

CONCOURS D'ENTRÉE JUIN 2006
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Alain SCHAUER - alain.schauber@prepas.org

I. PRÉLIMINAIRES

I.a) 1- En soustrayant L_1 à L_2 et L_3 , et $6L_1$ à L_4 , on trouve que le $\det(A)$ devient

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 \\ -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ -47 & -32 & -21 & 0 \end{vmatrix}.$$

On le développe par rapport à la dernière colonne et on obtient

$$-\begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -47 & -32 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 47 & 32 & 21 \end{vmatrix}.$$

Enfin on développe par rapport à la 1^{ère} colonne, ce qui donne

$$-7\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 32 & 21 \end{vmatrix} + 47\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \times 54 + 47 \times 8 = -2 \neq 0.$$

A est inversible

I.a) 2- On "voit aisément" que la somme des termes de chaque ligne de A donne le terme correspondant de b .

On en déduit que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution du système $AX = b$.

I.b) On vérifie par exemple que $8 \times (-2,34) + 6 \times 9,745 + 4 \times (-4,85) + (-1,34) = 19,01$. Et de même pour les autres lignes (sauf la 3^{ème}, où l'énoncé présente apparemment une faute de frappe sur un chiffre). Le vecteur Y proposé est donc bien une solution approchée à 10^{-2} près du système $AX = b + \delta b$.

$$\frac{\|X - Y\|^2}{\|X\|^2} = \frac{(-2,34 - 1)^2 + (9,745 - 1)^2 + (-4,85 - 1)^2 + (-1,34 - 1)^2}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3,84^2 + 8,745^2 + 5,85^2 + 2,34^2}{4}.$$

$$100 < 102 = 3^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2 < 3,84^2 + 8,745^2 + 5,85^2 + 2,34^2 < 4^2 + 9^2 + 6^2 + 3^2 = 142 < 144 \Rightarrow 25 < \frac{\|X - Y\|^2}{\|X\|^2} < 36.$$

Or

$$5 < \frac{\|X - Y\|}{\|X\|} < 6$$

Donc d'où l'on déduit que la partie entière de l'erreur relative vaut 5. (soit

I.d) On constate là encore que la perturbation minimale de la matrice A produit une perturbation importante de la solution. Une minoration rapide montre que

$$\frac{\|X - Z\|^2}{\|X\|^2} = \frac{0,69^2 + 1,82^2 + 1,23^2 + 0,46^2}{4} \geq \frac{0,6^2 + 1,8^2 + 1,2^2 + 0,4^2}{4} = \frac{5,2}{4},$$

Et par conséquent $\frac{\|X - Z\|}{\|X\|} \geq \sqrt{1,3} \geq 1$, ce qui conduit à une erreur relative de plus de 100%.

II. ESTIMATION DE L'ERREUR

II.a) Les 5/2 ou les étudiants suffisamment avancés dans le cours de MP auront reconnu la définition de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne classique de $\mathbb{R}^n$. Ceci ne semblant pas admis, procédons directement.

□ Vérifions d'abord que la borne supérieure qui définit cette norme existe bien pour toute matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

Si on note $\alpha = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$, on a pour tout vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|AX\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \right)^2} \leq \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2} = \alpha \sqrt{n} \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \alpha \sqrt{n} \sum_{j=1}^n \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) = \alpha \sqrt{n} \sum_{j=1}^n \|X\| = \alpha n \sqrt{n} \|X\|$$

Il en résulte que l'ensemble des $\frac{\|AX\|}{\|X\|}$ est majoré par $\alpha n \sqrt{n}$ quand X parcourt $\mathbb{R}^n - \{0\}$, d'où l'existence de $\|A\|$.

□ $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall X \neq 0, \|AX\| = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, AX = 0 \Rightarrow X = 0$.

□ Si $\lambda = 0$ on a évidemment $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.

Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall X \neq 0, \frac{\|(\lambda A)X\|}{\|X\|} = \frac{|\lambda| \|AX\|}{\|X\|} \leq |\lambda| \|A\| \Rightarrow \frac{\|(\lambda A)X\|}{\|X\|} \leq |\lambda| \|A\|$. On en déduit en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$

et A par λA que $\|A\| = \left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda A) \right\| \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda A\| = \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\|$, d'où $|\lambda| \|A\| \leq \|\lambda A\|$. Et finalement on a bien $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.

□ $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \forall X \neq 0, \frac{\|(A+B)X\|}{\|X\|} = \frac{\|AX + BX\|}{\|X\|} \leq \frac{\|AX\|}{\|X\|} + \frac{\|BX\|}{\|X\|} \leq \|A\| + \|B\|$. Donc $\|A+B\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|(A+B)X\|}{\|X\|} \leq \|A\| + \|B\|$.

$A \rightarrow \|A\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

II.b) Remarquons d'abord que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| \leq \|A\| \|X\|$.

Par suite $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \|(AB)X\| = \|A(BX)\| \leq \|A\| \|BX\| \leq \|A\| \|B\| \|X\| \Rightarrow \frac{\|(AB)X\|}{\|X\|} \leq \|A\| \|B\|$. D'où $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

II.c) Avec les hypothèses de cette question, nous avons évidemment $\|A\|, \|A^{-1}\| \neq 0$. De plus, l'unique solution X du système de Cramer non homogène de matrice A est aussi non nulle.

Par conséquent on peut écrire : $\|AX\| \leq \|A\| \|X\| \Rightarrow \frac{1}{\|X\|} \leq \frac{\|A\|}{\|AX\|} = \frac{\|A\|}{\|b\|}$.

D'autre part on a aussi : $\|\partial X\| = \|Y - X\| = \|A^{-1}(AY - AX)\| \leq \|A^{-1}\| \|Y - X\| = \|A^{-1}\| \|\partial b\|$.

En multipliant membre à membre les deux inégalités précédentes, on obtient bien : $\frac{\|\partial X\|}{\|X\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\partial b\|}{\|b\|}$.

II.d) Remarquons d'abord que ∂A est une matrice à part entière, possédant donc de plein droit une norme.

Ainsi : $\|\partial X\| = \|Z - X\| = \|A^{-1}(AZ - AX)\| \leq \|A^{-1}\| \|AZ - AX\| = \|A^{-1}\| \|\partial A\| \|Z\| \leq \|A^{-1}\| \|\partial A\| \|Z\| = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\partial A\|}{\|A\|} \|Z\|$.

En divisant les deux membres de l'inégalité obtenue par $\|Z\|$ on a bien : $\frac{\|\partial X\|}{\|Z\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\partial A\|}{\|A\|}$.

III. ÉTUDE DU CONDITIONNEMENT

III.a) Si $\lambda \in Sp(A)$ et X est un vecteur propre associé, on a $\frac{\|AX\|}{\|X\|} = \frac{\|\lambda X\|}{\|X\|} = \frac{|\lambda| \|X\|}{\|X\|} = |\lambda|$. Donc $|\lambda| \leq \|A\|$.

On en déduit que $\|A\| \geq r(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$. En revanche il n'y a pas égalité en général, comme le montre

l'exemple suivant : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors A est diagonalisable et $r(A) = 1$. Mais pour $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a

$$\|A\| \geq \frac{\|AV\|}{\|V\|} = \sqrt{2} > 1$$

En fait, il n'existe pas d'expression générale de $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A , hormis dans des cas particuliers, comme par exemple ceux où A est symétrique ou diagonale.

Je pense donc qu'il y a une erreur d'énoncé et qu'il faut lire que la matrice A est diagonale (ce qui donne aussi plus de sens au «calcul» de A^{-1} qui est demandé).

Dans ce cas, avec $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$, $\frac{\|AX\|}{\|X\|} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n r(A)^2 x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = r(A)$, ce

qui prouve que $\|A\| \leq r(A)$, d'où finalement l'égalité. Ainsi si A est diagonale, alors $\|A\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.

Comme A est inversible, on a $A^{-1} = \text{Diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$, d'où $\|A^{-1}\| = \max\{1/|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\} = \frac{1}{\min\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}}$.

Conclusion : si A est une matrice inversible diagonale alors $\text{cond}(A) = \frac{\max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}}{\min\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}}$.

III.b) D'après l'inégalité établie en II.b), on a $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|I_n\|$. Or $\|I_n\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1$. D'où $\min_{A \in GL_n(\mathbb{R})} \text{cond}(A) = 1$.

III.c) Le meilleur conditionnement possible de CA est obtenu lorsque $\text{cond}(CA) = 1 = \text{cond}(I_n)$. Il en résulte que A^{-1} est un choix optimal de la matrice C (ce n'est pas forcément le seul, par exemple si $A = -I_n$ alors $C = I_n$ convient aussi. Néanmoins dans ce cas il est vrai que A est déjà conditionnée de façon optimale).

On en déduit donc que A^{-1} fournit bien une solution théorique optimale pour le choix de la matrice C .

Dans la pratique, on est alors confronté au problème de l'inversion de A , qui est équivalent à celui de la résolution du système $AX = b$ qu'on cherche précisément à résoudre!

IV. RÉOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

IV.a) f étant continue sur l'intervalle $[0;1]$, elle y admet une primitive, soit f_1 , de classe C^1 . A son tour, f_1 admet sur $[0;1]$ une primitive, soit f_2 , de classe C^2 et on a $\forall x \in [0;1], f_2''(x) = f(x)$. Par suite:

$$(VII) \Leftrightarrow \forall x \in]0,1[, U''(x) - f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in]0,1[, U'(x) - f_2'(x) = a \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in]0,1[, U(x) - f_2(x) = ax + b.$$

Par continuité de U et f_2 en 0 et 1 on a même : $(VII) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], U(x) = f_2(x) + ax + b$.

Donc (VII-VIII) $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], U(x) = f_2(x) + ax + b \\ b = 1 - f_2(0) \quad ; \quad a + b = -f_2(1) \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], U(x) = f_2(x) + (f_2(0) - f_2(1) - 1)x + 1 - f_2(0)$

L'équation différentielle (VII - VIII) admet une unique solution dans $C^2([0;1])$

IV.b) On peut procéder comme dans la question précédente.

Prenons $f_1 : x \mapsto -\cos \pi x - \pi(1-x)\sin \pi x \in \int f(x)dx$ (intégrations par parties) puis $f_2 : x \mapsto (1-x)\cos \pi x \in \int f_1(x)dx$

On remarque que f_2 vérifie d'emblée les conditions aux limites, donc $U = f_2$.

La solution de (VII - VIII - IX) est $x \mapsto (1-x)\cos \pi x$.

IV.c) Comme U est deux fois dérivable en X_i , elle admet en ce point un développement limité d'ordre 2 obtenu par

la formule de Taylor-Young : $\forall x \in [0,1], U(x) = U(X_i) + (x - X_i)U'(X_i) + \frac{(x - X_i)^2}{2}U''(X_i) + o(x - X_i)^2$

En remarquant que $X_{i+1} - X_i = h$ et $X_{i-1} - X_i = -h$ et en appliquant l'égalité ci-dessus à $x = X_{i+1}$ et $x = X_{i-1}$, on

obtient les égalités
$$\begin{cases} U(X_{i+1}) = U(X_i) + hU'(X_i) + \frac{h^2}{2}U''(X_i) + o(h^2) \\ U(X_{i-1}) = U(X_i) - hU'(X_i) + \frac{h^2}{2}U''(X_i) + o(h^2) \end{cases}$$
, on les ajoute membre à membre et on isole $U''(X_i)$. On trouve
$$U''(X_i) = \frac{U(X_{i+1}) - 2U(X_i) + U(X_{i-1}))}{h^2} + o(1), i = 1, 2, \dots, N-1$$
 (au lieu du $o(h^2)$ de l'énoncé !)

$$N^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X_1) - N^2 \\ f(X_2) \\ f(X_3) \\ \vdots \\ f(X_{N-2}) \\ f(X_{N-1}) \end{pmatrix}$$

IV.d) Le système s'écrit sous la forme

IV.e) Je suppose que là aussi, il y a une coquille dans l'énoncé et qu'on demande de calculer $(U_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et $\text{cond}(A_3)$. Il y a aussi une petite ambiguïté puisque dans l'égalité de la question précédente on aurait tout aussi bien pu faire passer le N^2 dans le second membre. Je pense néanmoins que c'est la version choisie qui est celle voulue par l'auteur du sujet. De toutes façons le conditionnement d'une matrice ne change pas si on la multiplie par un

scalaire non nul. On a donc $N = 3$ et
$$A_3 = 9 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 9B$$

$$\|B\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|BX\|}{\|X\|} = \sup_{X \neq 0} \left\| B \frac{X}{\|X\|} \right\| = \sup_{\|Y\|=1} \|BY\|$$

Calcul élémentaire de $\text{cond}(A_3)$:

Considérons donc $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, avec $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Alors $\|BY\|^2 = (-2y_1 + y_2)^2 + (y_1 - 2y_2)^2 = 5 - 8y_1y_2$.

Or on sait que $-(y_1^2 + y_2^2) \leq 2y_1y_2 \leq y_1^2 + y_2^2$ donc $-8y_1y_2 \leq 4(y_1^2 + y_2^2) = 4$, d'où $\|BY\|^2 = (-2y_1 + y_2)^2 + (y_1 - 2y_2)^2 \leq 9$.

Cette valeur est atteinte lorsque $-8y_1y_2 = 4$, par exemple pour $y_1 = -y_2 = 1/\sqrt{2}$. Donc $\|B\| = \sqrt{9} = 3$. On calcule ensuite (transposée de la matrice des cofacteurs multipliée par l'inverse du déterminant)

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}C$$
, et un calcul analogue à celui de $\|B\|$ montre que $\|C\| = 3$, puis $\|B^{-1}\| = 1$.

Or $A_3 = 9B \Rightarrow A_3^{-1} = \frac{1}{9} B^{-1}$. Donc $cond(A_3) = 9\|B\| \times \frac{1}{9}\|B^{-1}\|$. On en déduit enfin que $cond(A_3) = 3$.

Calcul de U_1 et U_2 : on vient de voir en passant que $A_3^{-1} = \frac{1}{9} B^{-1} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

De plus $b_3 = \begin{pmatrix} f(1/3) - 9 \\ f(2/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi\sqrt{3} - \pi^2/3 - 9 \\ \pi\sqrt{3} + \pi^2/6 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3\pi\sqrt{3} - \pi^2/2 - 18 \\ 3\pi\sqrt{3} - 9 \end{pmatrix}$ (et $U_0 = 1, U_3 = 0$).

Remarque : autre calcul de $cond(A_3)$: la matrice A_3 est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres. On peut donc reprendre le calcul du III.a) en effectuant les calculs des normes euclidiennes des vecteurs dans cette base et on aboutit au même résultat $\|A_3\| = r(A_3)$ (ce qui est d'ailleurs une formule du cours pour une matrice symétrique).

De même pour l'inverse de A_3 qui est encore symétrique et de valeurs propres inverses. On retrouve donc

$$cond(A_3) = \frac{\max\{\|\lambda\|, \lambda \in Sp(A_3)\}}{\min\{\|\lambda\|, \lambda \in Sp(A_3)\}}. \text{ Or } Sp(A_3) = \{-9; -27\}, \text{ d'où le résultat.}$$

IV.f) Avec l'expression exacte de U trouvée en IV.b), on calcule $U(X_1) = U(1/3) = 1/3$ et $U(X_2) = U(2/3) = -1/6$.

$$\|(U(X_i) - U_i)_{0 \leq i \leq 3}\| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{\pi^2}{54}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)^2 + (0-0)^2}.$$

Il en résulte que

On en déduit (sans calculatrice, bien entendu) que $\|(U(X_i) - U_i)_{0 \leq i \leq 3}\| = 0,1$ (à 10^{-1} près). Ce qui montre quoi ???