

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для сознательного усвоения учащимися методов решения тригонометрических уравнений, систем тригонометрических уравнений.

Содержательная:

- актуализировать знания об уравнениях; тригонометрических функциях, обратных тригонометрических функциях, тригонометрических уравнениях;
- расширить знания учеников за счет введения нового объекта – систем тригонометрических уравнений;
- познакомиться с задачами на решение систем простейших тригонометрических уравнений.

План занятия:

1. Система двух уравнений: линейного и тригонометрического.
2. Система двух тригонометрических уравнений.
 - 2.1. Замена переменных в системах тригонометрических уравнений
 - 2.2. Системы с независимыми уравнениями
 - 2.3. Системы с произведениями тригонометрических функций

Ход занятия

1. Система двух уравнений: линейного и тригонометрического.

Может случиться, что одно из уравнений системы содержит тригонометрические функции от неизвестных x и y , а другое уравнение является линейным относительно x и y . В таком случае действуем очевидным образом: одну из неизвестных выражаем из линейного уравнения и подставляем в другое уравнение системы.

Задачи

Задача 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения выражаем y через x :

$$y = \pi - x,$$

и подставляем во второе уравнение:

$$\sin x + \sin(\pi - x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}.$$

Получилось простейшее тригонометрическое уравнение относительно x . Его решения запишем в виде двух серий:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Остаётся найти соответствующие значения y :

$$y_1 = \pi - x_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n, \quad y_2 = \pi - x_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi n$$

Как всегда в случае системы уравнений, ответ даётся в виде перечисления пар $(x; y)$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} - 2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

Обратите внимание, что x и y связаны друг с другом посредством целочисленного параметра n . А именно, если в выражении для x стоит $+2\pi n$, то в выражении для y автоматически появляется $-2\pi n$, причём с тем же самым n . Это — следствие «жёсткой» зависимости между x и y , задаваемой уравнением $x + y = \pi$

Задача 2. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Решение. Здесь имеет смысл сначала преобразовать первое уравнение системы:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2y = -1 \Leftrightarrow 2 \cos(x + y) \cos(x - y) = -1.$$

Таким образом, наша система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} 2 \cos(x + y) \cos(x - y) = -1, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Подставляем $x - y = 2\pi/3$ в первое уравнение:

$$2 \cos(x + y) \cos \frac{2\pi}{3} = -1 \Leftrightarrow \cos(x + y) = 1 \Leftrightarrow x + y = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

В результате приходим к системе:

$$\begin{cases} x + y = 2\pi n, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Складываем эти уравнения, делим на 2 и находим x ; вычитаем из первого уравнения второе, делим на 2 и находим y :

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad y = -\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

Задача 3. Решим систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

Из верхнего линейного уравнения выражаем x через y и подставляем в нижнее:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \end{cases}$$

Решаем полученное уравнение относительно x :

$$\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = 1 \Rightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1 - \operatorname{tg} x$$

ОДЗ: $\operatorname{tg} x \neq -1$

$$1 - \operatorname{tg} x = (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x) \Rightarrow (1 - \operatorname{tg} x)(1 - 1 - \operatorname{tg} x) = 0 \\ -\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pi k \\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}$$

Получаем две пары решений:

$$\begin{cases} x_1 = \pi k \\ y_1 = \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} - \pi k \\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ y_2 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) = -\pi k \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\pi k; \frac{\pi}{4} - \pi k\right), \left(\frac{\pi}{4} + \pi k; -\pi k\right) \right\}$

2. Тригонометрические уравнения сводящиеся к квадратным.

Замена переменных в системах тригонометрических уравнений

В ряде случаев тригонометрическую систему удаётся свести к системе алгебраических уравнений подходящей заменой переменных.

Задачи

Задача 4. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

Решение. Замена $u = \sin x$, $v = \cos y$ приводит к алгебраической системе относительно u и v :

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 - v^2 = 1 \end{cases}$$

Эту систему вы без труда решите самостоятельно.

Решение единственно: $u = 1$, $v = 0$.

Обратная замена приводит к двум простейшим тригонометрическим уравнениям:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = 0, \end{cases}$$

Откуда: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$)

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$

Системы с независимыми уравнениями

Если уравнения системы являются независимыми, то они решаются по отдельности. При этом счетчики периодов обязательно должны быть различными (например, k и n , для двух независимых уравнений).

Задачи

Задача 5. Решим систему

$$\begin{cases} \sin(x - y) = 0 \\ \cos(x + y) = 1 \end{cases}$$

Уравнения независимы, решаем каждое из них, а затем методом сложения находим x и y :

$$\begin{cases} x - y = \pi k \\ x + y = 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi k + 2\pi n \\ 2y = 2\pi n - \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(k + 2n) = \frac{\pi}{2}(2n + k) \\ y = \pi n - \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{2}(2n - k) \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}(2n + k); \frac{\pi}{2}(2n - k)\right)$

Системы с произведениями тригонометрических функций

Системы с произведениями тригонометрических функций и приводимые к ним решаются методом сложения.

Задачи

Задача 6. Решим систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Добавим и вычтем уравнения и используем формулы косинуса суммы и разности:

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

Мы получили систему из двух независимых уравнений. Решаем каждое из них, и затем используем метод сложения, чтобы найти x и y :

$$\begin{cases} x - y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi(2k + n) \\ 2y = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + \pi(n - 2k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2k + n) \\ y = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(n - 2k) \end{cases}$$

Получаем две пары решений:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2k + n) \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n - 2k) \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2k + n) \\ y_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n - 2k) \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2k + n); \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n - 2k) \right), \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2k + n); \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n - 2k) \right) \right\}$

Задания

Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Из верхнего линейного уравнения выражаем x через y и подставляем в нижнее:

$$\begin{cases} y = \pi - x \\ \sin x + \sin(\pi - x) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Решаем полученное уравнение относительно x :

$$\begin{aligned} \sin x + \sin x &= \sqrt{3} \Rightarrow 2\sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \end{aligned}$$

Получаем две пары решений:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y = \pi - x = \pi - \frac{\pi}{3} - 2\pi k = \frac{2\pi}{3} - 2\pi k \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ y = \pi - x = \pi - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k = \frac{\pi}{3} - 2\pi k \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} - 2\pi k \right), \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} - 2\pi k \right) \right\}$

б)
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Добавим и вычтем уравнения и используем формулы синуса суммы и разности:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x + y) = 1 \\ \sin(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Мы получили систему из двух независимых уравнений. Решаем каждое из них, и затем используем метод сложения, чтобы найти x и y :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x - y = (-1)^n \frac{\pi}{6} = \pi n \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(2k + n) \\ 2y = \frac{\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(2k - n) \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k + n) \\ y = \frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k - n) \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k + n); \frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k - n))$

в) $\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$

Используем формулу произведения косинусов:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos x + \cos y) \\ \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos x + \cos y) = \frac{1}{2} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Замена переменных:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ (1 - b)b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ b^2 - b + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ (b - \frac{1}{2})^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

Получаем четыре пары решений.

Ответ: $\left\{ \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \right. \\ \left. \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \right\}$

г) $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3} \\ 2\cos(\pi x) + 4\cos(\pi y) = 3 \end{cases}$

Из верхнего линейного уравнения выражаем y через x и подставляем в нижнее:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} - x \\ 2\cos(\pi x) + 4\cos(\pi(\frac{2}{3} - x)) = 3 \end{cases}$$

Решаем полученное уравнение относительно x:

$$\begin{aligned} 2\cos(\pi x) + 4\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi x\right) &= 3 \\ 2\cos(\pi x) + 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\pi x + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\pi x\right) &= 3 \\ 2\cos(\pi x) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\pi x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\pi x\right) &= 3 \\ 2\cos(\pi x) - \frac{1}{2}\cos(\pi x) + \sqrt{3}\sin\pi x &= 3 \\ \frac{3}{2}\cos\pi x + \sqrt{3}\sin\pi x &= 3 \\ \sin\pi x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow \pi x = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + 2k \\ \frac{2}{3} + 2k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Получаем две пары решений:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + 2k \\ y = \frac{2}{3} - x = \frac{1}{3} - 2k \\ x = \frac{2}{3} + 2k \\ y = -2k \end{cases}$$

Ответ: $\{(\frac{1}{3} + 2k; \frac{1}{3} - 2k), (\frac{2}{3} + 2k; -2k)\}$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Что называется системой уравнений?
- 1.2. Что называется решением системы уравнений?
- 1.3. Что значит решить систему уравнений?
- 1.4. Какие две системы называются равносильными?
- 1.5. Какие особенности у решения систем тригонометрических уравнений:
 - системы двух уравнений: линейного и тригонометрического;
 - заменой переменных в системах тригонометрических уравнений;
 - системы с независимыми уравнениями;
 - системы с произведениями тригонометрических функций.

2. Решите предложенные задания по вариантам (письменно):

а)
$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1. \end{cases}$$

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 17 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:



ОД.07 Математика 10.02.26 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 10.02.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.