

1.- El beneficio en euros que obtiene una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18000$, $50 \leq x \leq 350$.

a) ¿Cuál es el beneficio obtenido si vende 100 unidades? ¿Cuántas unidades debe vender para obtener un beneficio de 13500 €?

Resolución

Si vende 100 unidades, $x = 100$ y el beneficio es $B(100) = -100^2 + 360 \cdot 100 - 18000 = 8000$ €

Si el beneficio fuese de 13500 € entonces $B(x) = 13500 \Rightarrow -x^2 + 360x - 18000 = 13500$

$$-x^2 + 360x - 31500 = 0 ; x = \frac{-360 \pm \sqrt{129600 - 4 \cdot (-1) \cdot (-31500)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-360 \pm 60}{-2}, x = 150 \text{ o } x = 210$$

Luego, para que el beneficio sea 13500 € debe vender 150 unidades o 210 unidades

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?

Resolución

Hallemos el máximo de la función $B(x)$: Tenemos que $B'(x) = -2x + 360 = 0 \Leftrightarrow x = 180$

El valor $x = 180$ es el posible extremo relativo.

Evaluamos $B(x)$ en $x = 50$, $x = 180$ y $x = 350$ y el valor mayor será el que buscamos.

$$B(50) = -50^2 + 360 \cdot 50 - 18000 = -2500 \quad B(180) = -180^2 + 360 \cdot 180 - 18000 = 14400$$

$$B(350) = -350^2 + 360 \cdot 350 - 18000 = -14500. \text{ Luego, el máximo de } B \text{ corresponde a } (180, 14400).$$

Es decir, debe vender 180 artículos obteniendo un beneficio máximo de 14400 €

c) Represente gráficamente la función y determine cuántas unidades hay que vender para no obtener pérdidas.

Resolución

Al ser una función cuadrática sabemos que la gráfica es un trozo de parábola, entre $x = 50$, $x = 350$.

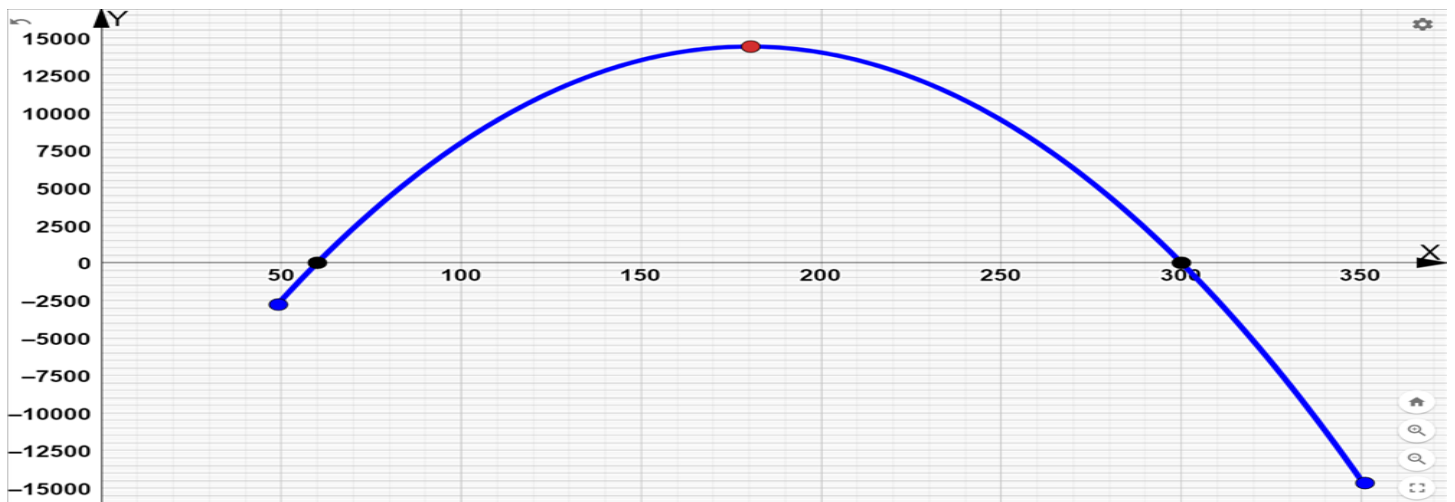
Son puntos destacados de la gráfica $(50, -2500)$, $(180, 14400)$ y $(350, -14500)$.

El máximo es $V(180, 14400)$, que es el vértice de la parábola.

Puntos de corte con el eje X: $B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 360x - 18000 = 0$

$$x = \frac{-360 \pm \sqrt{129600 - 4 \cdot (-1) \cdot (-18000)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-360 \pm 240}{-2}, x = 60 \text{ o } x = 300. \text{ Los puntos son } (60, 0) \text{ y } (300, 0)$$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0$, $y = B(0)$, que no existe porque $50 \leq x \leq 350$



Para no obtener pérdidas hay que vender entre 60 y 300 unidades.

2.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - bx - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de a y b, para que la función sea derivable en $x = 0$.

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$ pues su expresión se puede calcular para cualquier valor de x.

Nótese que $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y este valor no es menor que 0.

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en $x = 0$: $f(x) = f(x) \Rightarrow \frac{a}{0-1} = 0^2 - b \cdot 0 - 1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$

Además, para $x \neq 0$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - b, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como debe ser derivable en $x = 0$, $f'(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{-a}{(0-1)^2} = 2 \cdot 0 - b \Rightarrow -a = -b \Rightarrow a = b$.

Conclusión: para que f sea derivable en $x = 0$ debe ser $a = b = 1$

b) Para $a = 1$ y $b = 2$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Resolución

Para $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 2$. Como $f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ y

$f(x_0) = f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -1$ rtg: $y = 2(x - 2) - 1 \Rightarrow$ rtg: $y = 2x - 5$

3.- Una empresa quiere invertir en productos financieros un mínimo de un millón de euros y un máximo de seis millones de euros. La rentabilidad que obtiene viene dada en función de la cantidad invertida, x, por la siguiente expresión $\begin{cases} x - 2, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 10x - 16, & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$, donde tanto x, como R(x), están expresadas en millones de euros.

a) Estudie la continuidad de la función R.

Resolución

Observamos que el dominio es $[1, 6]$ y para $x \neq 2$ R es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Estudiemos la continuidad en $x = 2$:

$R(x) = 2 - 2 = 0$; $R(x) = -x^2 + 10x - 16 = 0$; $R(2) = -2^2 + 10 \cdot 2 - 16 = 0$

Como $R(x) = R(x) = R(2)$, f es continua en $x = 2$

Luego, R es continua en su dominio, o sea en el intervalo $[1, 6]$

b) Esboce la gráfica de la función.

Resolución

$R(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 10x - 16, & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$. Para $x \neq 2$, R es derivable por ser el resultado de operar con

funciones derivables y $R'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -2x + 10, & \text{si } 2 < x \leq 6 \end{cases}$

$R'(x) = 1 \neq R'(x) = -2 \cdot 2 + 10 = 6 \Rightarrow R$ NO es derivable en $x = 2$

Además, $\{ \text{Si } 1 \leq x < 2, R'(x) = 1 > 0 \Rightarrow \text{creciente} \text{ Si } 2 < x \leq 6, R'(x) = -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \}$.
 Hagamos una tabla de signos de $R'(x)$:

	(1, 2)	2	(2, 5)	5	(5, 6)
$f'(x)$	+	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

R es creciente en $(1, 2) \cup (5, 6)$ y decreciente en $(2, 5)$. El mínimo relativo se alcanza para $x = 5$.

Evaluamos $R(x)$ en $x = 1, x = 2, x = 5$ y $x = 6$: $R(1) = 1 - 2 = -1$

$R(2) = -2^2 + 10 \cdot 2 - 16 = 0$ $R(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 - 16 = 9$ $R(6) = -6^2 + 10 \cdot 6 - 16 = 8$

Los puntos más destacados de la gráfica de R son $(1, -1), (2, 0), (5, 9)$ y $(6, 8)$

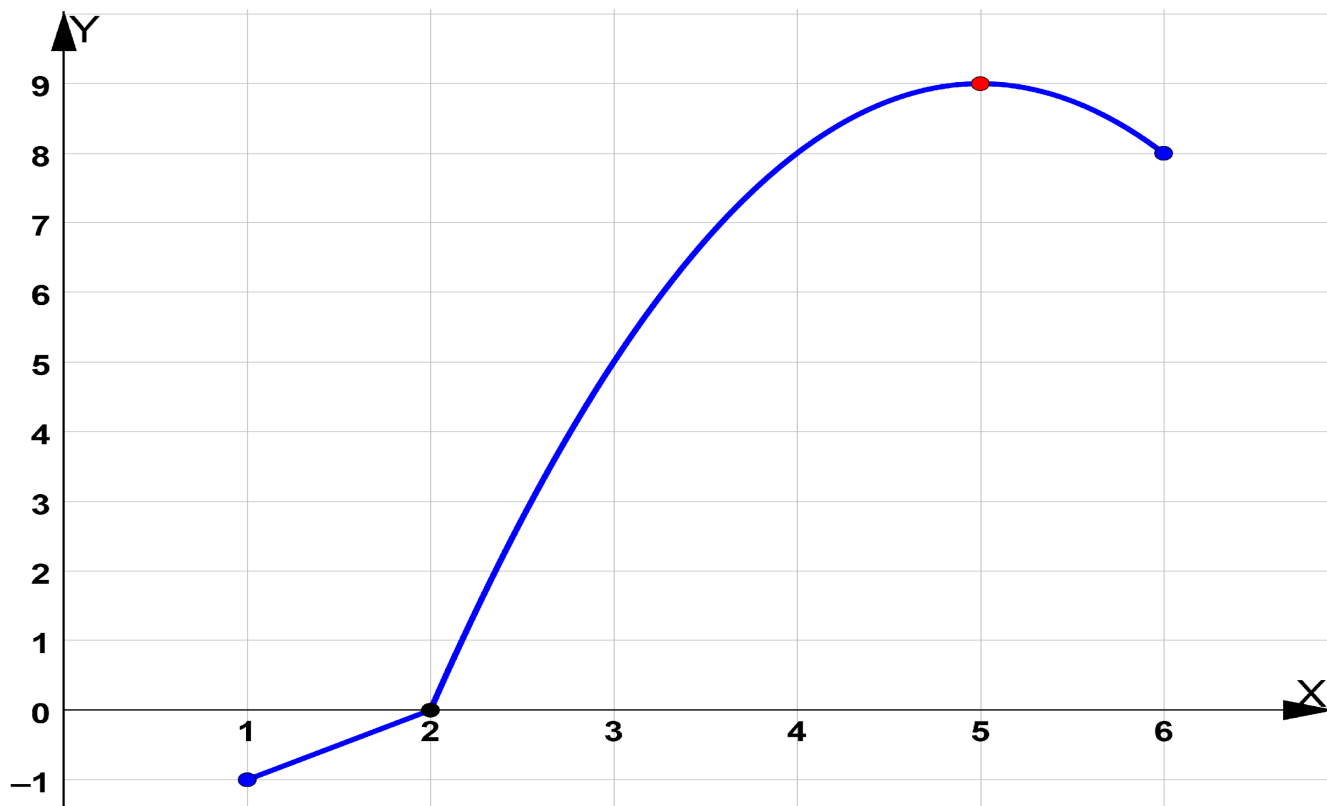
Los puntos de corte con los ejes son:

- Eje X: $R(x) = 0$

$\{ \text{para } 1 \leq x < 2, x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (imposible)} \text{ para } 2 \leq x \leq 6, -x^2 + 10x - 16 = 0; x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-1)} \}$

El punto de corte es $(2, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0, y = R(0)$, que no existe porque $1 \leq x \leq 6$



c) ¿Qué cantidad debe invertir para obtener la máxima rentabilidad y a cuánto asciende ésta?

¿Para qué valores de x la rentabilidad es positiva?

Resolución

Teniendo en cuenta lo anterior, debe invertir 5 millones de euros obteniendo entonces una rentabilidad de 9 millones de euros.

Por otra parte, la rentabilidad es positiva si se invierten entre 2 y 6 millones de euros

4.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax - 3x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 + b, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule los valores de a y b para que la función f sea derivable en $x = 1$.

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$ pues su expresión se puede calcular para cualquier valor de x.

Para $x \neq 1$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Además, $\begin{cases} \text{Si } x < 1, & f'(x) = a - 6x \\ \text{Si } x > 1, & f'(x) = 4x \end{cases}$. Luego, para $x \neq 1$

$$f'(x) = \begin{cases} a - 6x, & \text{si } x < 1 \\ 4x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como debe ser continua en $x = 1$: $f(x) = f(x) \Rightarrow a \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 2 \cdot 1^2 + b \Rightarrow a - b = 5$

Como debe ser derivable en $x = 1$: $f'(x) = f'(x) \Rightarrow a - 6 \cdot 1 = 4 \cdot 1 \Rightarrow a - 6 = 4 \Rightarrow a = 10$

Sustituyendo el valor $a = 10$ en la 1ª ecuación, $10 - b = 5$, de donde $b = 5$.

Por tanto, para que f sea derivable en $x = 1$ debe ser $a = 10$, $b = 5$.

b) Para $a = 3$ y $b = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f.

Resolución

Para $a = 3$, $b = -2$, $f(x) = \begin{cases} 3x - 3x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 - 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y para $x \neq 1$,

$$f'(x) = \begin{cases} 3 - 6x, & \text{si } x < 1 \\ 4x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Obsérvese que f es continua en $x = 1$ pero no derivable.

Estudio de la monotonía:

$\begin{cases} \text{Si } x < 1, & f'(x) = 3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \text{Si } x > 1, & f'(x) = 4x > 0 \end{cases}$ (creciente). Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	+	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(\frac{1}{2}, 1)$

Estudio de la curvatura: Para $x \neq 1$,

$$f''(x) = \begin{cases} -6 < 0, & \text{si } x < 1 \Rightarrow \text{cóncava} \\ 4 > 0, & \text{si } x > 1 \Rightarrow \text{convexa} \end{cases}$$

f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.

5.- En una especie animal la contracción del iris, en décimas de milímetro, después de exponer el ojo a una luz brillante durante un determinado tiempo, viene dada por $f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{4}{t-1}, & \text{si } t > 1 \end{cases}$, donde t es el

tiempo, en segundos, que transcurre desde que se concentra la luz en el ojo.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

Resolución

Observamos que el dominio de f es $[0, +\infty)$. Obsérvese que $t - 1 = 0$ si $t = 1$, valor que no es mayor que 2.

Para $t \neq 2$ f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Además, $\{ \text{Si } 0 \leq t < 2, f'(t) = 2t \text{ Si } t > 2, f'(t) = \frac{0(t-1) - 4.1}{(t-1)^2} = \frac{-4}{(t-1)^2} \text{ Para } t \neq 2,$
 $f'(t) = \{ 2t, \text{ si } 0 \leq t < 2 \frac{-4}{(t-1)^2}, \text{ si } t > 2$

Estudiemos la continuidad en $t = 2$:

$$f(t) = 2^2 = 4 ; f(t) = \frac{4}{2-1} = 4 ; f(2) = 2^2 = 4.$$

Como $f(t) = f(t) = f(2)$, f es continua en $t = 2$

Estudiemos la derivabilidad en $t = 2$: $f'(t) = 2.2 = 4 ; f'(t) = \frac{-4}{(2-1)^2} = -4$

Como $f'(t) \neq f'(t)$, f NO es derivable en $t = 2$

Luego, f es continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $[0, +\infty) - \{2\}$

b) Represente gráficamente la función f , determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas, en caso de que existan.

Resolución

$$f(t) = \{ t^2, \text{ si } 0 \leq t \leq 2 \frac{4}{t-1}, \text{ si } t > 2 \text{ y para } t \neq 2, f'(t) = \{ 2t, \text{ si } 0 \leq t < 2 \frac{-4}{(t-1)^2}, \text{ si } t > 2$$

Estudio de la monotonía:

$$\{ \text{Si } 0 < t < 2, f'(t) = 2t > 0 \text{ (creciente) Si } t > 2, f'(t) = \frac{-4}{(t-1)^2} < 0 \text{ (decreciente)} \}$$

f es creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(2, +\infty)$. Hay un máximo en $(2, f(2)) = (2, 4)$

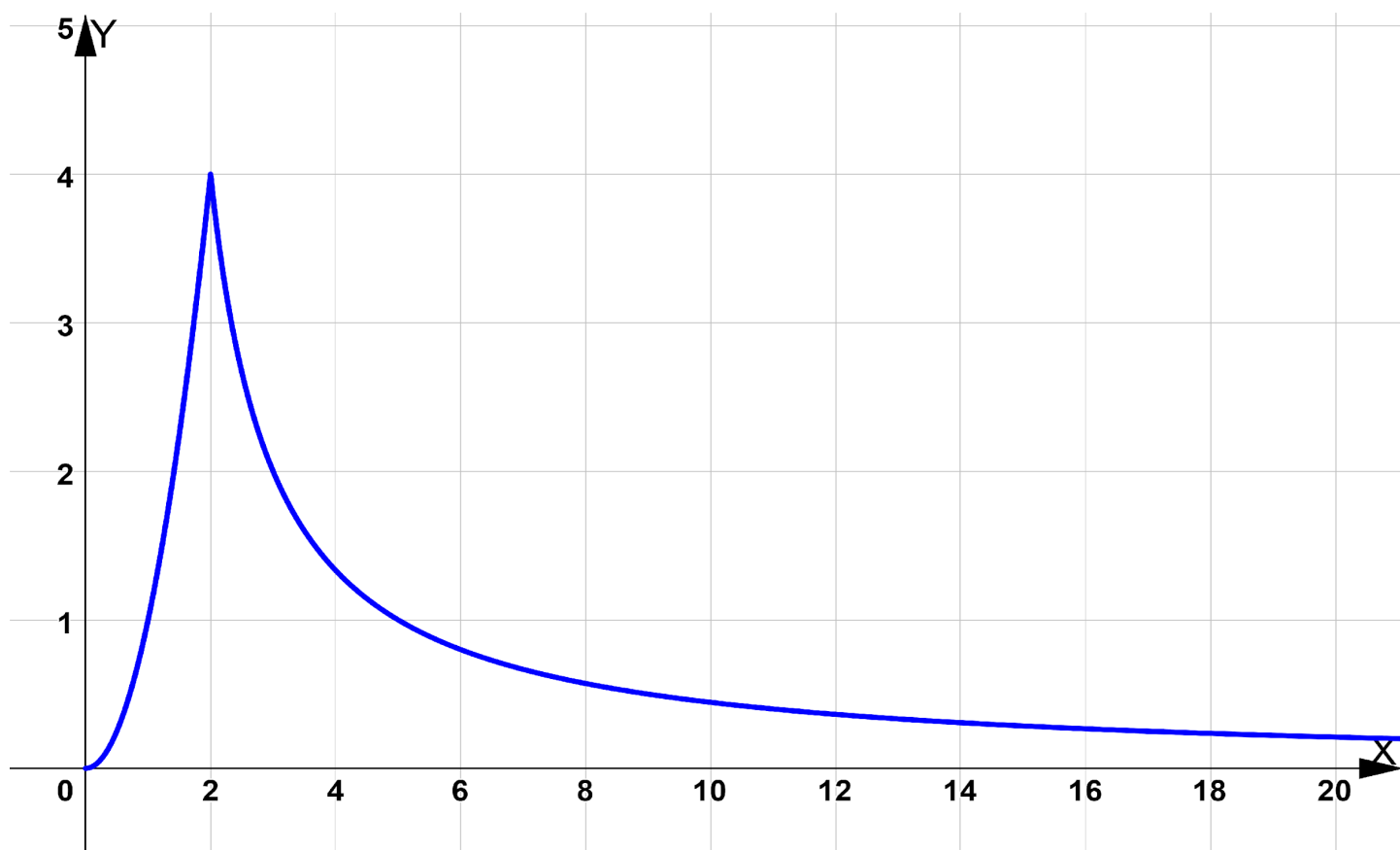
En cuanto a las asíntotas, sabemos que $f(t) = \{ t^2, \text{ si } 0 \leq t \leq 2 \frac{4}{t-1}, \text{ si } t > 2$, es continua, luego no tiene asíntotas verticales.

Estudiemos las asíntotas en $+\infty$:

$$f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{t-1} = 0. \text{ Luego, } f \text{ tiene asíntota horizontal en } +\infty, \text{ que el eje de abscisas}$$

Como el dominio de f es $[0, +\infty)$ no tiene sentido hablar de asíntotas en $-\infty$.

La gráfica es



c) Determine en qué instante se obtiene la máxima contracción y su valor.

Resolución

Teniendo en cuenta lo anterior, la máxima contracción se obtiene a los 2 segundos y vale 4 décimas de milímetro, es decir 0,4 milímetros.

6.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4}, & \text{si } x \leq 0 \\ x + 3, & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 + 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de la función en su dominio y clasifique sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$ pues su expresión se puede calcular para cualquier valor de x .

Obsérvese que $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ y 4 no es un valor menor o igual que 0.

Para $x \neq 0, x \neq 2$, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

- Estudiemos la continuidad en $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{0-4} = -\frac{1}{4} \quad f(x) = 0 + 3 = 3 \quad f(0) = \frac{1}{0-4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{discontinuidad de salto finito}$$

- Estudiemos la continuidad en $x = 2$:

$$f(x) = 2 + 3 = 5 \quad f(x) = 2^2 + 1 = 5 \quad f(2) = 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow \text{continua}$$

Conclusión: f sólo es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b) Estudie la derivabilidad de la función en su dominio.

Resolución

Sabemos que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y para $x \neq 0, x \neq 2$, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables.

Además, $\{ \text{Si } x < 0, f'(x) = \frac{0 \cdot (x-4) - 1 \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-1}{(x-4)^2} \text{ Si } 0 < x < 2, f'(x) = 1 \text{ Si } x > 2, f'(x) = 2x \}$.
 Para $x \neq 0, x \neq 2, f'(x) = \left\{ \frac{-1}{(x-4)^2}, \text{ si } x < 0, 1, \text{ si } 0 < x < 2, 2x, \text{ si } x > 2 \right\}$

- Estudiemos la derivabilidad en $x = 0$: Como f no es continua en $x = 0$, tampoco es derivable

- Estudiemos la derivabilidad en $x = 2$: $f'(x) = 1$; $f'(x) = 2 \cdot 2 = 4$

Como $f'(x) \neq f'(x)$, f no es derivable en $x = 2$. Conclusión: f sólo es derivable en $\mathbb{R} - \{0; 2\}$

7.- Sea la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

a) Estudie su monotonía y determine sus extremos relativos.

Resolución

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 ; f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

Para los signos de $f'(x)$ téngase en cuenta que la gráfica de $f'(x)$ es una parábola convexa que corta al eje X en -2 y 2

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$

El máximo relativo se alcanza para $x = -2$, $y = f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 1 = 17$. Punto $M(-2, 17)$

El mínimo relativo se alcanza para $x = 2$, $y = f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1 = -15$. Punto $N(2, -15)$

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es
 rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $x_0 = 1$. Como $f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 = -9$ y $f(x_0) = f(1) = 1^3 - 12 \cdot 1 + 1 = -10$

$$\text{rtg: } y = -9(x - 1) - 10 \Rightarrow \text{rtg: } y = -9x - 1$$

8.-

a) Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ presente un extremo relativo en el punto $(2, 6)$.

Resolución

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$. Para que la gráfica tenga un extremo relativo en $(2, 6)$ debe pasar por el

punto (2, 6) y $f'(2) = 0$.

Es decir,

$$\{f(2) = 6 \quad f'(2) = 0 \Rightarrow \{2^3 + a \cdot 2^2 + b = 6 \quad 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0 \Rightarrow \{8 + 4a + b = 6 \quad 12 + 4a = 0 \Rightarrow \{4a + b = -2 \quad 4a = -12 \Rightarrow \{a = -3 \quad b = 10$$

Sustituyendo el valor $a = -3$ en la 1ª ecuación, $4 \cdot (-3) + b = -2$, $b = 10$. Conclusión: $a = -3$, $b = 10$

b) Para $a = 1$ y $b = 1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

Para $a = 1$ y $b = 1$, $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ y $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 1$. Como $f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$ y

$$f(x_0) = f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 = 3, \text{ rtg: } y = 5(x - 1) + 3 \Rightarrow \text{rtg: } y = 5x - 2$$

9.- (prueba ordinaria) Sea $f(t)$ el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t , medido en meses, transcurrido desde su inauguración

$$f(t) = \left\{ -\frac{5}{2}t^2 + 20t, \text{ si } 0 \leq t \leq 6 \quad \frac{90t - 240}{t + 4}, \text{ si } t > 6 \right.$$

a) ¿Evoluciona la función f de forma continua?

Resolución

Observamos que el dominio de f es $[0, +\infty)$.

Obsérvese que $t + 4 = 0$ si $t = -4$ y -4 no es un valor mayor que 6.

Para $t \neq 6$, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Estudiemos la continuidad en $t = 6$:

$$f(t) = -\frac{5}{2}6^2 + 20 \cdot 6 = 30 \quad f(t) = \frac{90 \cdot 6 - 240}{6 + 4} = 30 \quad f(6) = -\frac{5}{2}6^2 + 20 \cdot 6 = 30.$$

Luego, f es continua en su dominio. Por tanto, evoluciona de forma continua

b) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?

Resolución Como 2 años son 24 meses, nos piden calcular $f(24) = \frac{90 \cdot 24 - 240}{24 + 4} \cong 68,57\%$

c) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40%?

Resolución

Nos dicen que $f(t) = 40$. Hay que calcular t .

$$\text{Si } 0 \leq t \leq 6, \quad -\frac{5}{2}t^2 + 20t = 40 \Rightarrow -5t^2 + 40t - 80 = 0 \Rightarrow -t^2 + 8t - 16 = 0$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8 \pm 0}{-2}, t = 4$$

Si $t > 6$, $\frac{90t - 240}{t + 4} = 40 \Rightarrow 90t - 240 = 40t + 160 \Rightarrow 50t = 400 \Rightarrow t = 8$

Luego, el porcentaje de ocupación es del 40% a los 4 meses y a los 8 meses de la inauguración

d) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

Resolución

Como $f(t) = \frac{90t - 240}{t + 4} = 90$, no estaría completo en ningún momento.

Sólo podría llegar a estar al 90% de ocupación.

10.- (prueba ordinaria)

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = \frac{e^{5x} - x}{x^2 - x}$, $g(x) = (2x^2 - x)^3 \ln(x^3 + 2)$

Resolución

$$f'(x) = \frac{(e^{5x} - x)'(x^2 - x) - (e^{5x} - x)(x^2 - x)'}{(x^2 - x)^2} = \frac{(e^{5x} \cdot 5 - 1)(x^2 - x) - (e^{5x} - x)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2}$$

Efectuando y simplificando: $f'(x) = \frac{5x^2 e^{5x} - 5xe^{5x} - x^2 + x - 2xe^{5x} + e^{5x} + 2x^2 - x}{(x^2 - x)^2} = \frac{5x^2 e^{5x} - 7xe^{5x} + e^{5x} + x^2}{(x^2 - x)^2}$

$$g'(x) = \left[(2x^2 - x)^3 \right]' \ln(x^3 + 2) + (2x^2 - x)^3 \left[\ln(x^3 + 2) \right]' =$$

$$= 3(2x^2 - x)^2 (4x - 1) \ln(x^3 + 2) + (2x^2 - x)^3 \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

Sacando factor común, $g'(x) = 3(2x^2 - x)^2 \left[(4x - 1) \ln(x^3 + 2) + (2x^2 - x) \frac{x^2}{x^3 + 2} \right]$

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(x_0, h(x_0))$ es rtg: $y = h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

En este caso, $x_0 = 1$ y $h'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$$h'(x_0) = h'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1 \quad ; \quad h(x_0) = h(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad \text{rtg: } y = -1(x - 1) + 1 \Rightarrow \text{rtg: } y = -x + 2$$

11.- (prueba extraordinaria) Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

a) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -2$.

Resolución

f es derivable en $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$

- Al tener un mínimo para $x = -1$, $f'(-1) = 0 \Rightarrow 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow 2a - b = 3$

- Al tener un punto de inflexión para $x = -2$, $f''(-2) = 0 \Rightarrow 6(-2) + 2a = 0 \Rightarrow a = 6$

Sustituyendo el valor $a = 6$ en la 1ª ecuación, $2.6 - b = 3$, de donde $b = 9$. Por tanto, debe ser $a = 6$, $b = 9$

b) Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

Resolución

Para $a = 6$ y $b = 9$, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$, $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$. Puntos de corte con los ejes:

eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0$, $x(x^2 + 6x + 9) \Rightarrow x = 0$, $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$

Los puntos son $(0, 0)$ y $(-3, 0)$; eje Y: $x = 0$, $y = f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$. El punto es $(0, 0)$

Monotonía y extremos: $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$;

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad x = -1 \quad x = -3$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$: Para los signos de $f'(x)$ téngase en cuenta que la gráfica de $f'(x)$ es una parábola convexa que corta al eje X en -1 y -3

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

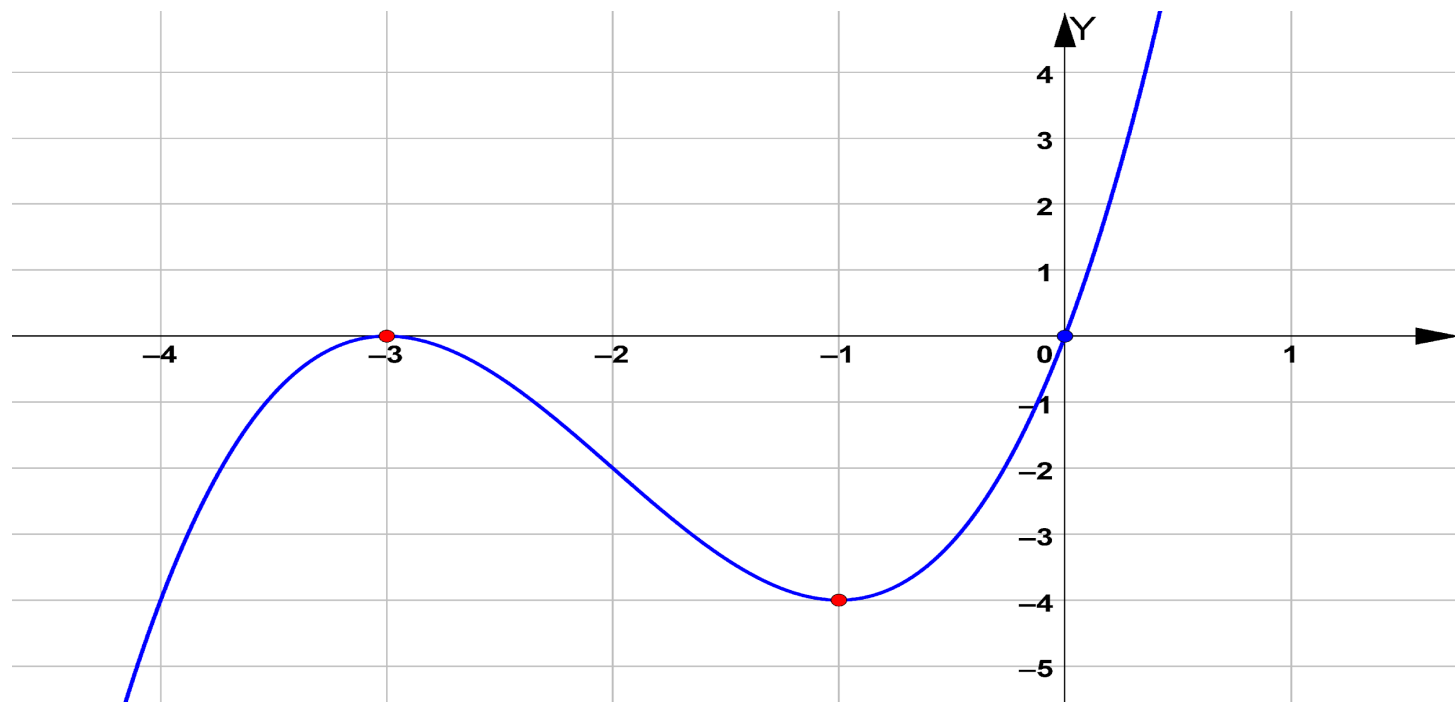
f es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ y decreciente en $(-3, -1)$

Máximo relativo para $x = -3$, $y = f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) = 0$. Punto $M(-3, 0)$

Mínimo relativo para $x = -1$, $y = f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) = -4$. Punto $N(-1, -4)$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$



12.- (prueba ordinaria) Se consideran las siguientes funciones $f(x) = \frac{5x-16}{x}$ y $g(x) = x^2$.

a) Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f'(x) = g'(x)$.

Resolución

$$f'(x) = \frac{5x - (5x-16) \cdot 1}{x^2} = \frac{16}{x^2}, \quad g'(x) = 2x; \quad f'(x) = g'(x) \Rightarrow \frac{16}{x^2} = 2x \Rightarrow 2x^3 = 16 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \text{ Aquí, } x_0 = 2, f'(x_0) = f'(2) = \frac{16}{2^2} = 4 \text{ y } f(x_0) = f(2) = \frac{5 \cdot 2 - 16}{2} = -3$$

$$\text{rtg: } y = 4(x - 2) - 3 \Rightarrow \text{rtg: } y = 4x - 11$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g en un punto $A(x_0, g(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0).$$

$$x_0 = 2, g'(x_0) = g'(2) = 2 \cdot 2 = 4, g(x_0) = g(2) = 2^2 = 4, \text{rtg: } y = 4(x - 2) + 4 \Rightarrow \text{rtg: } y = 4x - 4$$

Las rectas tangentes no se cortan porque tienen la misma pendiente, que es 4. Son paralelas

13.- Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1}, & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 10x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Halle el dominio de f .

Resolución

Como $x - 1 = 0$ si $x = 1$ y 1 está en el intervalo $(-\infty, 2)$, el dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$ porque su expresión se puede calcular para cualquier valor de x excepto para $x = 1$.

b) Estudie la derivabilidad de f en $x = 2$.

Resolución

Estudiemos primero la continuidad en $x = 2$:

$$f(x) = \frac{2 \cdot 2}{2-1} = 4; \quad f(x) = 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = -12; \quad f(2) = 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = -12.$$

Como $f(x) \neq f(x)$, f no es continua en $x = 2$. Por tanto, tampoco puede ser derivable

c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

Para $x \neq 1$, $x \neq 2$ f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables.

$$\text{Si } x < 2, x \neq 1, f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad \text{Si } x > 2, f'(x) = 2x - 10,$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 2, x \neq 1 \\ 2x - 10, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

$$\text{En este caso, } x_0 = 0, f'(x_0) = f'(0) = \frac{-2}{(0-1)^2} = -2 \text{ y } f(x_0) = f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0-1} = 0$$

$$\text{rtg: } y = -2(x - 0) + 0 \Rightarrow \text{rtg: } y = -2x$$

14.- Sea la función f definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } x < 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x = -1$

Resolución

Para $x \neq 1$, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } x < 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Al tener un extremo relativo para $x = -1$, $f'(-1) = 0$. Luego, $2(-1) + a = 0 \Rightarrow a = 2$

- Al ser continua, en particular debe ser continua en $x = 1$.

$$\text{Luego, } f(x) = f(x) \Rightarrow 1^2 + a \cdot 1 + b = 0 \quad a + b = -1$$

Sustituyendo el valor $a = 2$, obtenemos $2 + b = -1$, de donde $b = -3$. Conclusión: $a = 2$, $b = -3$

b) Para $a = -1$ y $b = 1$, estudie la derivabilidad de f en $x = -1$ y $x = 1$.

Resolución

$$\text{Para } a = -1 \text{ y } b = 1, f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{si } x < 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ y si } x \neq 1, \\ f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x < 1 \\ 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para $x \neq 1$, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables.

En particular, f es derivable en $x = -1$

Estudiemos la continuidad en $x = 1$:

$$f(x) = 1^2 - 1 + 1 = 1 \quad ; \quad f(x) = 0 \quad ; \quad f(1) = 0$$

Como $f(x) \neq f(x)$, f no es continua en $x = 1$. Por tanto, tampoco es derivable en $x = 1$

Conclusión: f es derivable en $x = -1$ pero no lo es en $x = 1$