BÀI 19. TÍNH NHANH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

[redacted]

Để tính giá trị 1 tích phân xác định ta sử dụng lệnh y

[redacted]

VD1-[Câu 25 đề minh họa 2017] Tính giá trị tính phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x dx$

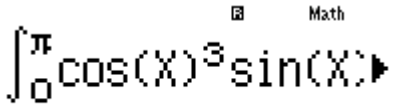
A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ **B.** $-\pi^4$ **C.** 0 **D.** $-\frac{1}{4}$

GIẢI

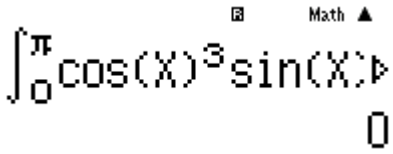
❖ **Cách 1 : CASIO**

- Vì bài toán liên quan đến các đại lượng tính π nên ta chuyển máy tính về chế độ Radian
  qw4
- Gọi lệnh tính giá trị tích phân
  y

Điền hàm $f(x)=\cos^3 x.\sin x$ và các cận 0 và π vào máy tính Casio
kQ))^3$jQ))R0EqK



Rồi nhấn nút = ta nhận được ngay kết quả của tích phân là 0



- So sánh với các đáp án **A**, **B**, **C**, **D** thì ta thấy **C** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Đặt $t = \cos x$ khi đó $\cos^3 x = t^3$
- Vi phân 2 vế phương trình ẩn phụ $\cos x = t \Leftrightarrow (\cos x)'dx = t'dt \Leftrightarrow -\sin x dx = dt$
- Đổi cận dưới : $x = 0$ khi đó $t = \cos 0 = 1$

  Đổi cận trên : $x = \pi$ khi đó $t = \cos \pi = -1$
- Lúc này tích phân phức tạp ban đầu đã trở thành tích phân đơn giản

$$I = -\int_1^{-1} t^3 dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_1^{-1} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Có 10 phép đặt ẩn phụ tính nguyên hàm tích phân. Bài toán trên có tính chết của phép số 2 : "nếu tích phân chứa cụm $\sin x dx$ thì đặt ẩn phụ $\cos x = t$ "
- Trong thực tế học tập, việc đổi vi phân (đổi đuôi) thường bị các bạn lãng quên , chúng ta chú ý điều này.

PHỤ LỤC : 10 PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ THƯỜNG GẶP

❖ **Phương pháp đặt ẩn phụ** thường dùng để đưa 1 tích phân phức tạp, khó tính trở về một tích phân đơn giản, dễ tính hơn. Sau đây là 10 phép đặt ẩn phụ với 10 dấu hiệu khác nhau thường gặp.

- **Phép 1** : Nếu xuất hiện căn thức thì đặt cả căn bằng t
- **Phép 2** : Nếu xuất hiện cụm $\sin x dx$ thì đặt $\cos x = t$
- **Phép 3** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{\cos^2 x}dx$ thì đặt $\tan x = t$
- **Phép 4** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{\sin^2 x}dx$ thì đặt $\cot x = t$
- **Phép 5** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{x}dx$ thì đặt $\ln x = t$
- **Phép 6** : Nếu xuất hiện $e^x dx$ thì đặt $e^x = t$
- **Phép 7** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{x^2 + a^2}dx$ thì đặt $x = \tan t$
- **Phép 8** : Nếu xuất hiện cụm $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = a\sin t$
- **Phép 9** : Nếu xuất hiện cụm $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì đặt $x = \frac{a}{\cos t}$
- **Phép 10** : Nếu xuất hiện biểu thức trong hàm $\ln, \log, e...$ thì đặt cả biểu thức là t

❖ **Việc đặt ẩn phụ thường tiến hành theo 3 bước**

- **Bước 1** : Đặt ẩn phụ theo dấu hiệu
- **Bước 2** : Vi phân 2 vế phương trình ẩn phụ để đổi đuôi
- **Bước 3** : Đổi cân dưới và cận trên sau đó thế tất cả 3 đại lượng trên vào tích phan ban đầu để tạo thành một tích phân đơn giản hơn.

VD2-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Tính tích phân $I=\int_1^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$

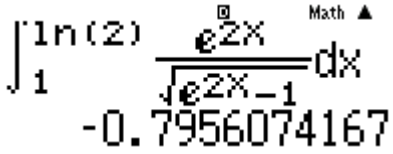
A. $\sqrt{3}-\sqrt{e^2-1}$ **B.** $2\sqrt{\ln 2-1}$ **C.** $\sqrt{\ln^2 2-1}$ **D.** Cả 3 đáp án trên đều sai

GIẢI

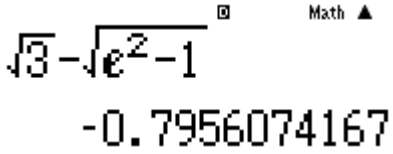
❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi lệnh tính giá trị tích phân y

- Điền hàm $f(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ và các cận 1 và $\ln 2$ vào máy tính Casio Rồi nhấn nút = ta nhận được ngay kết quả của tích phân là $-0,7956...$
yaQK^2Q)RsQK^2Q)$p1$$$1Eh2)=



- Giữ nguyên kết quả này ở máy tính Casio số 1 , dùng máy tính Casio thứ 2 để tính kết qua của các đáp án **A**, **B**, **C**, **D** ta thấy đáp số **C**



Đây là giá trị giống hệt tích phân, vậy C là đáp số chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Đặt $t=\sqrt{e^{2x}-1}$
- Vi phân 2 vế phương trình ẩn phụ
- $t=\sqrt{e^{2x}-1}\Leftrightarrow t^2=e^{2x}-1\Leftrightarrow\left(t^2\right)'dt=\left(e^{2x}-1\right)'dx\Leftrightarrow 2tdt=2e^{2x}dx\Leftrightarrow tdt=e^{2x}dx$
- Đổi cận dưới : $x=1$ khi đó $t=\sqrt{e^2-1}$

Đổi cận trên : $x = \ln 2$ khi đó $t = \sqrt{e^{2\ln 2} - 1} = \sqrt{3}$

- Lúc này tích phân phức tạp ban đầu đã trở thành tích phân đơn giản

$$I = \int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}.tdt = \int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} dt = t\Big|_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{e^2-1}$$

❖ **Bình luận :**

- Bài toán trên chứa nội dung của phép đặt ẩn phụ số 1 "nếu tích phân chứa căn thì ta đặt cả căn là ẩn phụ t "
- Việc vi phân luôn phương trình đặt ẩn phụ $t = \sqrt{e^{2x} - 1}$ thường khó khăn vì chứa căn, do đó ta thường khử căn $t^2 = e^{2x} - 1$ bằng cách bình phương 2 vế. Sau đó ta mới vi phân

VD3-[THP Nguyễn Đình Chiểu – Bình Dương 2017] Giá trị của a để tích phân $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx$ có giá trị $\frac{a^2}{2} + a + \ln 3$ là :

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

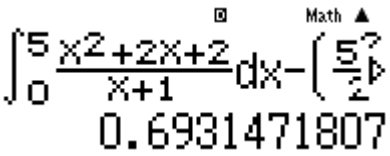
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Về mặt bản chất nếu tích phân $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx$ có giá trị bằng biểu thức $\frac{a^2}{2} + a + \ln 3$ thì hiệu của chúng phải bằng nhau. Vây ta thiết lập hiệu $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx - \left(\frac{a^2}{2} + a + \ln 3\right)$ và bài toán trở thành tìm a để hiệu trên bằng 0
- Thử với giá trị $a = 5$ Ta nhập hiệu trên vào máy tính Casio hiệu

$$\int_0^5 \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx - \left(\frac{5^2}{2} + 5 + \ln 3\right)$$

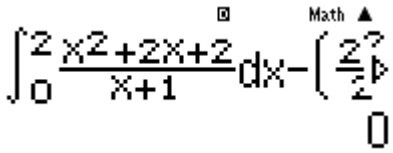
yaQ)d+2Q)+2RQ)+1R0E5$p(a5dR2$+5+h33o))
Rồi nhấn phím =



Máy tính Casio báo một giá trị khác 0 vậy đáo số **A** là sai.

- Sửa vị trí a thành số 4 và số 3 ta đều nhận được kết quả khác 0 vậy đáp án **B** và **C** đều sai
- Thử với giá trị $a = 2$ ta được :

yaQ)d+2Q)+2RQ)+1R0E2$p(a2dR2$+2+h3))=



Khi đó hiệu trên bằng 0 tức là **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tách tích phân thành : $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx = \int_0^a \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx$
- Vì $\left(\frac{x^2}{2}+x\right)' = x+1$ nên nguyên hàm của $x+1$ là $\frac{x^2}{2}+x$
- Vì $\left(\ln|x+1|\right)' = \frac{1}{x+1}$ nên nguyên hàm của $\frac{1}{x+1}$ là $\ln|x+1|$

Tóm lại $\int_0^a \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}+a+\ln|a+1|$

- Thiết lập quan hệ $\frac{a^2}{2}+a+\ln|a+1| = \frac{a^2}{2}+a+\ln 3 \Leftrightarrow \ln|a+1| = \ln 3 \Leftrightarrow a = 2$

❖ **Bình luận :**

- Bài toán này còn có mẹo giải nhanh dành cho các bạn tinh ý, chúng ta quan sát hàm $f(x)$ chứa thành phần $\frac{1}{x+1}$ có mối liên hệ với nguyên hàm của nó là $\ln|x+1|$. Ta đặc câu hỏi vậy phải chăng $\ln|x+1|$ khi thế cận sẽ là $\ln|a+1|$ có mối liên hệ với $\ln 3 = \ln|a+1|$ suy ra $a = 2$
- Hầu hết bài toán chứa tham số tích phân tác giả xin khuyên các bạn nên dùng phương pháp Casio chứ phương pháp tự luận nhiều khi rất loằng ngoằng và dễ sai.

VD4-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] So sánh các tích phân

$$I = \int_1^4 \sqrt{x}dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx, K = \int_0^1 x.e^x$$

Ta có kết quả nào sau đây

A. $I > K > J$ **B.** $I > J > K$ **C.** $J > I > K$ **D.** $K > I > J$

GIẢI

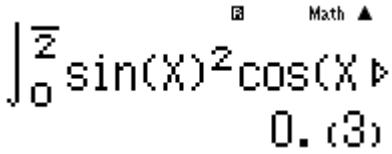
❖ **Cách 1 : CASIO**

- Tính giá trị tích phân I ta được $I = 4.6666...$ và ghi giá trị này ra nháp.

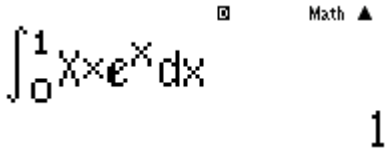
ysQ)R1E4=n

- Tính giá trị tích phân J ta được $J = 0.3333...$ và lại ghi giá trị này ra nháp

qw4yjQ))dkQ))R0EaqKR2= n



- Tính tiếp giá trị cuối cùng $K = 1$
- qw3yQ)OQK^Q)R0E1=



- Rõ ràng $4.6666 > 1 > 0.3333$ hay $I > K > J$. Vậy đáp án chính xác là **A**

❖ **Bình luận :**

- Qua bài toán trên ta thấy rõ hơn sức mạnh của Casio khi giải nhanh những bài tích phân xác định, phương pháp tự luận cũng có nhưng rất dài dòng, tác giả xin không đề cập tới dành thời gian cho các bài khác quan trọng hơn.

VD 5-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^1 \left(|3x-1| - 2|x|\right)dx$ bằng

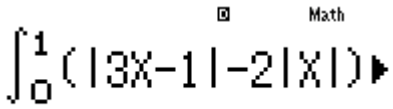
A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{-11}{6}$ **D.** 0

GIẢI

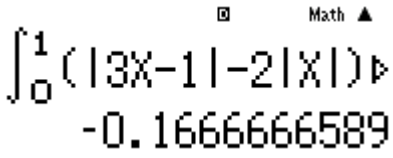
❖ **Cách 1 : CASIO**

- Cách gọi lệnh giá trị tuyệt đối qc

- Khi biết lệnh giá trị tuyệt đối rồi chúng ta nhập tích phân và tính giá trị một cách bình thường
- y(qc3Q)p1$p2qcQ)$)R0E1



- Nhấn nút =ta sẽ nhận được giá trị tích phân là $I = -0,016666...$



- Đây chính là giá trị xuất hiện ở đáp số A. Vậy A là đáp số chính xác của bài toán

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- $\int_0^1 \left(|3x-1|-2|x|\right)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(|3x-1|-2|x|\right)dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(|3x-1|-2|x|\right)dx$
- Khi $0 \le x \le \frac{1}{3}$ thì $\int_0^{\frac{1}{3}} \left(|3x-1|-2|x|\right)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3x-2x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-5x)\,dx = \left(x-\frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}$

  $= \frac{1}{18}$
- Khi $\frac{1}{3} \le x \le 1$ thì $\int_{\frac{1}{3}}^1 \left(|3x-1|-2|x|\right)dx$

  $= \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x-1-2x)\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^1 = -\frac{2}{9}$
- Vậy $I = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(|3x-1|-2|x|\right)dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(|3x-1|-2|x|\right)dx = \frac{1}{18} - \frac{2}{9} = \frac{-1}{6}$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Để giải các bài toán tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối ta phải sử dụng **phương pháp chia khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối**.

  Ta biết $3x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}$ và $3x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{3}$ vậy ta sẽ chia đoạn $[0;1]$ thành 2 đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ và $\left[\frac{1}{3};1\right]$

- Để tách 1 tích phân thành 2 tích phân ta sử dụng công thức chèn cận : Với giá trị c bất kì thuộc đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

VD 6-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = a\pi + \frac{1}{4}\ln b$ $(0 < a < 1.1 < b < 3)$. Tích ab bằng bao nhiêu ?

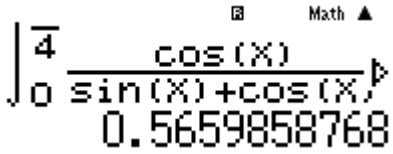
A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{8}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

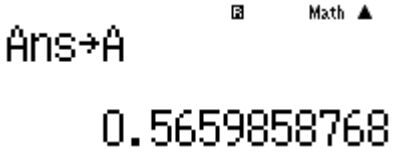
- Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = 0.5659... = A$

qw4yakQ))RjQ))+kQ))R0EaqKR4=



Lưu giá trị này vào biến A

qJz

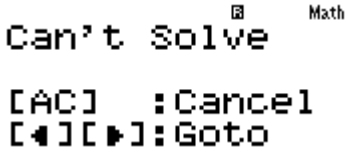


Vậy ta có : $a\pi + \frac{1}{4}\ln b = 0.5659... = A \Rightarrow a = \frac{A - \frac{1}{4}\ln b}{\pi}$

- Nếu đáp số A đúng thì $ab = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A - \frac{1}{4}\ln b}{\pi}.b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b\left(A - \frac{1}{4}\ln b\right) - \frac{\pi}{2} = 0$

Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm b

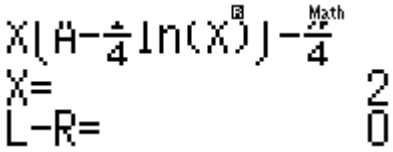
Q)(Qzpa1R4$QQhQ)))paqKR2$qr=0.5=



Không tìm được b $\Rightarrow$ Đáp án A sai

- Với đáp án B ta có $b\left(A - \frac{1}{4}\ln b\right) - \frac{\pi}{4} = 0$

Q)(Qzpa1R4$hQ)))paqKR4qr=0.5=



$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$ thỏa điều kiện $0 < a < 1 . 1 < b < 3$

$\Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác của bài toán

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán rất hay kết hợp lệnh tính tích phân và lệnh dò nghiệm SHIFT SOLVE
- Cách Casio có thêm một ưu điểm là tránh được các bài tích phân khó như

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

[redacted]

Bài 1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng :

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Bài 2-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1}$ bằng :

A. 3 **B.** 7 **C.** -5 **D.** -3

Bài 3-[Group Nhóm Toán 2107] Tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ bằng :

A. $\ln 3$ **B.** $\ln\frac{3}{4}$ **C.** $\ln\frac{3}{2}$ **D.** $\ln\frac{1}{2}$

Bài 4-[THPT Nho Quan – Ninh Bình 2017] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1 + 2\sin 2x} dx = \frac{1}{4}\ln 3$. Tìm giá trị của a :

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Bài 5-[Báo THTT tháng 11 năm 2016] Giá trị nào của a để $\int_0^a \left(3x^2 + 2\right) dx = a^3 + 2$?:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Bài 6-[THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh 2017] Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 2\ln x}{x} dx$:

A. $I = e^2 - \frac{1}{2}$ **B.** $I = \frac{e^2+1}{2}$ **C.** $I = e^2 + 1$ **D.** $I = \frac{e^2}{2}$

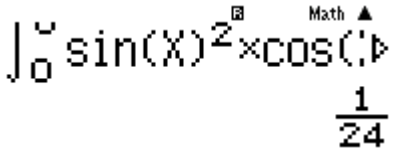
Bài 1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x\cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng :

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

GIẢI

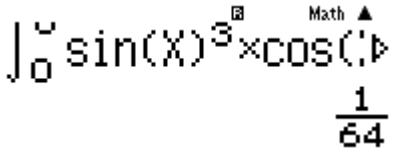
- Với $n=2$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cos x dx = \frac{1}{24} \neq \frac{1}{64}$ $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

yjQ))dOkQ))R0EaqKR6=



- Với $n=3$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x\cos x dx = \frac{1}{64} \Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác

yjQ))^3$OkQ))R0EaqKR6=



- <u>Chú ý</u>: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện cụm* $\cos x dx$ *"* ta sẽ đặt $t = \sin x$

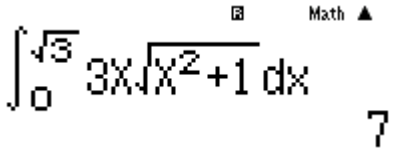
Bài 2-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1}dx$ bằng :

A. 3 **B.** 7 **C.** -5 **D.** -3

GIẢI

- Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1} = 7 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

y3Q)sQ)d+1R0Es3=



- <u>Chú ý</u>: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện căn thức"* ta sẽ đặt căn thức là ẩn phụ

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t^2 = x^2+1$ Vi phân hai vế $\Rightarrow 2xdx = 2tdt \Rightarrow xdx = tdt$.

Đổi biến : $\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{array}\right.$. Khi đó tích phân trở thành $\int_1^2 3t.tdt = t^3\Big|_1^2 = 7$

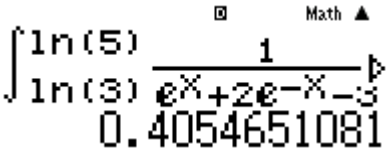
Bài 3-[Group Nhóm Toán 2107] Tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ bằng :

A. $\ln 3$ **B.** $\ln\frac{3}{4}$ **C.** $\ln\frac{3}{2}$ **D.** $\ln\frac{1}{2}$

GIẢI

- Tính tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}=0.4054...=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

ya1RQK^Q)$+2QK^pQ)$p3Rh3)Eh5)=



- <u>Chú ý</u>: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện* e^x *"* ta sẽ đặt e^x là ẩn phụ

Đặt $t=e^x$ Vi phân hai vế $\Rightarrow e^x dx=dt$.

Đổi biến : $\left[\begin{array}{l}x=\ln 3\Rightarrow t=3\\ x=\ln 5\Rightarrow t=5\end{array}\right.$. Khi đó tích phân trở thành

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{e^{2x}-3e^x+2}=\int_3^5\frac{dt}{t^2-3t+2}=...=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

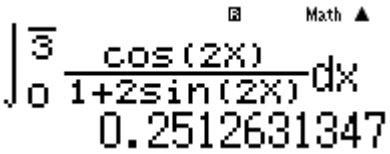
<u>Bài 4</u>-[THPT Nho Quan – Ninh Bình 2017] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{a}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\ln 3$. Tìm giá trị của a :

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

GIẢI

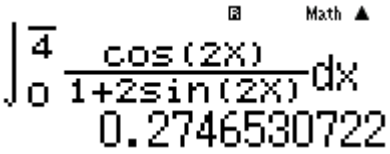
- Thử với $a=3$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=0.2512...\neq\frac{1}{4}\ln 3$ $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

qw4yak2Q))R1+2j2Q))R0EaqKR3=



- Thử với $a=4$ Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=0.2746=\frac{1}{4}\ln 3$ $\Rightarrow$ Đáp số **C** sai

$$ERo4=



- <u>Chú ý</u>: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện cụm* $\cos 2xdx$ *"* ta sẽ đặt $\sin 2x=t$ là ẩn phụ

<u>Bài 5</u>-[Báo THTT tháng 11 năm 2016] Giá trị nào của a để $\int_0^a\left(3x^2+2\right)dx=a^3+2$?:

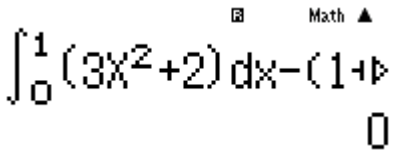
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

GIẢI

- Thiết lập phương trình $\int_0^a (3x^2+2)dx-(a^3+2)=0$. Vì đề bài cho sẵn các nghiệm nên ta sử dụng phép thử

Với $a=1$ vế trái phương trình là : $\int_0^1 (3x^2+2)dx-(1^3+2)=0$ $\Rightarrow$ Đáp án đúng là **B**

Wy(3Q)d+2)R0E1$p(1+2)=



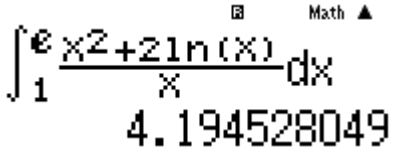
Bài 6-[THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh 2017] Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{x^2+2\ln x}{x}dx$:

A. $I=e^2-\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{e^2+1}{2}$ **C.** $I=e^2+1$ **D.** $I=\frac{e^2}{2}$

GIẢI

- Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{x^2+2\ln x}{x}dx=4.1945...=\frac{e^2+1}{2}$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

yaQ)d+2hQ))RQ)R1EQK=



- Chú ý: Tự luận ta nên tách tích phân thành 2 tích phân con để dễ xử lý :

$$I=\int_1^e xdx+2\int_1^e \ln x.\frac{1}{x}dx$$

Nếu tích phân "xuất hiện cụm $\frac{1}{x}dx$ " thì Đặt $\ln x=t$ Vi phân hai vế $\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$.

Đổi biến : $\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=e\Rightarrow t=1 \end{array}\right.$. Khi đó tích phân trở thành $\int_1^e xdx+2\int_o^1 tdt=\frac{e^2+1}{2}$.