Aula 2 de Cálculo III

Dúvidas:

Exercício 2 - (c)

Bom, fiz a questão do seguinte modo:
$f(x, y, z) = ln(x^2 + y + z^2)$, $P = (-1, 2, 1)$
$ln(x^2 + y + z) = k$
$k = ln((-1)^2 + 2 + 1^2)$
$k = ln(1 + 2 + 1) = ln(4)$
Por que o resultado no gabarito é $(x^2 + y + z^2) = 4$? o que ocorre com o ln?

Resposta: $k = \ln(4) \Rightarrow \ln(x^2 + y + z^2) = \ln(4) \Rightarrow x^2 + y + z^2 = 4$

é a equação da superfície de nível que passa por P.

Exercício 3 - (a)

Por que motivo $(x^2 + y + z^2) = e^k$? Sei que representa a esfera, no caso a equação $(x^2 + y + z^2) = r^k$(r^k não, é r^2), mas gostaria de uma explicação mais detalhada em relação ao número de euler, por favor.

Resposta: As superfícies de nível de f são da forma:

$$ln(x^2 + y + z) = k \Rightarrow e^k = x^2 + y + z.$$

Isso segue da propriedade da função logarítmica: $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$.

No caso, $\ln$ é o log na base e: $\ln b = c \Leftrightarrow \log_e b = c \Rightarrow e^c = b$.

Exercício 5 - (b)

Na parametrização da superfície sem ser por meio de coordenadas polares, o domínio da parametrização obrigatoriamente necessita que os dois parâmetros estejam relacionados? Por exemplo, na 5b, o domínio da parametrização da superfície S1 é: $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 4 - 2u$, ou seja, o domínio para o segundo parâmetro (t) (quer dizer v?) está usando o primeiro parâmetro (u). Por opção, poderia escrever o domínio como $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 4$ou os parâmetros têm que estar relacionados?

Resposta: Neste caso não pode escrever $0 \leq u \leq 2\, e\, 0 \leq v \leq 4$ porque S_1 é um triângulo no plano xz e não em um retângulo. S_1: $r(u, v) = (u, 0, v)$ é o mesmo que escrever: S_1: $r(x, z) = (x, 0, z)$. O triângulo no plano xz é definido da forma:

$$0 \leq x \leq 2 \quad e \quad 0 \leq z \leq 4 - 2x \qquad \text{ou} \qquad 0 \leq z \leq 4 \quad e \quad 0 \leq x \leq \frac{4-z}{2}$$

Ou então, chamando x de u e z de v, o domínio pode ser definido como:

$$0 \leq u \leq 2 \quad e \quad 0 \leq v \leq 4 - 2u \qquad \text{ou} \qquad 0 \leq v \leq 4 \quad e \quad 0 \leq u \leq \frac{4-v}{2}.$$

Por exemplo, note que $r(1, 4) = (1, 0, 4) \notin S_1$.

Exercício 6 - (b) - (iv)

Não estou entendendo a parametrização deste item. O s seria o “u” e o t, o “v”, das coordenadas polares, isso? Não consegui desenvolver o exercício.

Resposta: Na parametrização, $z = s$. Substituindo isso na equação: $x^2 + y^2 - (z + 4)^2 = 1$, temos:

$$x^2 + y^2 - (s + 4)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 + (s + 4)^2.$$

Então, usando coordenadas polares para parametrizar a equação acima,

$$r^2 = 1 + (s + 4)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{1 + (s + 4)^2}.$$

Assim:

$$x = r\, cos(\theta) = \sqrt{1 + (s + 4)^2}\, cos(\theta),$$

$$y = r\, sen(\theta) = \sqrt{1 + (s + 4)^2}\, sen(\theta).$$

Chamando θ de t:

$$x = \sqrt{1 + (s + 4)^2}\, cos(t) \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1 + (s + 4)^2}\, sen(t).$$

Problema 1 - (b)

Professora, na letra B do problema 1, o enunciado pede a reta tangente e a resposta é a seguinte:

$$\text{Reta: } \vec{\gamma}(\lambda) = (1, 1, 1) + \lambda\left(1, 2, \tfrac{4}{3}\right)$$

Como encontrar essa parte grifada em amarelo? Fiquei em dúvida sobre o que ela representa também.

Resposta: O vetor grifado, tirando o lambda, é o vetor $\vec{v} = \vec{r}\,'(1)$, vetor velocidade e, portanto, tangente à curva no ponto $\vec{r}\,(1)$. Então, $\vec{v} = \vec{r}\,'(1)$ é um vetor diretor para a reta tangente. **Reta**: $\vec{\gamma}(\lambda) = P + \lambda\vec{v} = \vec{r}\,(1) + \lambda\,\vec{r}\,'(1)$.

Problema 1 - **(b)** Professora, após encontrar a curva definida por r(1), como faço para encontrar a reta tangente a mesma? Somo à derivada de r(t)?

Resposta: r(1) não define uma curva, define um ponto na curva.
Vou dar um exemplo de como encontrar uma reta tangente a uma curva em um certo ponto da curva logo abaixo:
Exemplo: Encontre a equação da reta tangente à curva C, dada por $r(t) = (2t, -t^2, t+1)$, com $t \in \mathbb{R}$, no ponto $P = (-2, -1, 0)$.
Resolução: vamos expressar a forma vetorial da equação da reta tangente à curva C no ponto P, ou seja, a reta é dada por:

$$Reta: \qquad \vec{r}(t) = (x, y, z) = P + t\,\vec{v}, \qquad (1)$$

onde P é um ponto pertencente à reta e $\vec{v}$ é um vetor diretor para a reta. Logo, precisamos encontrar $\vec{v}$ para determinar a reta. Um vetor diretor pode ser o vetor velocidade no ponto P. Assim, podemos encontrar t_0 de modo que $\vec{r}(t_0)$ =P e, consequentemente, o vetor velocidade em t_0. Vemos que $\vec{r}(-1)$ =P, logo $t_0 = -1$. Assim, $\vec{v} = \vec{r}\,'(-1)$. Como $\vec{r}\,'(t) = (2, -2t, 1)$, segue que $\vec{v} = \vec{r}\,'(-1) = (2, 2, 1)$. Substituindo $\vec{v}$ na equação (1), obtemos a reta tangente à curva C em P, dada por:

$Reta$: $\qquad \vec{r}(t) = (x, y, z) = (-2, -1, 0) + t\,(2, 2, 1)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2 - (b)

Professora, estou com dificuldade para parametrizar a curva C. Devo igualar a equação dos dois gráficos?

Resposta: A curva é definida pela intersecção: $C = G(f) \cap G(g)$. Logo, podemos definir C da forma:

$$C: \quad z = x^2 - y^2 \ (I) \quad e \quad z = 1 - x^2 - 2y^2 \ (II).$$

Substituindo a equação (I) na equação (II), podemos escrever

$$C: \quad z = x^2 - y^2 \quad e \quad x^2 - y^2 = 1 - x^2 - 2y^2,$$

ou seja,

$$C: \quad z = x^2 - y^2 \quad e \quad 2x^2 + y^2 = 1, \text{ de onde segue que}$$

$$C: \quad z = x^2 - y^2 \;\; (I) \quad e \quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + y^2 = 1. \quad (*)$$

Agora podemos parametrizar C, escrevendo na equação em (*):

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} cos(t) \text{ e } y = sen(t), \text{ com } 0 \le t \le 2\pi. \quad (**)$$

Substituindo (**) em (I), temos que $z = \frac{1}{2}cos^2 t - sen^2 t$. Logo,

$$C: r(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} cos(t),\ sen(t), \frac{1}{2}cos^2 t - sen^2 t\right), \text{ com } 0 \le t \le 2\pi.$$

Só queria confirmar se a resposta da apostila está errada, lá temos: r (t) = (√2/2 cos (t)) ao invés de (1/√2 cos (t))como você colocou agora.

Note que: $\frac{1}{\sqrt{2}} cos(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} cos(t)$.

Professora, como faço para encontrar os dois pontos?

Resposta: Para encontrar os dois pontos, você deve considerar $r'(t)$ // (1,0,0). Isso porque o vetor velocidade tangencia a curva em $r(t)$ e, portanto, é um vetor diretor para a reta no ponto $r(t)$. Dessa forma, você terá $r'(t) = k.(1, 0, 0)$, onde k é uma constante não nula. Com isso,

$$cos(t) = 0 \quad \text{e} \quad -3\, sen(t)\, cos(t) = 0.$$

Logo, $t_1 = \frac{\pi}{2}$ e $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Os pontos são:

$$P = r(t_1) = r(\tfrac{\pi}{2}) = (0, 1, -1)$$

e

$$Q = r(t_2) = r(\tfrac{3\pi}{2}) = (0, -1, -1).$$