 1 \\ \cline{2-2} n & n \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

НОД $(n^5 + 4n^3 + 3n; n^4 + 3n^2 + 1) =$ *НОД* $(n^4 + 3n^2 + 1; n^3 + 2n) =$

$=$ *НОД* $(n^3 + 2n; n^2 + 1) =$ *НОД* $(n^2 + 1; n) =$ *НОД* $(n; 1) = 1$.

Задача 4. Доказать, что если *НОД* $(a; в) = 1$, то *НОД* $(a + в; a^2 + в^2) = 1$ или 2.

Доказательство.

Обозначим *НОД* $(a + в; a^2 + в^2) =$ *НОД* $(a^2 + в^2; a + в) = p$.

$a^2 + в^2 = (a + в)^2 - 2aв = (a + в)(a + в) - 2aв.$

Воспользуемся свойствами: если $a = вq + r$, $a, в, q, r$ – натуральные числа, то *НОД* $(a; в) =$ $=$ *НОД* $(вq + r; в) =$ *НОД* $(в; r)$; *НОД* $(a; -в) =$ *НОД* $(a; в)$.

$p =$ *НОД* $((a + в)(a + в) - 2aв; a + в) =$ *НОД* $(a + в; -2aв) =$ *НОД* $(a + в; 2aв)$.

НОД $(ав;\ а + в) = 1$ (см. задачу 3 из раздела «Задачи на нахождение *НОД* двух натуральных чисел»).

Воспользуемся свойством: если *НОД* $(а; в) = 1$, то *НОД* $(ас; в)$ = *НОД* $(с; в)$.

НОД $(а + в; 2ав)$ = *НОД* $(ав \cdot 2; а + в)$ = *НОД* $(2; а + в) = 1$ или 2.

Задача 5. Доказать, что если $а – в = 2$ и числа $а$ и $в$ не являются взаимно простыми, то *НОД* $(а; в) = 2$.

Доказательство.

По условию задачи $а – в = 2$, $а = в + 2$, *НОД* $(а; в) = 2$, *НОД* $(в + 2; в)$ = *НОД* $(2; в) =$
$= 2$.

Уравнения, содержащие НОД чисел и их системы

Задача 1. Решить уравнение *НОД* $(x; 8) = 4$.

Решение.

По определению наибольшего общего делителя $x \vdots 4$, $8 \vdots 4$.

На 4 делятся числа 4, 8, 12, 16, … .

НОД $(4; 8) = 4$, *НОД* $(12; 8) = 4$*НОД* $(3; 2) = 4$, *НОД* $(20; 8) =4$*НОД* $(5; 2) = 4$,

НОД $(28; 8) = 4$*НОД* $(7; 2) = 4$, *НОД* $(36; 8) = 4$*НОД* $(9; 2) = 4$, *НОД* $(44; 8) = 4$*НОД* $(11; 2) = 4$.

$4 = 2 \cdot 2 \cdot 1$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$, $44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$.

Значит, $x = 2 \cdot 2 \cdot n$, $n = 2к + 1$, $к = 0, 1, 2, 3$ … .

$x = 4(2к + 1)$, $к = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ответ: $x = 4(2к + 1)$, $к = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Задача 2. Решить уравнение *НОД* $(x; 8) = x – 10$.

Решение.

По определению наибольшего общего делителя $x \vdots x – 10$, $8 \vdots x – 10$.

8 делится на 1, 2, 4, 8. Осуществим перебор вариантов:

$x – 10 = 1$, $x = 11$, НОД $(11; 8) = 1$, $11 – 10 = 1$;

$x - 10 = 2$, $x = 12$, НОД (12; 8) = 4, 12 – 10 = 2;

$x - 10 = 4$, $x = 14$, НОД (14; 8) = 2, 14 – 10 = 4;

$x - 10 = 8$, $x = 18$, НОД (18; 8) = 2, 18 – 10 = 8.

Ответ: $x = 11$.

Задача 3. Найти все пары натуральных чисел, сумма которых равна 288, а наибольший общий делитель – 36.

Решение.

Пусть a и $в$ – искомые натуральные числа. По условию задачи составим и решим систему уравнений $\begin{cases} a + в = 288, \\ НОД(a; в) = 36. \end{cases}$

По определению наибольшего общего делителя $a = 36к$, $в = 36n$, $к$ и n – взаимно простые числа. Значит $36к + 36n = 288$, $к + n = 8$.

1) $к = 7$, $n = 1$, тогда $a = 252$, $в = 36$; 2) $к = 1$, $n = 7$, тогда $a = 36$, $в = 252$;

3) $к = 5$, $n = 3$, тогда $a = 180$, $в = 108$; 4) $к = 3$, $n = 5$, тогда а = 108, $в = 180$.

Ответ: (252; 36), (36; 252), (180; 108), (108; 180).

Задача 4. Найти все пары натуральных чисел, произведение которых равно 8400, а наибольший общий делитель – 20.

Решение.

Пусть a и $в$ – искомые натуральные числа. По условию задачи составим и решим систему уравнений $\begin{cases} aв = 8400, \\ НОД(a; в) = 20. \end{cases}$

По определению наибольшего общего делителя $a = 20к$, $в = 20n$, $к$ и n – взаимно простые числа. Значит $400кn = 8400$, $кn = 21$.

1) $к = 3$, $п = 7$, тогда $а = 20$, $в = 140$; 2) $к = 7$, $п = 3$, тогда $а = 140$, $в = 20$;

3) $к = 1$, $п = 21$, тогда $а = 20$, $в = 420$; 4) $к = 21$, $п = 1$, тогда $а = 420$, $в = 20$.

Ответ: (20; 140), (140; 20), (20; 420), (420; 20).

Задачи на наименьшее общее кратное

Покажем, как применяются свойства наибольшего общего делителя двух натуральных чисел при решении задач повышенной трудности.

Задачи на нахождение НОК двух натуральных чисел

Задача 1. Найти *НОК* (n; $n + 3$).

Решение.

Воспользуемся свойством $НОК(a;в) = \dfrac{ав}{НОД(a;в)}$.

НОД (n; $n + 3$) = *НОД* (n; 3) = 1 или 3. Если n не делится на 3, то *НОД* (n; $n + 3$) = 1; если n делится на 3, то *НОД* (n; $n + 3$) = 3.

Значить, если n не делится на 3, то $НОК(n; n+3) = n(n+3);$ если n делится на 3, то $НОК(n; n+3) = \dfrac{n(n+3)}{3}$.

Ответ: если n не делится на 3, то $НОК(n; n+3) = n(n+3);$ если n делится на 3, то $НОК(n; n+3) = \dfrac{n(n+3)}{3}$.

Задача 2. Найти *НОК* ($n + 4$; $n + 6$).

Решение.

Воспользуемся свойством $НОК(a;в) = \dfrac{ав}{НОД(a;в)}$.

НОД ($n+4$; $n+6$) = *НОД* ($n+4$; 2) = 1 или 2. Если n нечётно, то *НОД* ($n+4$; $n+6$) = 1; если n чётно, то *НОД* ($n+4$; $n+6$) = 2.

Значить, если n нечётно, то $НОК(n+4;n+6)=(n+4)(n+6)$; если n чётно то $НОК(n+4;n+6)=\dfrac{(n+4)(n+6)}{2}$.

Ответ: если n нечётно, то $НОК(n+4;n+6)=(n+4)(n+6)$; если n чётно, то $НОК(n+4;n+6)=\dfrac{(n+4)(n+6)}{2}$.

Задача 3. Найти *НОК* ($3n$; $3n+6$).

Решение.

Воспользуемся свойством $НОК(a;в)=\dfrac{aв}{НОД(a;в)}$.

НОД ($3n$, $3n+6$) = 3*НОД*(n, $n+2$) = 3*НОД*(n, 2). Если n нечётно, то 3*НОД* (n, 2) = 3, если n чётно, то 3*НОД* (n, 2) = 6.

Значить, если n нечётно, то $НОК(3n;3n+6)=\dfrac{3n(3n+6)}{3}=\dfrac{9n(n+2)}{3}=3n(n+2)$ если n чётно то $НОК(3n;3n+6)=\dfrac{9n(n+2)}{6}=\dfrac{3n(n+2)}{2}$.

Ответ: если n нечётно, то $НОК(3n;3n+6)=3n(n+2)$ если n чётно то $НОК(3n;3n+6)=\dfrac{3n(n+2)}{2}$.

Задачи с числами

Задача 1. Натуральное число при делении на 2, 3 даст в остатке соответственно 1, 2. Найти наименьшее такое число и общий вид таких чисел.

Решение.

Пусть a – искомое число. Т. к. число a при делении на 2 даст остаток 1, то

$a = 2 \cdot в + 1$, $в$ – натуральное число. Т. к. число a при делении на 3 даст остаток 2, то $a =$ $= 3 \cdot c + 2$, c – натуральное число.

$a + 1 = 2в + 2 \vdots 2$, $a + 1 = 3c + 3 \vdots 3$. По определению наименьшего общего кратного $a + 1 = НОК\ (2; 3) = 6$, $a = 5$ – наименьшее число, которое при делении на 2, 3 даст соответственно остатки 1 и 2.
Находим общий вид таких чисел: $НОК\ (2n; 3n) = nНОК\ (2; 3) = 6n$. $a + 1 = 6n$, $a = 6n - 1$, n – натуральное число.
Ответ: $6n - 1$, n – натуральное число.

Задача 2. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 и 11 даст соответственно отсатки 5 и 9.

Решение.

Пусть a – искомое число. Т. к. число a при делении на 7 и 11 даст соответственно отстатки 5 и 9, то $a = 7в + 5$, $a = 11c + 9$, $в$ и c – натуральные числа.

$a + 2 = 7в + 7$ делится на 7, $a + 2 = 11c + 11$ делится на 11. По определению наименьшего общего кратного $a + 2 = НОК\ (7; 11) = 77$, $a = 77 - 2 = 75$.

Ответ: 75.

Задача 3. Найти все пары натуральных взаимно простых чисел, меньших 225, наименьшее общее кратное которых равно 225.

Решение.

Пусть a и $в$ – искомые взаимно простые числа. Тогда $НОК\ (a; в) = aв$.

$aв = 225 = 3^2 \cdot 5^2$. $НОК\ (9; 25) = 225$, $НОК\ (3; 75) = 75$; $НОК\ (5; 45) = 45$; $НОК\ (15; 15) =$ $= 15$.

Ответ: 9 и 25.

Задача 4. Натуральное число при делении на 4 даст остаток 3, при делении на 5 даст остаток 4 а на 7 делится без остатка. Найти наименьшее такое число.

Решение.

Пусть a – искомое число. Т. к. число a при делении на 4 даст отстаток 3, при делении на 5 даст остаток 4, а на 7 делится без остатка, то $a = 4в + 3$, $a = 5c + 4$, $a = 7p$, $в$, c и p– натуральные числа.

$a + 1 = 4в + 4$ делится на 4, $a + 1 = 5c + 5$ делится на 5. По определению наименьшего общего кратного $a + 1 = НОК\ (4; 5) = 20$, $a = 19$. Общий вид чисел, ктоторые при делении на 4 и 5 дают соответственно остатки 4 и 5 равен $НОК\ (4n; 5n) = 20n$, $a + 1 = 20n$, $a = 20n – 1$, n – натуральное число. По условию задачи $20n – 1$ должно делится на 7.

При $n = 6$ $a = 20n – 1 = 119$ делится на 7.

Ответ: 119.

Задача 5. Может ли наименьшее общее кратное двух чисел равняться их сумме?

Решение.

Пусть существуют такие x и y, что $НОК\ (x; y) = x + y$. Обозначим $НОК\ (x; y) = m$, тогда m делится на x и m делится на y, $x + y$ делится на x и $x + y$ делится на y. Т. к. $x + y$ делится на x, то y делится на x. Т. к. $x + y$ делится на y, то x делится на y. Т. к. x делится на y и y делится на x, то $x = y$. $НОК\ (x; y) = x + y$, $НОК\ (x; x) = x \neq x + x = 2x$ противоречит условию задачи.

Ответ: не может.

Уравнения, содержащие НОК чисел и их системы

Задача 1. Решить уравнение $НОК\ (x; 6) = 18$.

Решение.

По определению наименьшего общего кратного x [18, 6 [18.

18 делится на 1, 2, 3, 6, 9, 18.

$НОК\ (1; 6) = 6 \neq 18$; $НОК\ (2; 6) = 6 \neq 18$; $НОК\ (3; 6) = 6 \neq 18$; $НОК\ (9; 6) = 18$;

$НОК\ (18; 18) = 18$.

Ответ: 9; 18.

Задача 2. Решить уравнение $НОК\,(x;\,8) = 9x - 9$.

Решение.

По определению наименьшего общего кратного $x \vdots 9x - 9$, $8 \vdots 9x - 9$.

Обозначим $НОК\,(x;\,8) = m$, тогда $m \vdots x$, $m \vdots 8$. На 8 делятся числа 8, 16, 24, 32, 40, 48, … .

Воспользуемся свойством $$НОК(a;в) = \frac{aв}{НОД(a;в)}.$$

$$НОК(x;8) = \frac{8x}{НОД(x;8)}.$$

$НОД\,(x;\,8)$ может быть равен 1, 2, 4 и 8. Тогда $НОК\,(x;\,8)$ может быть равен $8x$, $4x$, $2x$ и x.

1) $8x = 9x - 9$, $x = 9$; 2) $4x = 9x - 9$, $x = 9/5$; 3) $2x = 9x - 9$, $x = 9/7$; 4) $x = 9x - 9$, $x = 1{,}125$.

Ответ: 9.

Задача 3. Решить систему $$\begin{cases} a : в = 5 : 7, \\ НОК(a;в) = 140. \end{cases}$$

Решение.

$a = 5n$, $в = 7n$, тогда $НОК\,(a;\,в) = НОК\,(5n;\,7n) = nНОК\,(5;\,7) = 35n = 140$,

$n = 4$. Значит, $a = 20$, $в = 28$.

Ответ: (20; 28).

Задача 4. Найти все пары натуральных чисел, произведение которых равно 40, а наименьшее общее кратное – 20.

Решение.

Пусть a и $в$ – искомые натуральные числа. По условию задачи составим и решим систему уравнений $\begin{cases} ав = 40, \\ НОК(a; в) = 20. \end{cases}$

$$НОК(a;в) = \frac{ав}{НОД(a;в)} = \frac{40}{НОД(a;в)} = 20,$$

$20НОД\ (a;\ в) = 40$, $НОД\ (a;\ в) = 2$, $a = 2к$, $в = 2n$, $к$ и n взаимно простые числа.

$НОК\ (a;\ в) = НОК\ (2к;\ 2n) = 2НОК\ (к;\ n) = 20$, $НОК\ (к;\ n) = 10$. Т. к. к и п взаимно простые числа, то $НОК\ (к;\ n) = кn$, $кn = 10$,

1) $к = 1$, $n = 10$, тогда $a = 2$, $в = 20$; 2) $к = 10$, $n = 1$, тогда $a = 20$, $в = 2$;

3) $к = 2$, $n = 5$, тогда $a = 4$, $в = 10$; 4) $к = 5$, $n = 4$, тогда $a = 10$, $в = 4$.

Ответ: (2; 20), (20; 2), (4; 10), (10; 4).

Совместные задачи на наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Задача 1. Найти наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{21}{25}$ и $\frac{14}{15}$ получаются натуральные числа.

Решение.

Обозначим искомую дробь $\frac{a}{в}$, где a и $в$ взаимно простые числа.

$\frac{a}{в} : \frac{21}{25} = \frac{25a}{21в}$, $\frac{a}{в} : \frac{14}{15} = \frac{15a}{14в}$. Т. к. $\frac{25a}{21в}$ и $\frac{15a}{14в}$ - натуральные числа, то $25a \vdots 21в$, $15a \vdots 14в$,

$25a = 21вn$, $15a = 14вm$, n и m – натуральные числа. $вn = \frac{25a}{21}$, $вm = \frac{15a}{14}$, $21n = \frac{25a}{в}$, $14m = \frac{15a}{в}$. Т. к. a и $в$ взаимно простые числа, то получим, что $a \vdots 21$ и $a \vdots 14$, $25 \vdots в$, $15 \vdots в$.

Значит, $a = НОК\,(21; 14) = 3НОК\,(7; 2) = 3 \cdot 14 = 42$, $в = НОД\,(25; 15) = 5НОД\,(5; 3) = 5$.

Значит, искомая дробь равна $\frac{a}{в} = \frac{42}{5}$.

Ответ: $\frac{42}{5}$.

Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} НОД(a;в) = 13, \\ НОК(a;в) = 1989. \end{cases}$

Решение.

$НОК(a;в) = \frac{aв}{НОД(a;в)} = \frac{aв}{13}$. Т. к. $НОД\,(a; в) = 13$, то $a \vdots 13$, $в \vdots 13$, $a = 13x$, $в = 13y$, где x и y – взаимно простые числа. Тогда $НОК(a;в) = \frac{13x \cdot 13y}{13} = 13xy$, $13xy = 1989$, $xy = 153$.

Имеем систему: $\begin{cases} a = 13x, \\ в = 13y, \\ НОД(x;y) = 1, \\ xy = 153. \end{cases}$

1) $153 = 153 \cdot 1$. $НОД\,(153; 1) = 1$. Тогда $a = 13 \cdot 1 = 13$, $в = 13 \cdot 153 = 1989$, или $a = 13 \cdot 153 = 1989$, $в = 13 \cdot 1 = 13$.

2) $153 = 9 \cdot 17$. $НОД\,(9; 17) = 1$. Тогда $a = 13 \cdot 9 = 117$, $в = 13 \cdot 17 = 221$, или $a = 13 \cdot 17 = 221$, $в = 13 \cdot 9 = 117$.

3) $153 = 3 \cdot 51$. $НОД\,(3; 51) = 3НОД\,(1; 17) = 3 \neq 1$.

Ответ: (13; 1989), (1989; 13), (117; 221), (221; 117).

Задача 3. Сколько пар натуральных чисел $(a; в)$, где $a \le в$, удовлетворяет равенству $НОК\,(a; в) = НОД\,(a; в) + 10$?

Решение.

Обозначим $НОД\,(a; в) = n$, тогда $a \vdots n$, $в \vdots n$, $a = nк$, $в = nm$, $к$ и m взаимно простые числа.

$НОК(a;в) = \frac{aв}{НОД(a;в)} = \frac{кn \cdot mn}{n} = nкm$, значит $НОК\,(a; в) \vdots n$. $НОК\,(a; в) = n + 10$, значит,

$(n + 10) \vdots n$, $n \vdots n$, $10 \vdots n$. 10 делится на 1, 2, 5, 10. $НОК(а;в)=\dfrac{ав}{n}=n+10,$

1) $n = 1$, $ав = 11$. Тогда $а = 1$, $в = 11$. т. к. $а \le в$. $НОК\,(1;\,11) = 11 = НОД\,(1;\,11) + 10 = 11$.

2) $n = 2$, $ав = 24$. Тогда:

а) $а = 1$, $в = 24$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(1;\,24) = 24 \ne НОД\,(1;\,24) + 10$;

б) $а = 2$, $в = 12$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(2;\,12) = 12 = НОД\,(2;\,12) + 10 = 2 + 10 = 12$;

в) $а = 3$, $в = 8$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(3;\,8) = 24 \ne НОД\,(3;\,8) + 10 = 1 + 10 = 11$;

г) $а = 4$, $в = 6$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(4;\,6) = 12 = НОД\,(4;\,6) + 10 = 2 + 10 = 12$.

3) $n = 5$, $ав = 75$. Тогда:

а) $а = 1$, $в = 75$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(1;\,75) = 75 \ne НОД\,(1;\,75) + 10 = 11$;

б) $а = 3$, $в = 25$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(3;\,25) = 75 \ne НОД\,(3;\,25) + 10 = 11$;

в) $а = 5$, $в = 15$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(5;\,15) = 15 = НОД\,(5;\,15) + 10 = 15$.

4) $n = 10$, $ав = 200$. Тогда:

а) $а = 1$, $в = 200$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(1;\,200) = 200 \ne НОД\,(1;\,200) + 10 = 11$;

б) $а = 2$, $в = 100$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(2;\,100) = 100 \ne НОД\,(2;\,100) + 10 = 12$;

в) $а = 4$, $в = 50$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(4;\,50) = 200 \ne НОД\,(4;\,50) + 10 = 11$;

г) $а = 5$, $в = 40$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(5;\,40) = 40 \ne НОД\,(5;\,40) + 10 = 15$;

д) $а = 10$, $в = 20$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(10;\,20) = 20 = НОД\,(10;\,20) + 10 = 30$;

е) $а = 20$, $в = 20$, т. к. $а \le в$. $НОК\,(20;\,20) = 20 \ne НОД\,(20;\,20) + 10 = 30$.

Ответ: 5 пар.

Задача 4. Существуют ли такие два натуральных числа $а$ и $в$, у которых $НОД(а;\,в) = 110$, а $НОД\,(а;\,в) = 2000$?

Решение.

Т. к. $НОД(а;\,в) = 110$, то $а \vdots 110$, $в \vdots 110$, $а = 110n$, $в = 110m$, n и m взаимно простые числа. $НОК(а;в)=\dfrac{ав}{НОД(а;в)}=\dfrac{110n\cdot110m}{110}=110nm.$

$110nm = 2000$. Т. к. 2000 не делится на 110, то чисел $а$ и $в$, у которых $НОД\,(а;\,в) = 110а$, $НОК\,(а;\,в) = 2000$, не существует.

Задача 5. Найти все пары натуральных чисел $а$ и $в$ таких, длля которых верно равенство $НОК(а;в)-НОД(а;в)=\dfrac{ав}{5}.$

Решение.

Воспользуемся тем, что $НОК\,(а;\,в)$ делится на $НОД\,(а;\,в)$ и $НОК(а;в)=\dfrac{ав}{НОД(а;в)}.$

Обозначим *НОД* (a; $в$) = n. Тогда $НОК(a;в)=\frac{ав}{n}$. *НОК* (a; $в$) $\vdots$ n, значит, *НОК* (a; $в$) = $кn$, $к$ – натуральное число. По условию задачи имеем: $кn-n=\frac{кn\cdot n}{5}$, $5кn-5n=кn^2$, $5n(к-1)=$ $=кn^2$, $5(к-1)=кn$, $5к-кn=5$, $к(5-n)=5$. Т. к. $к$ и n натуральные числа, то $к=5$, $n=4$.

Значит, *НОД* (a; $в$) = 4, *НОК* (a, $в$) = 20, *НОД* (4; 20) = 4, *НОК* (4; 20) = 20, $a=4$, $в=20$, $20-4=\frac{4\cdot 20}{5}=16$.

Ответ: (4; 20).

Задача 6. Натуральные числа m и n таковы, что *НОК* (m; n) + *НОД* (m; n) = $m+n$. Доказать, что одно из чисел m или n делится на другое.

Доказательство.

Обозначим *НОД* (m; n) = d, тогда $m \vdots d$, $n \vdots d$, $m=xd$, $n=yd$, x и y взаимно простые числа.

$НОК(m;n)=\frac{mn}{НОД(m;n)}=\frac{xd\cdot yd}{d}=xyd$. *НОК* ($m$; n) + *НОД* (m; n) = $m+n$ $\Leftrightarrow$ $xyd+d=xd+yd$,

$d(xy+1)=d(x+y)$, $\underline{xy}+1-\underline{x}-y=0$, $x(y-1)-1(y-1)=0$, $(x-1)(y-1)=0$, $x=1$ или $y=1$.

Если $x=1$, то $m=d$, *НОД* (m; n) = m, значит n делится на m. Если $y=1$, то $n=d$, *НОД* (m; n) = n, значит m делится на n.

Задача 7. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел в 8 раз меньше их наименьшего общего кратного. Доказать, что одно из этих чисел делится на другое.

Доказательство.

НОД (a; $в$) < *НОК* (a; $в$) в 8 р $\Leftrightarrow$ *НОК* (a; $в$) > *НОД* (a; $в$) в 8 р.

Значит, *НОК* (a; $в$) = 8*НОД* (a; $в$). Обозначим *НОД* (a; $в$) = d. Тогда $a \vdots d$, $в \vdots d$, $a=md$, $в=nd$, m и n взаимно простые числа. $НОК(a;в)=\frac{ав}{НОД(a;в)}=\frac{md\cdot nd}{d}=mnd$, Имеем: $mnd = 8d$, $mn = 8$. Т. к. m и n взаимно простые числа, то $m = 1$, $n = 8$, или $m = 8$, $n = 1$.

1) Если $m = 1$, $n = 8$, то $a = d$, $в = 8d$, $в$ делится на a.

2) Если $m = 8$, $n = 1$, то $a = 8d$, $в = d$, a делится на $в$.