



בית ספר יאני יאני
סמל בי"ס 248013
כפר יאסיף ת.ד. 12, כפר יאסיף
טל. 04-9961252



Chladni plates



פרטי התלמיד	פרטי התלמיד
פייסל ח'טיב	מריאנה עביד
ת.ז. 324837913	ת.ז. 324833110
כפר יסיף	ג'דידה מכר
טל: 0523502520	טל: 0549426007
אי-מייל: Faisal.kh12a@gmail.com	אי-מייל: nossa.ob@gmail.com

מנחה: ויקי סיגלר
בוסתן הגליל
בי"ס סולם צור
vicky.sigler@gmail.com

תוכן עניינים

פרק 1 - מבוא	4
שאלות המחקר	4
מטרת העבודה והמחקר	4
רקע תאורטי	4
פרק 2 – סקירת ספרות	7
סיכום המאמרים:	8
פרק 3 - ניסויים מקדימים	9
ניסוי 1 – גל עומד במיתר (תדירות כפונקציה של מתיחות)	9
מערך הניסוי	9
מטרת הניסוי	9
השערה	9
דיון	10
ניסוי 2 - הקשר שבין תדירות לאורך גל במיתר	11
מערך הניסוי	11
מטרת הניסוי	11
השערה	11
תוצאות הניסוי:	11
דיון	12
ניסוי 3- ניסוי הסרגלים	13
מערך הניסוי	13
מטרת הניסוי	13
השערה	13
תוצאות הניסוי	14
דיון	16
מסקנות	16
פרק 4 - הניסוי המרכזי	17
מטרת הניסוי	17
מערך הניסוי	17
	17
	17
השערה	18
המודל התאורטי של צלחת ריבועית	18

המודל התאורטי של צלחת מלבנית 19

20 תוצאות הניסוי

21 צלחות ריבועיות

25 צלחות מלבניות

27 דיון

27 צלחת ריבועית

28 צלחת מלבנית

29 סיכום

30 רשימת מקורות

פרק 1 - מבוא

בחרנו לחקור צלחות כלדני ואת הדפוסים המיוחדים שנוצרים כאשר מפעילים מתנד בתדירויות שונות. הנושא עניין אותנו בעקבות צפייה בסרטון באינטרנט. ראינו כי כשמפעילים מתנד על צלחות מתכת מצורות שונות, ומפזרים על הצלחת גרגירים (של חול, מלח, סוכר), הגרגירים מסתדרים בתבניות שונות כתלות בתדירות. מעניין אותנו להבין למה נוצרות הצורות, למה בתדרים שונים יש צורות שונות, האם אנחנו יכולים לצפות את הצורות הנוצרות כתלות בתדר, איך צורות שונות של צלחות או חומרים שונים משפיעים על הצורות הנוצרות.

שאלות המחקר

איך התדר משפיע על כמות קווי הצומת של צלחת ריבועית?
איך הצורות של הצלחת משפיעות על כמות קווי הצומת בתדרים השונים?
האם נוכל למצוא נוסחה מקשרת לכל צורה של צלחת?
איך החומר של הצלחת משפיע על כמות קווי הצומת בתדרים השונים?

מטרת העבודה והמחקר

מטרת העבודה והמחקר היא להבין לעומק את הקשר בין התדירות, צורת הצלחות, החומר ממנו עשויות והתבניות שנוצרות על הצלחות.

רקע תאורטי

לצורך הבנת הנושא נדרשנו להיכנס לעומק לנושא הגלים. הבנו שהצורות נוצרות בגלל שלמעשה נוצר גל עומד בצלחת בתדרים מסוימים מאוד.

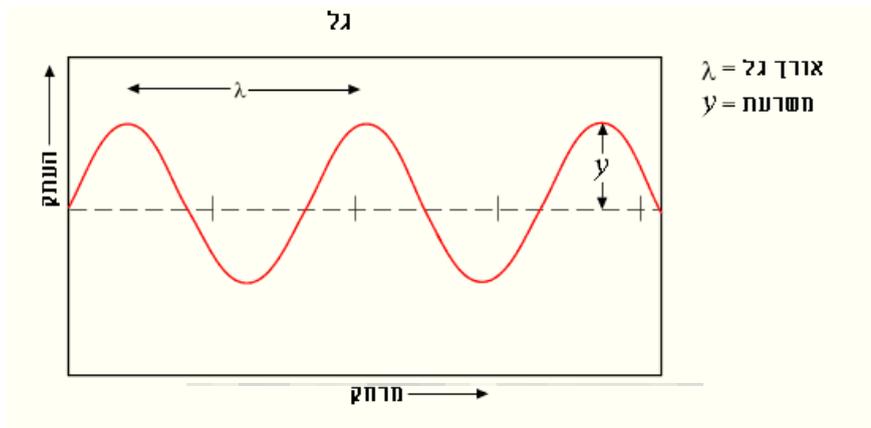
גל הוא התפשטות או התקדמות של הפרעה בתווך המרחב. יש גלים שיכולים להתפשט רק בחומר, כמו גלי קול או גלים במים, ואחרים יכולים להתפשט גם בריק, כמו גלים אלקטרומגנטיים. בדרך, גל מאופיין ע"י התפשטות מחזורית בזמן. גלים מראים תופעות מיוחדות כמו התאבכות, עקיפה ושבירה. מאפייני הגל:

λ – אורך הגל

f – תדירות הגל (נמדדת בהרץ)

v – מהירות התקדמות הגל

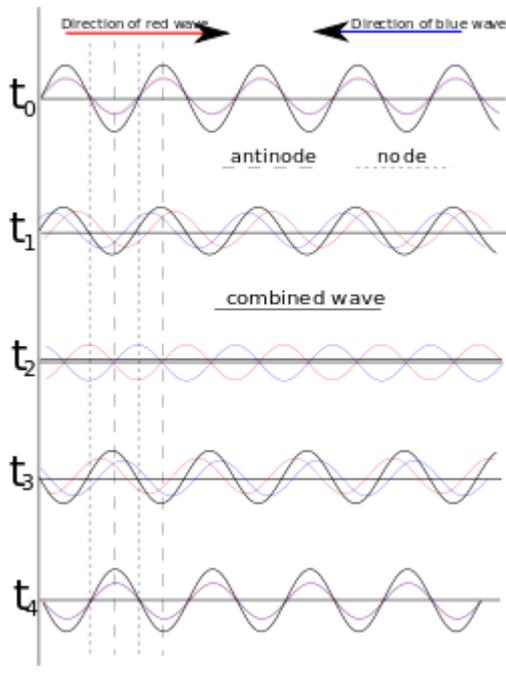
כאשר: $v = \lambda * f$



תהודה או רזוננס הינו מצב של מערכת

פיזיקלית הנתונה להשפעת כוח חיצוני, אשר מתקבל כאשר הכוח פועל בתדירות קרובה לאחת מתדירויות התנודה הטבעית של המערכת.

גל עומד הוא צורה רציפה של אופן תנודה. גל עומד נוצר ע"י התאבכות, כלומר סופרפוזיציה של גלים והחזרות שלהם. גל עומד יכול להווצר כתוצאה משני גלים הנעים בכיוונים הפוכים. אופני התנודה של גלים עומדים מייצגים את מצבי התהודה של המערכת, כלומר את המצבים שבהם ניתן לעורר את המערכת להיכנס לתנודות בקלות יחסית.



נקודת צומת (node) מוגדרת כנקודה שאינה זזה ונמצאת במנוחה. נקודות אלה נוצרות כתוצאה מכך שסכום הגלים העוברים דרכן תמיד אפס. נקודות תבור (antinode) הן הנקודות שבהן מתרחשת התנועה המירבית.

התקדמות גלים בתוך מוצק

במוט פועלים כמה סוגים של גלים: גלי אורך, גלי פיתול, וגלי כיפוף. כל אלה מביאים לפתרון הבא עבור מוט עם קצוות חופשיים:

$$f_n = \frac{0.113h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} (2n + 1)^2$$

כאשר:

h – עובי המוט

L – אורך המוט

E – מודול יאנג של החומר

ρ – צפיפות החומר

(מתוך (Rossing & Russel, 1990))

גלים בצלחת דקה

כמו מוט, צלחת מעבירה את אותם סוגים של גלים: גלי אורך, גלי פיתול וגלי כיפוף, ויכולים להיות כמה תנאי שפה. אנחנו נתייחס רק לתנאי שפה של צלחת חופשית בכל הקצוות.

בצלחת ריבועית התדירות הראשונה ניתנת ע"י:

מצאנו בספרות (Waller, Vibrations of Free Rectangular Plates, 1949) כי בקירוב ניתן לבטא את התדירות כפונקציה של המודים m, n (מספר קוי הצומת בצלחת) כיחסי ל:

צלחת מלבנית

הפתרון עבור ממברנה אידאלית מלבנית הוא:

$$f(n, m) = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

עבור צלחות מלבניות הניתוח היה יותר קשה, וגם התקשנו למצוא מודל ברור בספרות. במאמר של Warburton, (1954) מצאנו נוסחה מסובכת שמתאימה לכל צלחת מלבנית בכל תנאי השפה האפשריים:

$$\lambda^2 = G_x^4 + G_y^4 \frac{a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} [\sigma H_x H_y + (1 - \sigma) J_x J_y] . \quad (16)$$

Boundary condition	m	G _x	H _x	J _x	n	G _y	H _y	J _y	Modes m/n ± n/m exist for a = b if,
1 	2, 3, 4, ...	m-1	(m-1) ²	(m-1) ²	2, 3, 4, ...	n-1	(n-1) ²	(n-1) ²	None
2 	3, 4, 5, ...	m-½	(m-½) ² [1 - 2/(m-½)π]	(m-½) ² [1 - 2/(m-½)π]	3, 4, 5, ...	n-½	(n-½) ² [1 - 2/(n-½)π]	(n-½) ² [1 - 2/(n-½)π]	m-n = ±2, 4, 6, ...
3 	3, 4, 5, ...	m-½	(m-½) ² [1 - 2/(m-½)π]	(m-½) ² [1 + 6/(m-½)π]	3, 4, 5, ...	n-½	(n-½) ² [1 - 2/(n-½)π]	(n-½) ² [1 + 6/(n-½)π]	m-n = ±2, 4, 6, ...

אנחנו מתייחסים לתנאי שפה מס' 3 - חופשי מכל הכיוונים.

כאשר הקשר בין λ לתדירות f ניתן ע"י:

$$\lambda = \left[\frac{\rho a^4 h (2\pi f)^2}{D \pi^4 g} \right]^{1/2} \text{ frequency factor.}$$

כאשר D:

Warbuton טוען שהנוסחה לא מספיק מדוייקת עבור צלחות המתקרבות לצורת ריבוע.

פרק 2 – סקירת ספרות

בהתחלה חיפשנו באינטרנט על מאמרים והכוונה כפי שמופיע בהצעת המחקר אבל המאמרים האלה לא היו מספיק מעמיקים והיינו צריכים לפנות לספרים ומאמרים מהאקדמיה. הספר העיקרי שעזר לנו לבנות את הבסיס התאורטי (Fletcher & Rossing, 1998).

בספר מוסבר מודל של ממברנה אידאלית וגם איך צלחת שעשויה מחומר מסוים שונה מהממברנה. בספר זה לא הצלחנו למצוא מודל מספיק פשוט שכן גלינו שהבעיה של צלחת ריבועית ומלבנית עם קצוות חופשיים היא בעיה מסובכת לפתרון. מתוך הספר הזה גם מצאנו את ההסבר על פינוח הצורות שאנחנו רואים בצלחת ריבועית ולפיו גם בנינו את המודל באקסל שייתואר בהמשך. כמו כן הספר מתאר את היחס בין תדירויות הפלוס והמינוס.

עבור צלחת ריבועית החלטנו להתמקד במאמר של (Waller, Vibrations of free square plates: part I. Normal vibrating modes, 1939). במאמר הכותבת מתייחסת למודל של ריץ ובונה מודל מקורב. אנחנו השתמשנו במודל של תדירויות יחסיות.

עבור צלחות מלבניות נסינו להשתמש במודל במאמר ההמשך של (Waller, Vibrations of Free Rectangular Plates, 1949) אבל הוא לא היה מספיק מדויק בגלל שיחסי הצלעות שלנו לא היו קרובות מספיק לאילו שבמאמר. לכן השתמשנו במודל המסובך המופיע במאמר (Warburton, 1954). במודל זה הכותב מצא קשר בין התדירות לבין המודים השונים m, n עבור כל תנאי השפה האפשריים. אנחנו השתמשנו בתנאי השפה של צלחת חופשיה בקצוות. היו עוד מאמרים וספרים שנעזרנו בהם לצורך ההבנה:

(Strutt & Rayleigh, 1877)
(Leissa, 1969)
(Xiao, 2010)
(Kverno & Nolen, 2010)

סיכום המאמרים:

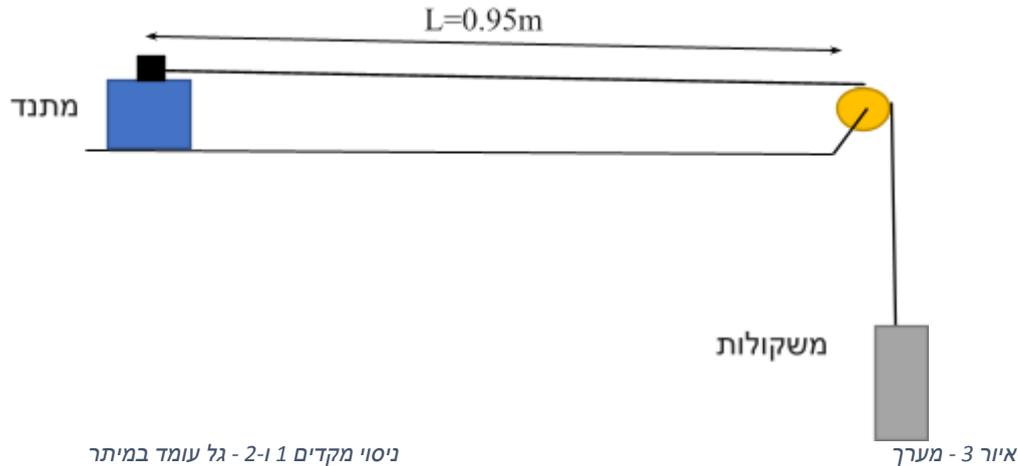
(Kverno & Nolen, 2010)	מודל בסיסי של צלחות ריבועיות ומלבניות, נסיון להוכיח את הנוסחה האידיאלית של ממברנה
(Strutt & Rayleigh, 1877)	עמ' 308 – בעיה של צלחת מלבנית מראה משוואה של הצורה, אבל לא כתלות במודים
(Fletcher & Rossing, 1998)	עמ' 70-88 – מודל של ממברנה אידיאלית, וצלחות ריבועיות ומלבניות, הכנסת הקשיחות עמ' 82 – צורות מודים בצלחות מלבניות עמ' 84 – הבנת המודים מתוך סופרפוזיציה בצלחות ריבועיות
(Rossing & Russel, 1990)	התקדמות גלים במוצק יחס בין $f+/f$ – גרף של תדירות כפונקציה של מודים
Waller, Vibrations of free square plates: (part I. Normal vibrating modes, 1939)	צלחות ריבועיות חופשיות חישוב תדירות בסיסית, ותדירויות יחסיות הבנה של מודים
Waller, Vibrations of Free Rectangular (Plates, 1949)	תדירויות טבעיות ויחסיות בצלחת מלבנית תמונות של מודים בצלחות מלבניות עם יחסי צלעות שונים
(Warburton, 1954)	נוסחה גנרית לצלחת מלבנית בכל תנאי השפה
(Leissa, 1969)	סיכום – כל צורות הצלחות, כל תנאי השפה עמ' 41 – צלחות מלבניות עמ' 87 - FFFF
(Xiao, 2010)	מבוא וסקירת מאמרים עד כה תבניות הצלחות והסבר לספירת מודים פיתוח משוואות סתומות מודל Matlab

פרק 3 - ניסויים מקדימים

ניסוי 1 – גל עומד במיתר (תדירות כפונקציה של מתיחות)

מערך הניסוי

חיברנו למתנד חוט העובר בתוך גלגלת. בצדו השני של החוט חיברנו מד כוח (עד 10 ניוטון). חיברנו למתנד מחולל אותות אנלוגי שיצר גל בתדירות משתנה. הגל העומד נוצר בגלל שבצד השני של החוט הוא מוחזק ע"י הגלגלת. בדקנו בכל מתיחות באיזה תדר נוצרה הרמוניה אחת של הגל.



הניסוי

התדירות כפונקציה למתיחות החוט בגל עומד.

מטרת

למדוד את

השערה

מצאנו את מהירות התפשטות הגל במיתר בשני אופנים שונים:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

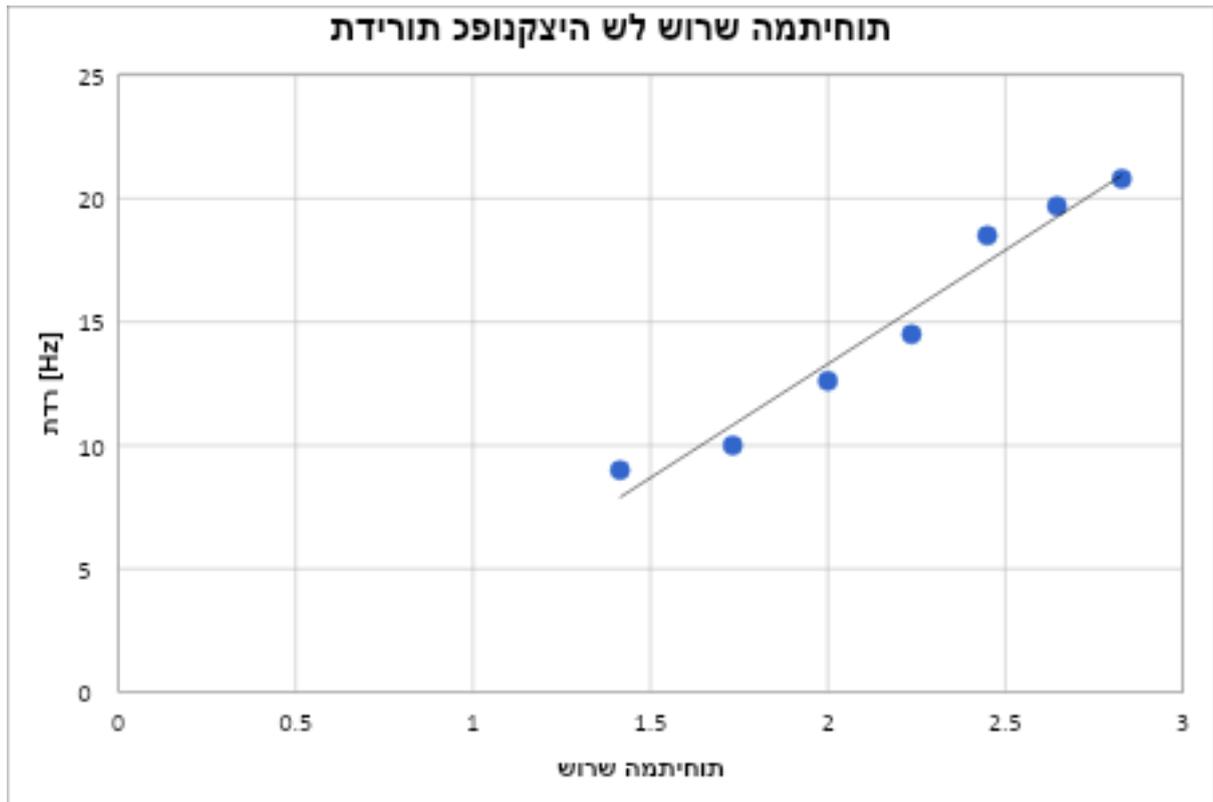
$$v = \lambda * f$$

$$\lambda * f = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

ולכן התדירות כפונקציה של המתיחות:

$$f(T) = \frac{1}{\lambda * \sqrt{\rho}} * \sqrt{T}$$

תוצאות הניסוי:



גרף 1 - תדירות כפונקציה של שורש המתיחות

דיון

צפינו שהגרף יעבר ב-(0,0) לפי ההשערה שלנו אבל הגרף זז מהנקודה הזו. ואנחנו חושבים שזה בגלל מדידת אורך החוט לא מדויקת וגם רואים שיש חיכוך בין הגלגלת לחוט וזה ישפיע על התוצאות. בניסוי הזה למדנו איך גל עומד מתנהג ובאיזה פרמטרים הוא תלוי. והגענו למסקנה שככל המתיחות בחבל גדלה יותר אילו גם התדירות הנדרשת לקבל גל עומד גדלה.

מתוך הניסוי ניתן לחשב את צפיפות המיתר:

$$a=9.2218$$



יחידות	ערך	נוסחה	נתונים
[m]	0.95	נמדד	אורך החוט L
[m]	1.9	$2 \cdot L$	אורך הגל λ
	9.2218	$1/(\lambda \cdot \sqrt{T})$	שיפוע הגרף a
[kg/m]	0.003257327	$(1/(\lambda \cdot a))^2$	ρ

ניסוי 2 - הקשר שבין תדירות לאורך גל במיתר

מערך הניסוי

חיברנו מיתר למתנד בצד אחד, ובצד השני משקל קבוע דרך גלגלת. בדקנו את כמות ההרמוניות הנוצרות כאשר התדירות מייצרת גל עומד.

מטרת הניסוי

לבדוק איך התדירות ואורך הגל מושפעים אחד מהשני.

השערה

צפינו שכל שהתדירות תגדל, אורך הגל יהיה קטן יותר.

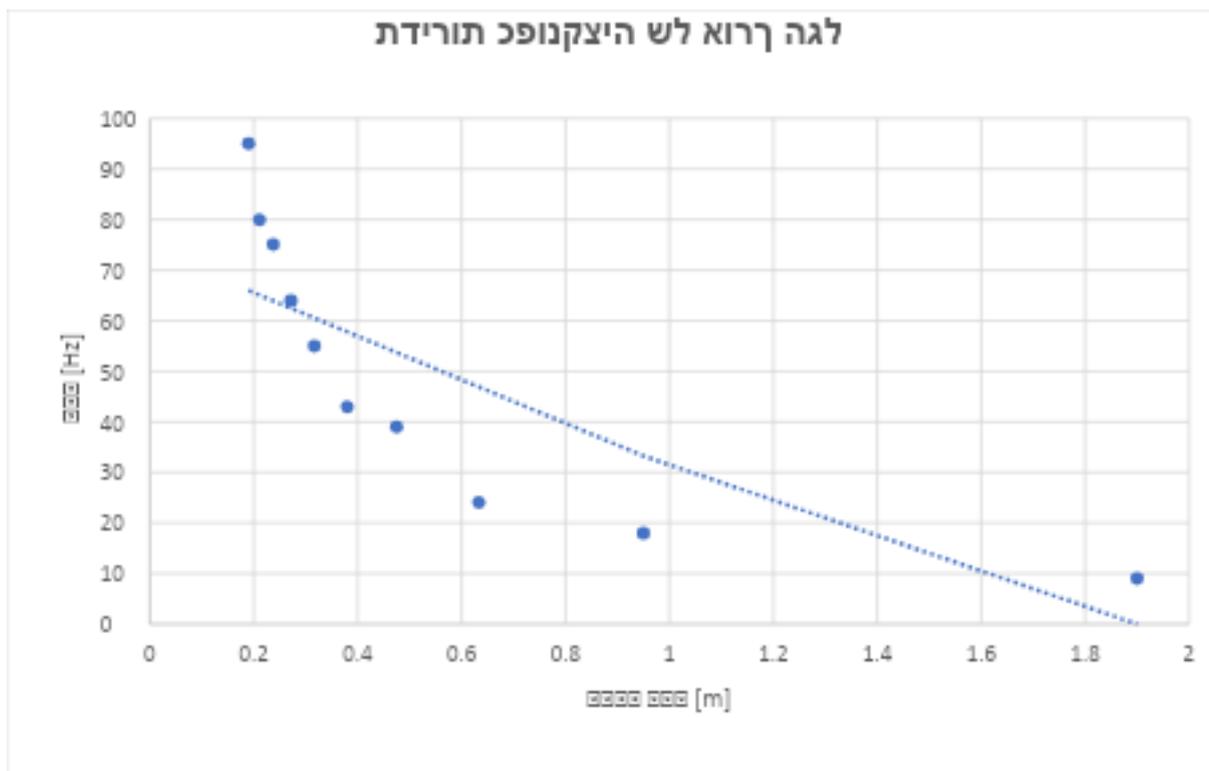
$$\lambda * f = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

מתוך אותה משוואה כמו בניסוי הראשון

$$f(\lambda) = \sqrt{\frac{T}{\rho}} * \frac{1}{\lambda}$$

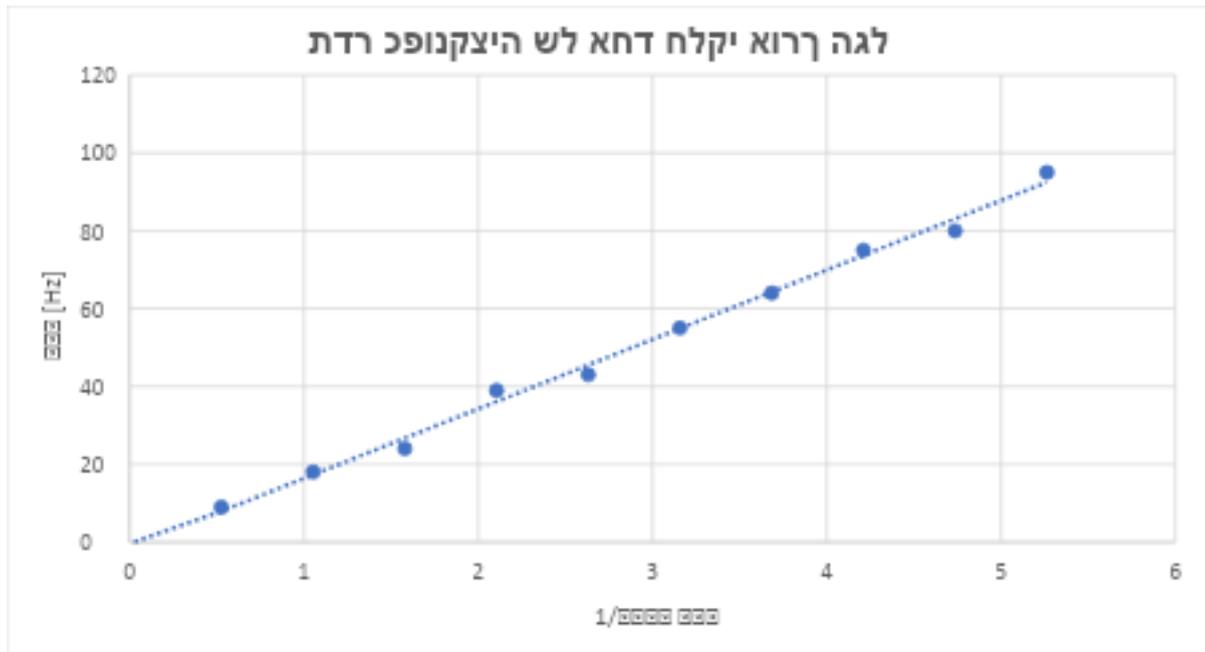
נקבל את הקשר הבא

תוצאות הניסוי:



גרף 2 - תדירות כפונקציה של אורך גל

אפשר לראות בגרף שכמה שהתדירות גדילה אורך הגל קטן כמו שצפינו. והחזקה שקיבלנו (-1.021) קרובה מאוד למה שצפינו (-1). בנוסף הצגנו גרף של התדירות כתלות ב- $\frac{1}{\lambda}$



גרף 3 - תדירות כפונקציה של אחד חלקי אורך הגל

דיון

קיבלנו קו ישר כמו שצפינו. הקו עובר קרוב מאוד ל (0,0) אבל לא בדיוק. אנחנו חושבים שהוא לא עובר בגלל טעות שיטתית במדידה של אורך החבל. יכול להיות שמדדנו אורך קצר מידי ושאר היינו מודדים אורך קצת יותר ארוך בכל המדידות, אז הגרף היה עובר ב-(0,0). מתוך הניסוי ניתן לחשב את צפיפות המיתר:



יחידות	ערך	נוסחה	נתונים
[m]	0.95		אורך החוט L
[N]	2.2	נמדד	מתיחות T
	17.848	$\sqrt{(T/\rho)}$	שיפוע a הגרף
[kg/m]	0.00690627	$T/(a^2)$	ρ

ניתן להשוות את תוצאות שני הניסויים למדידה של הצפיפות (משקל החוט ליחידת אורך):

פרמטר	ניסוי 1	ניסוי 2	ערך מחושב
שיפוע a הגרף	9.2218	17.848	
מחושב ρ	0.003257327	0.00690627	0.004499
שגיאה	-28%	54%	

אנחנו רואים שהתוצאות מאותו סדרי גודל. אנחנו חושבים שהשגיאה נובעת מאי דיוקים במדידה של התדירות המדויקת שבה המשרעת של הגל העומד היתה מקסימלית.

ניסוי 3- ניסוי הסרגלים

מערך הניסוי

חיברנו 6 סרגלים (מניפת סרגלים) מפלדה בעלי אורכים שונים למתנד, ובדקנו בכל סרגל באיזה תדירות נקבל הרמוניה ראשונה ושניה.

מטרת הניסוי

לבדוק תדירות כפונקציה של אורך הסרגל במצב של רזוננס (הרמוניה ראשונה ושניה). נבדוק זאת באמצעות מניפת סרגלים המכילה 6 סרגלים באורכים שונים.

השערה

צפינו שככל שאורך הסרגל היה יותר ארוך יותר, התדר הדרוש כדי לקבל את ההרמוניה אחת יהיה קטן יותר.

$$\lambda = \frac{4L}{(2n-1)} \quad \text{עבור סרגל עם קצה אחד חופשי מתקיים:}$$

$$L = \frac{(2n-1)}{4} \lambda \quad \text{ולכן:}$$

$$f(\lambda) = \frac{2\pi k C_L}{\lambda^2} \quad \text{התדירות כפונקציה של אורך הגל היא:}$$

$$f(L) = \frac{\pi K C_L (2n-1)^2}{8} * \frac{1}{L^2}$$

פונקציה של אורך הסרגל:

K - פיזור המסה ממרכז הגוף

c_L - מהירות הקול בפלדה

$$f(L) = \frac{\pi K C_L}{8} * \frac{1}{L^2}$$

עבור $n=1$ (הרמוניה אחת) נצפה ל:

$$f(L) = \frac{9\pi K C_L}{8} * \frac{1}{L^2}$$

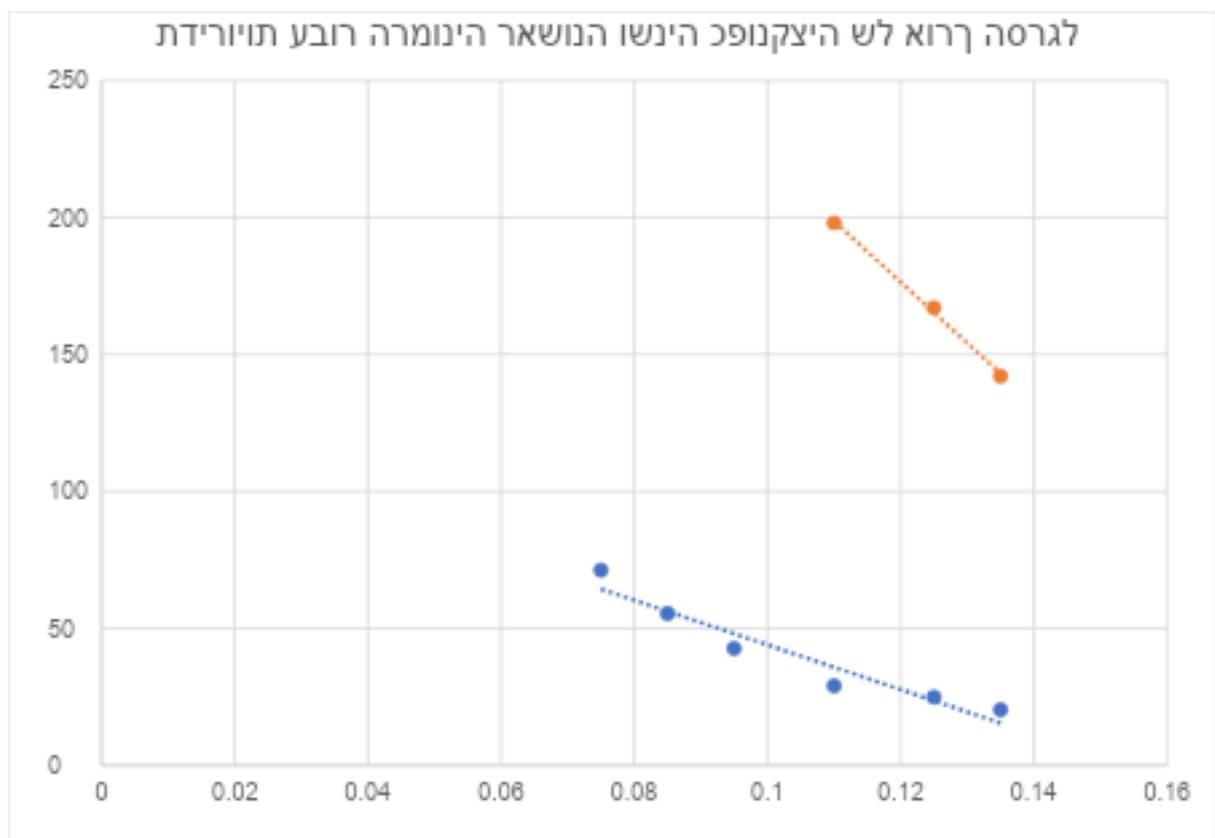
עבור $n=2$ (הרמוניה שניה) נצפה ל:

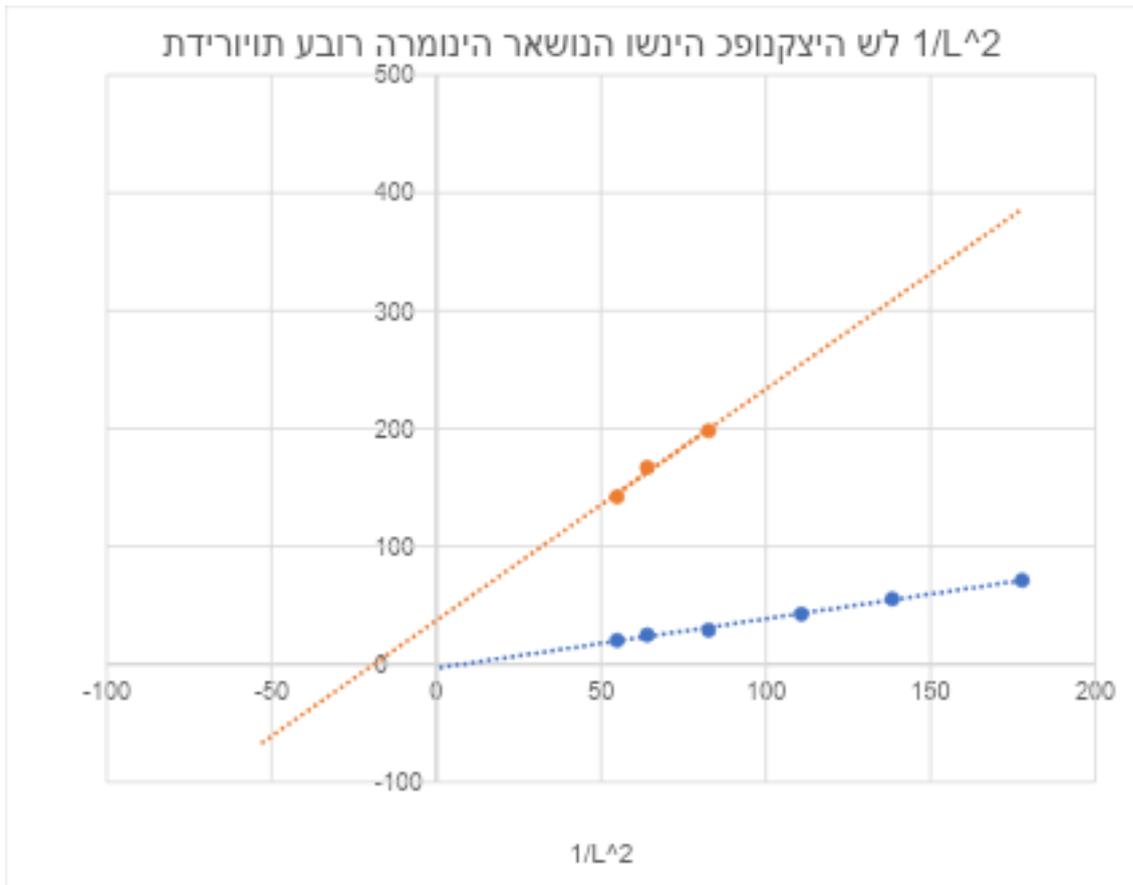
$$\frac{1}{L^2}$$

כלומר אנחנו מצפים שתדירות תהיה תלויה ב

תוצאות הניסוי

אורך סרגל L [m]	תדירות עבור הרמוניה ראשונה [Hz]	תדירות עבור הרמוניה שניה [Hz]
0.075	71.27	
0.085	55.45	
0.095	42.6	
0.11	28.95	198
0.125	24.9	167
0.135	20.25	142





גרף 5 - תדירויות עבור הרמוניה ראשונה ושניה כפונקציה של $L/1$ (L^2 אורך הסרגל)

אנחנו מקבלים שהפונקציה קרובה לתוצאה הצפויה, כאשר הגרף של ההרמוניה הראשונה יותר קרוב ויותר מדויק.

אחת הסיבות לכך היא שיש לנו יותר נקודות מידגם. מתוך הגרף הזה ניתן לחשב את מהירות הקול בפלדה. מתוך הספרות אנחנו יודעים שהערך הוא 4910m/sec.

$$a = \frac{\pi K C_L}{8}$$

השיפוע של הגרף הוא המקדם של הנוסחה

$$C_L = \frac{8a}{\pi K}$$

ולכן נוכל לחשב את מהירות הקול בפלדה עבור $n=1$:

$$C_L = \frac{8a}{\pi K} = \frac{8 * 0.2768}{\pi K} = 4069 \text{m/sec}$$

ולכן.

עבור $n=2$ הגרף פחות קרוב לאחד חלקי L בריבוע, ולכן החישוב הרבה פחות מדויק (הערך יוצא כפול - 9682 מטר לשניה).

דיון

אנחנו רואים כי יש טעות של כ-17% יחסית לערך התיאורטי. אנחנו מייחסים את הטעות לקושי שהיה לנו להבחין במדויק באיזו תדירות האמפליטודה של הרזוננס היתה מקסימלית. כמו כן בסרגלים הקצרים התקשנו לראות הרמוניה שניה, ולכן יש לנו פחות נקודות מדגם (3 במקום 6), ולכן הפונקציה הרבה פחות קרובה לתאוריה. אנחנו מניחים שאם היינו לוקחים סרגלים ארוכים יותר היינו מצליחים לראות גם בהרמוניה שניה תוצאות קרובות.

מסקנות

סרגל, לעומת מיתר מתנהג בצורה קצת יותר מסובכת, אבל הצלחנו להראות קשר שמתאים לתאוריה ואף למצוא את מהירות הקול בחומר (פלדה) מתוך הניסוי.

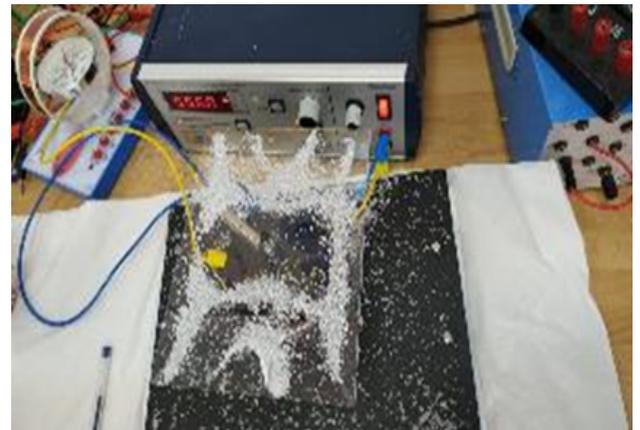
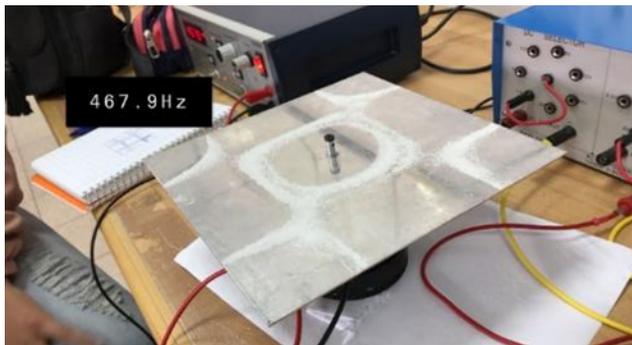
פרק 4 - הניסוי המרכזי

מטרת הניסוי

למצוא קשר בין התדירויות שבהם הצלחת מגיעה לרזוננס ונצרות בה תבניות, לבין המאפיינים של התבניות (המודים m, n), החומר שמהם הצלחות בנויות והצורות השונות של הצלחות.

מערך הניסוי

חיברנו משטחים שונים שעשויים מחומרים שונים בצורות שונות במתנד. הצלחות שחיברנו היו בצורות ריבוע ומלבן, ועשויות מחומרים שונים: פרספקט עבה (3 מ"מ), פרספקט דק (1 מ"מ), אלומיניום. שמנו מלח (ניסינו כמה חומרים: מלח דק, מלח גס, סולת) על המשטח שמתנדנד בתדירויות שונות, ושיחקנו בתדירות עד שנוצרו לנו צורות ברורות.



השערה

ההשערה שלנו היא שיש קשר בין התדירות למודים שנוצרים על הצלחת. את הקשר הזה בצלחת ריבועית מצאנו במאמר של (Waller, Vibrations of Free Rectangular Plates, 1949).

1- ככל שהצלחת עבה יותר נדרשת תדירות גבוהה יותר כדי להכנס לריזוננס.

2- ככך שהחומר קשיח יותר נדרשת תדירות גבוהה יותר לכנס לריזוננס.

3- בצלחת ריבועית אנחנו מצפים לראות שהתדירות קרובה להיות יחסית ל $f \sim m^2 + n^2$

4- בצלחת מלבנית אנחנו מצפים לראות שהתדירות בקירוב גס יחסית ל $f \sim \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$

5- בצלחת ריבועית אנחנו מצפים לראות שהיחס בין תדירות מינוס ופלוס קרוב ל

$$\frac{f_+}{f_-} = \sqrt{\frac{1+0.7205v}{1-0.7205v}}$$

המודל התאורטי של צלחת ריבועית

עבור צלחות ריבועיות הסתמכנו על המאמר של (Waller, Vibrations of Free Rectangular Plates, 1949).

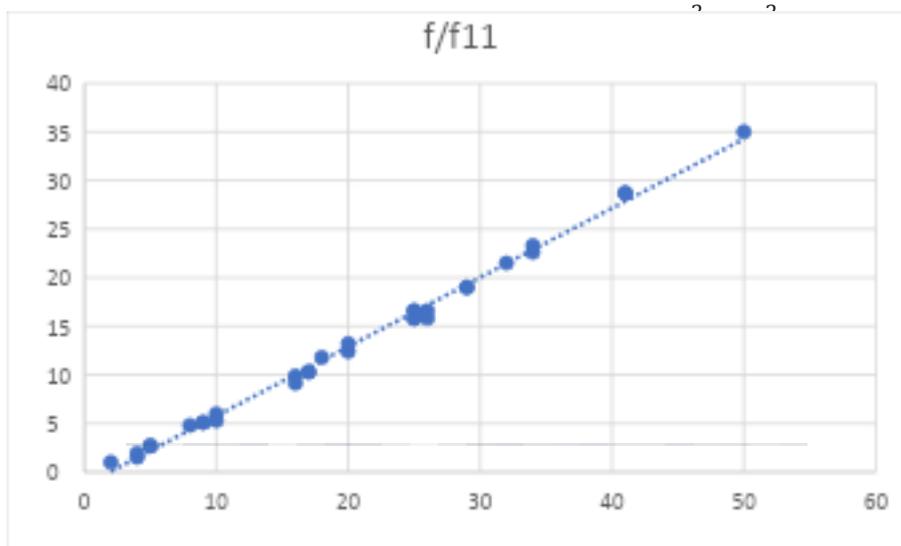
את התדירות הבסיסית נקבל מתוך הנוסחה:

המודל שבו השתמשנו הוא כפי שמופיע במאמר, התדירויות היחסיות כתלות במודים m, n :

n \ m	0	1	2	3	4	5
0			1.52	5.1	9.14	15.8
1		1	2.71	5.3	10.3	15.8
2	1.94	2.71	4.81	8.52	12.4	19
3	5.1	6	8.52	11.8	16.6	22.6
4	9.9	10.3	13.2	16.6	21.5	28.7
5	15.8	16.6	19	23.3	28.7	35

המודל עזר לנו למצוא לכל חומר ומימדים של צלחת את התדירות הבסיסית, ואז להתאים את המודים לתדירויות שאנחנו בניסוי. סידרנו את התדירויות לפי סדר עולה, ולפי הסדר הזה ניסינו לנחש את סדר המודים בניסויים שלנו.

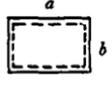
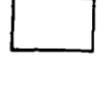
כמו כן ראינו שהמודל מספיק קר



המודל התאורטי של צלחת מלבנית

עבור צלחות מלבניות הניתוח היה יותר קשה, וגם התקשנו למצוא מודל ברור בספרות. התחלנו עם המאמר של (Waller, Vibrations of Free Rectangular Plates, 1949), כשהמודל לא סיפק נוסחה ברורה, אלא נתן טבלאות עבור 3 יחסים בין הצלעות של המלבן. במאמר של (Warburton, 1954) מצאנו נוסחה מסובכת שמתאימה לכל צלחת מלבנית בכל תנאי השפה האפשריים: הנוסחה של Warburton:

$$\lambda^2 = G_x^4 + G_y^4 \frac{a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} [\sigma H_x H_y + (1 - \sigma) J_x J_y] \quad (16)$$

Boundary condition	m	G _x	H _x	J _x	n	G _y	H _y	J _y	Modes m/n ± n/m exist for a = b if,
1 	2, 3, 4, ...	m-1	(m-1) ²	(m-1) ²	2, 3, 4, ...	n-1	(n-1) ²	(n-1) ²	None
2 	2 3, 4, 5, ...	1.506 m-1/2	1.248 (m-1/2) ² [1 - 2/(m-1/2)π]	1.248 (m-1/2) ² [1 - 2/(m-1/2)π]	2 3, 4, 5, ...	1.506 n-1/2	1.248 (n-1/2) ² [1 - 2/(n-1/2)π]	1.248 (n-1/2) ² [1 - 2/(n-1/2)π]	m-n = ±2, 4, 6, ...
3 	0 1 2 3, 4, 5, ...	0 0 1.506 m-1/2	0 0 1.248 (m-1/2) ² [1 - 2/(m-1/2)π]	0 12/π ² 5.017 (m-1/2) ² [1 + 6/(m-1/2)π]	0 1 2 3, 4, 5, ...	0 0 1.506 n-1/2	0 0 1.248 (n-1/2) ² [1 - 2/(n-1/2)π]	0 12/π ² 5.017 (n-1/2) ² [1 + 6/(n-1/2)π]	m-n = ±2, 4, 6, ...

אנחנו מתייחסים לתנאי שפה מס' 3 - חופשי מכל הכיוונים.

כאשר הקשר בין λ לתדירות f ניתן ע"י:

$$\lambda = \left[\frac{\rho a^4 h (2\pi f)^2}{D \pi^4 g} \right]^{1/2} \text{ frequency factor.}$$

Warburton טוען שהנוסחה לא מספיק מדוייקת עבור צלחות המתקרבות לצורת ריבוע. כך גם מצאנו בניסויים שלנו.

התיקון של הנוסחה (מלבד מצבים של n=0,1 שבהם יש נוסחה מתאימה במאמר).

$$\lambda^2 = (m - \frac{1}{2})^4 + (n - \frac{1}{2})^4 + (m - \frac{1}{2})^2 (n - \frac{1}{2})^2 \left[2\sigma \left\{ 1 - \frac{2}{(m - \frac{1}{2})\pi} \right\} \left\{ 1 - \frac{2}{(n - \frac{1}{2})\pi} \right\} + 2(1 - \sigma) \left\{ 1 + \frac{6}{(m - \frac{1}{2})\pi} \right\} \left\{ 1 + \frac{6}{(n - \frac{1}{2})\pi} \right\} \right] \pm \frac{16\sigma}{\pi^2} \left[(m - \frac{1}{2})^4 \left\{ \frac{1}{m+n-1} + \frac{m-n}{(m - \frac{1}{2})^2 + (n - \frac{1}{2})^2} \right\}^2 + (n - \frac{1}{2})^4 \left\{ \frac{1}{m+n-1} - \frac{m-n}{(m - \frac{1}{2})^2 + (n - \frac{1}{2})^2} \right\}^2 \right] \pm \frac{32(1-\sigma)}{\pi^2} (m - \frac{1}{2})^2 (n - \frac{1}{2})^2 \left[\frac{1}{m+n-1} + \frac{m+n-1}{(m - \frac{1}{2})^2 + (n - \frac{1}{2})^2} \right]^2 \quad (22)$$

בנינו מודל באקסל שמממש את

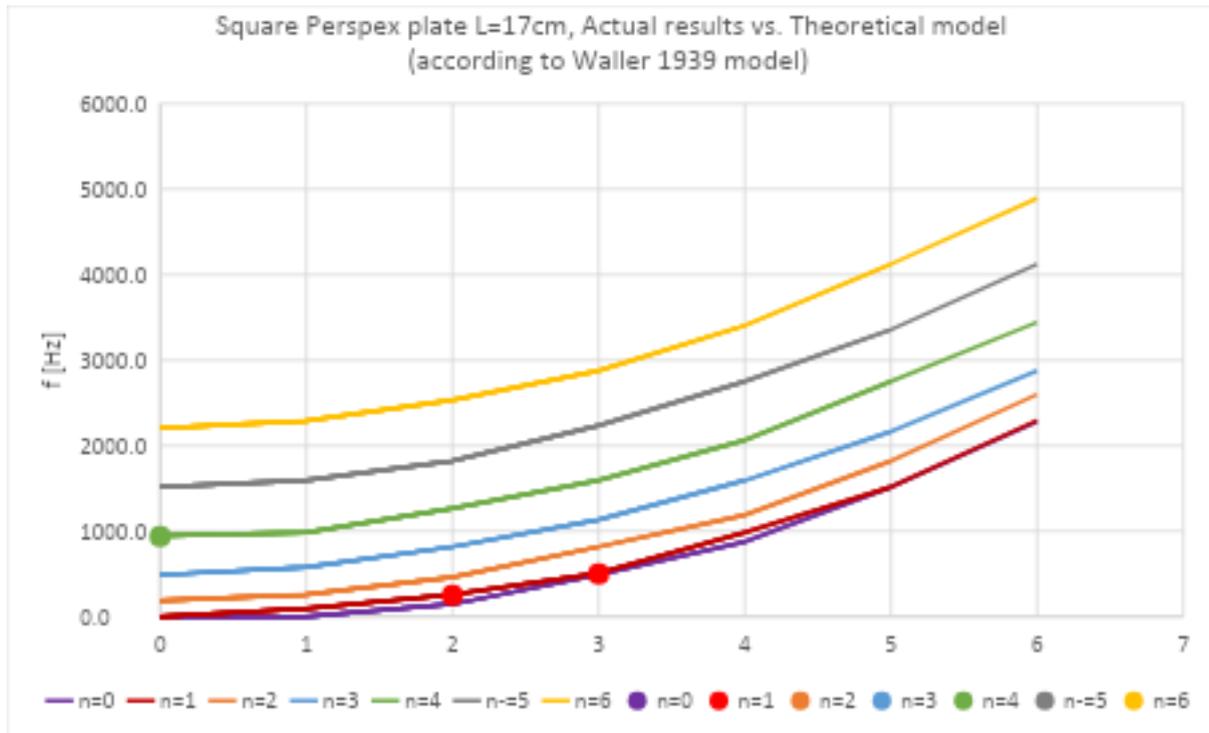
הנוסחה המסובכת, ואף את התיקון עבור צלחות שמתקרבות לריבועיות. את המדידות שלנו שוב סידרנו לפי סדר התדירויות וניסינו להתאים זוגות (m,n) עבור התדירויות המתאימות.

תוצאות הניסוי

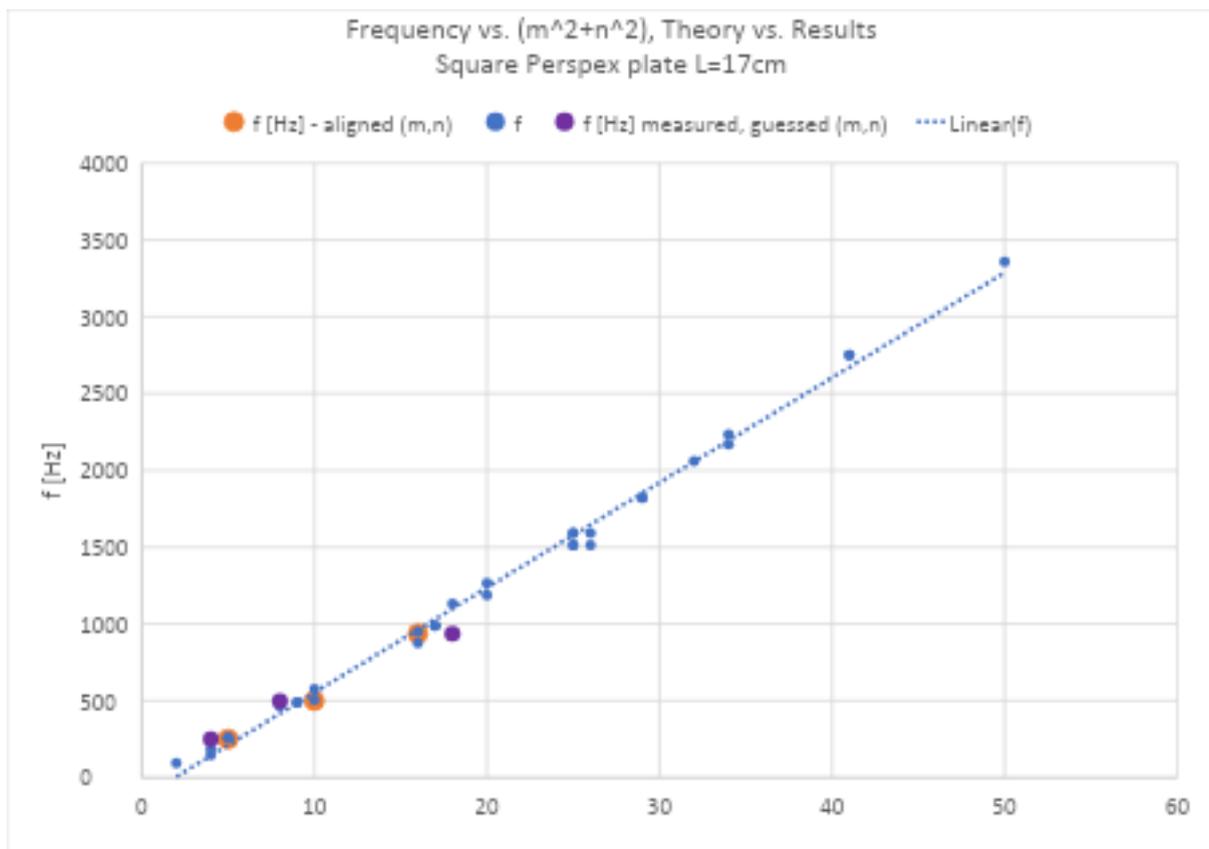
הקושי העיקרי בפענוח התוצאות היה הבנת התבניות שנוצרו, ותרומן לכמות קווי הצומת. השקענו לא מעט זמן בפענוח זה. בצלחות מלבניות מובהקות (כלומר עם יחס גבוה בין הצלעות) הצורות היו יותר פשוטות ודומות למה שמצאנו במאמרים. ככל שהצלחת התקרבה לצורה ריבועית, היה קושי רב להבין את כמות קווי הצומת. מתוך הספר של (Fletcher & Rossing, 1998) הצלחנו להבין איך הצורות נוצרות

צלחות ריבועיות

צלחת ריבועית פרספקט 17 ס"מ על 17 ס"מ

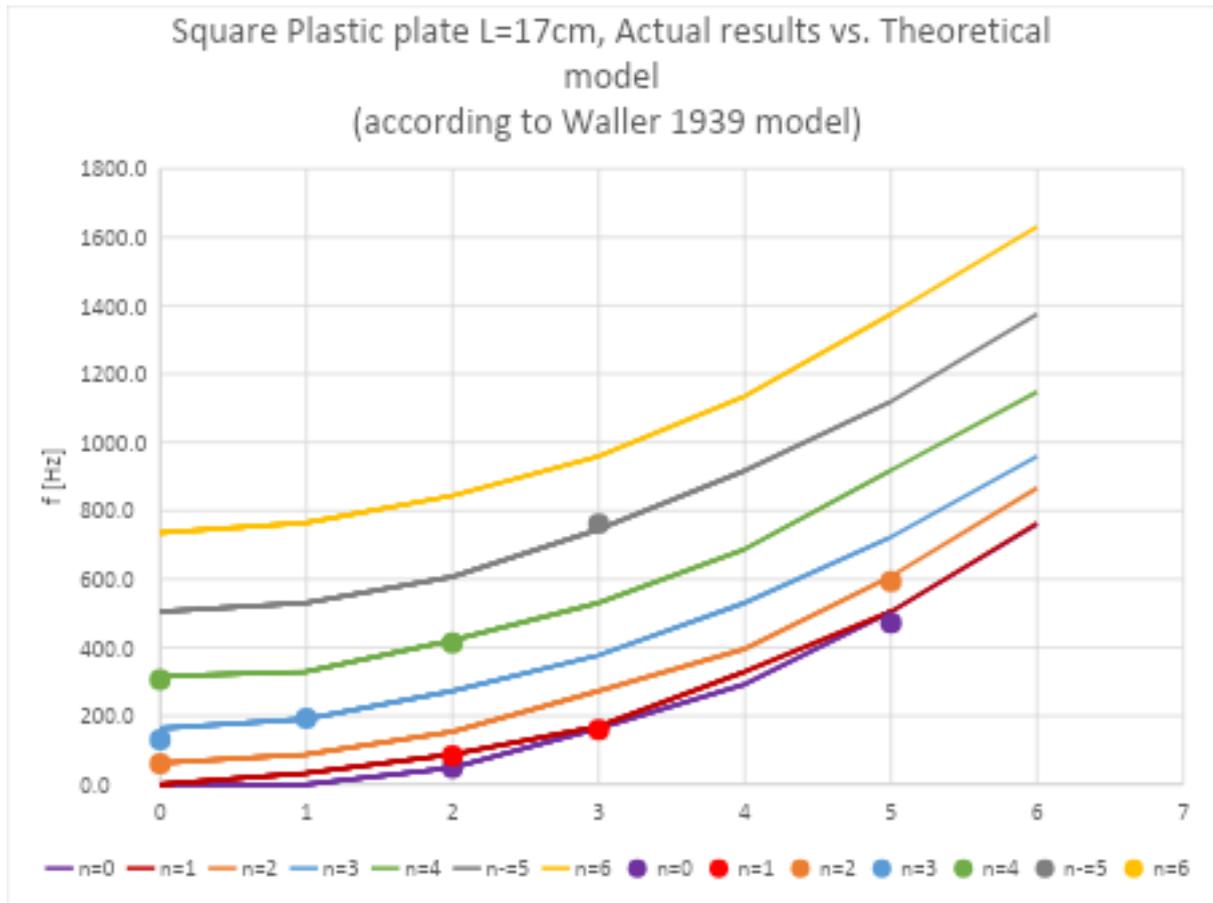


גרף 7 - צלחת ריבועית פרספקט 17x17 - תדירויות כפונקציה של m , עבור n קבוע

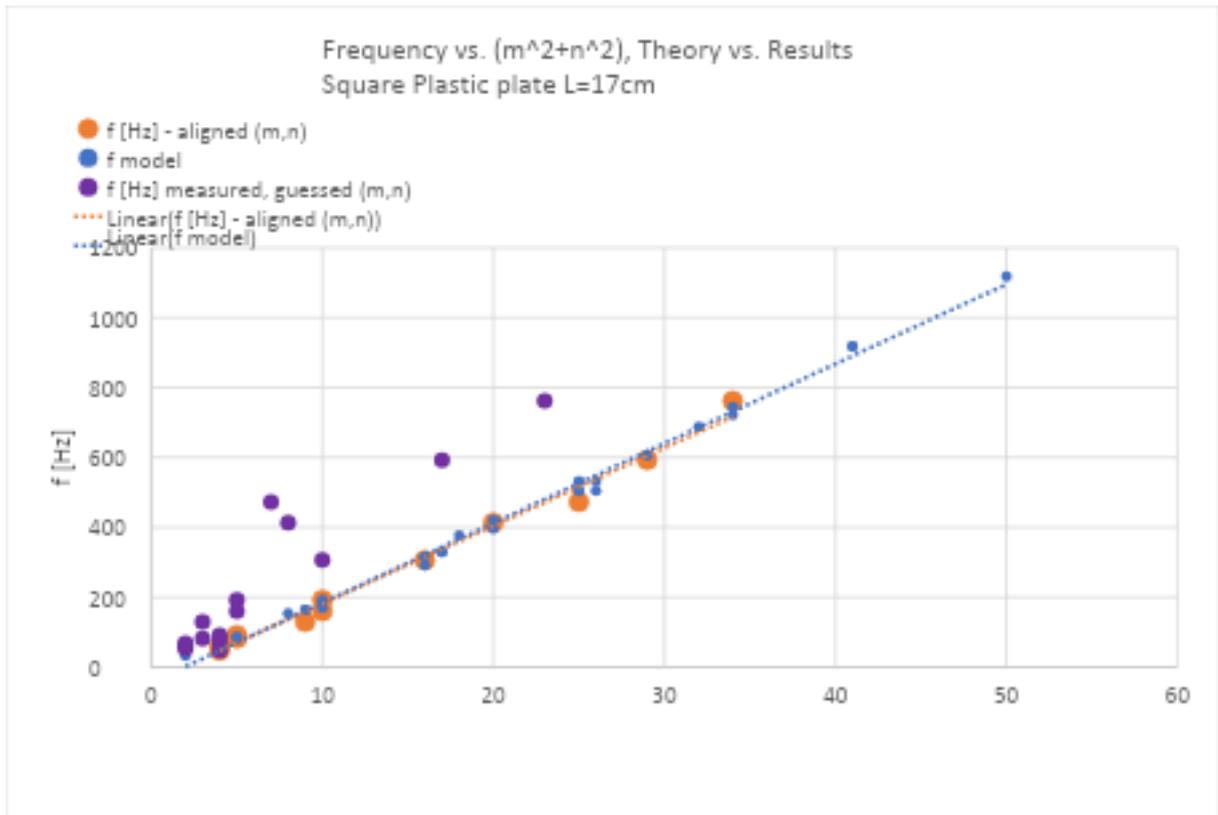


גרף 8 - תדירות כפונקציה של m^2+n^2

צלחת ריבועית פלסטיק 17 ס"מ על 17 ס"מ

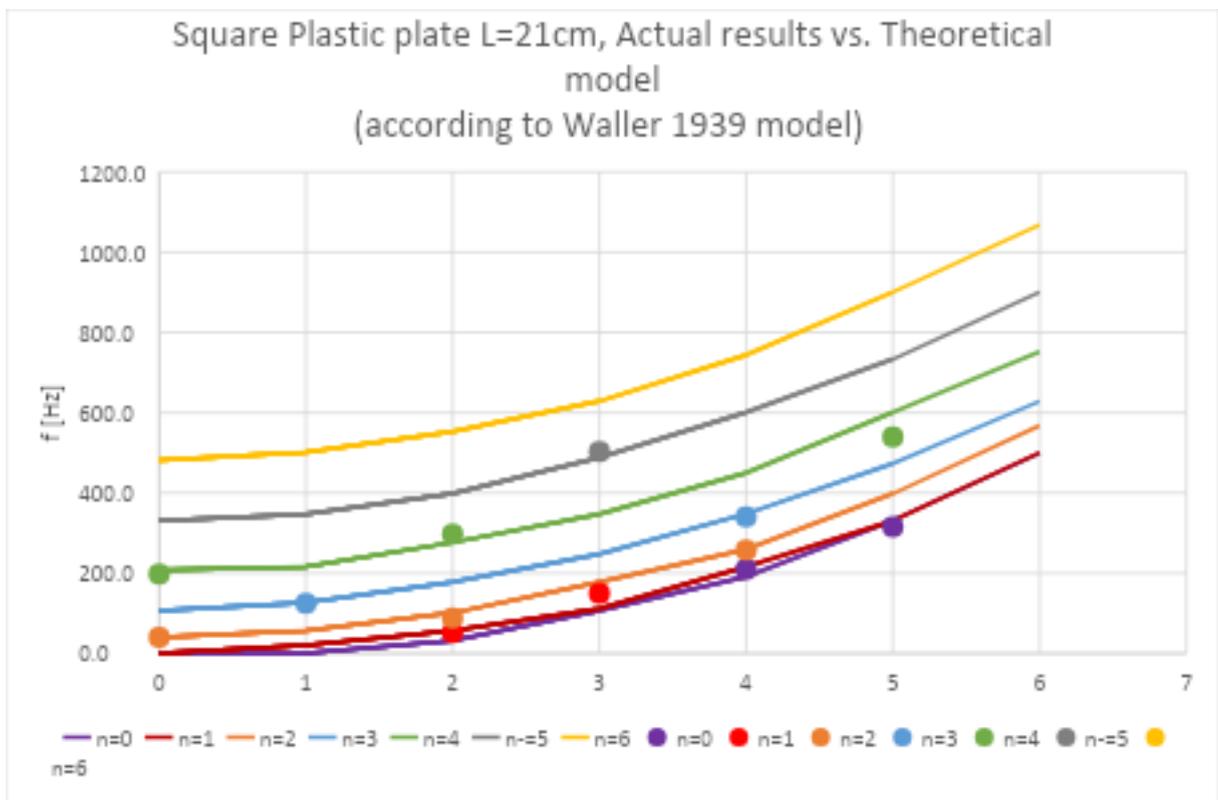


גרף 9 - צלחת ריבועית פלסטיק 17x17 - תדירויות כפונקציה של m, עבור n קבוע

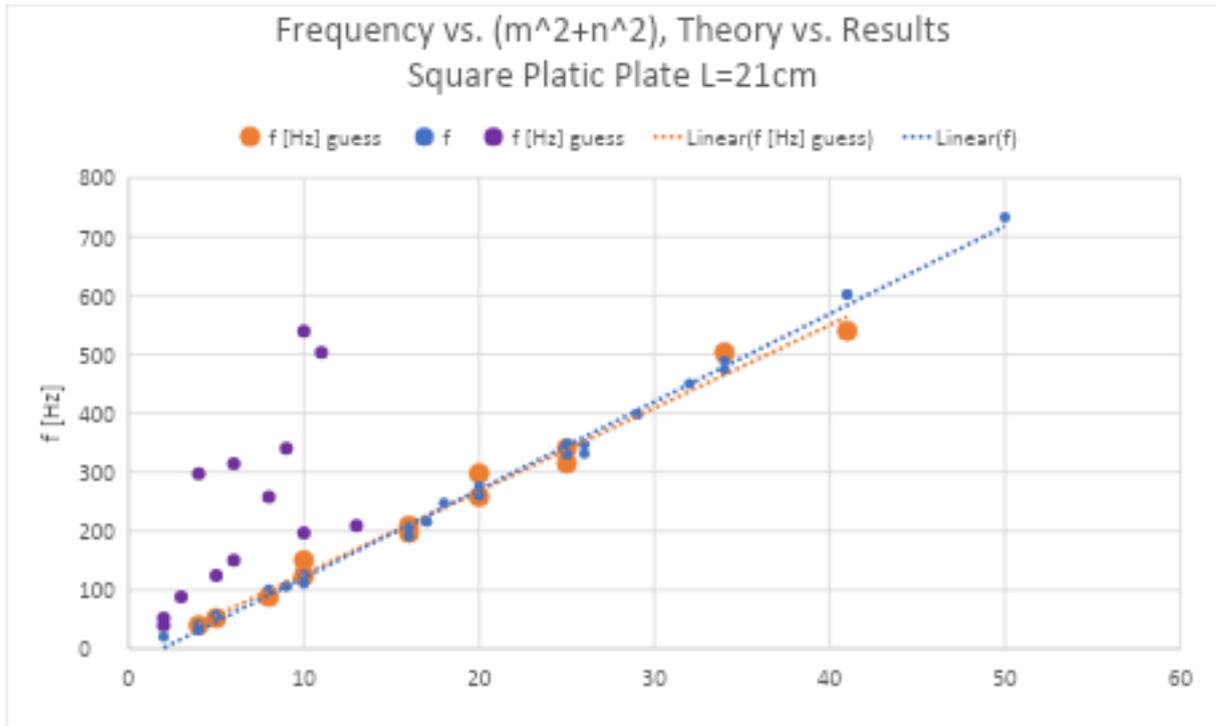


גרף 10 - תדירות כפונקציה של m^2+n^2

[צלחת ריבועית פלסטיק 21 ס"מ על 21 ס"מ](#)

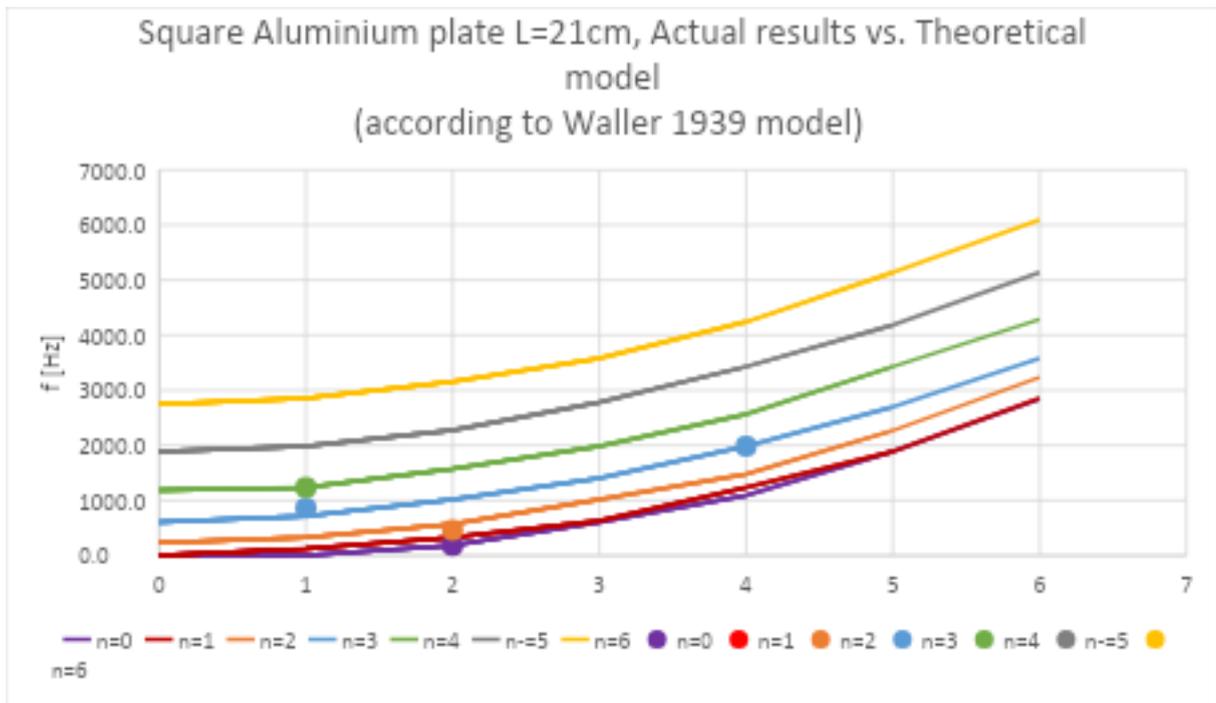


גרף 11 - צלחת ריבועית פלסטיק 21x21 - תדירויות כפונקציה של m , עבור n קבוע

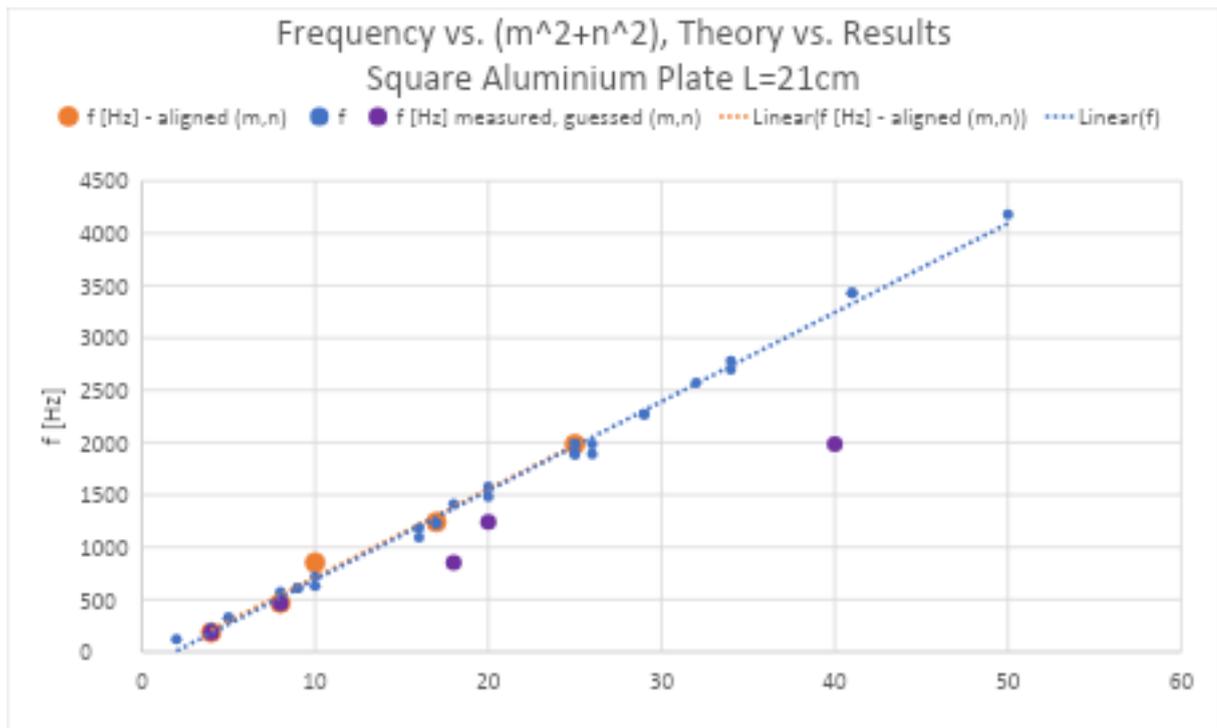


גרף 12 - תדירות כפונקציה של m^2+n^2

[צלחת ריבועית אלומיניום 21 ס"מ על 21 ס"מ](#)



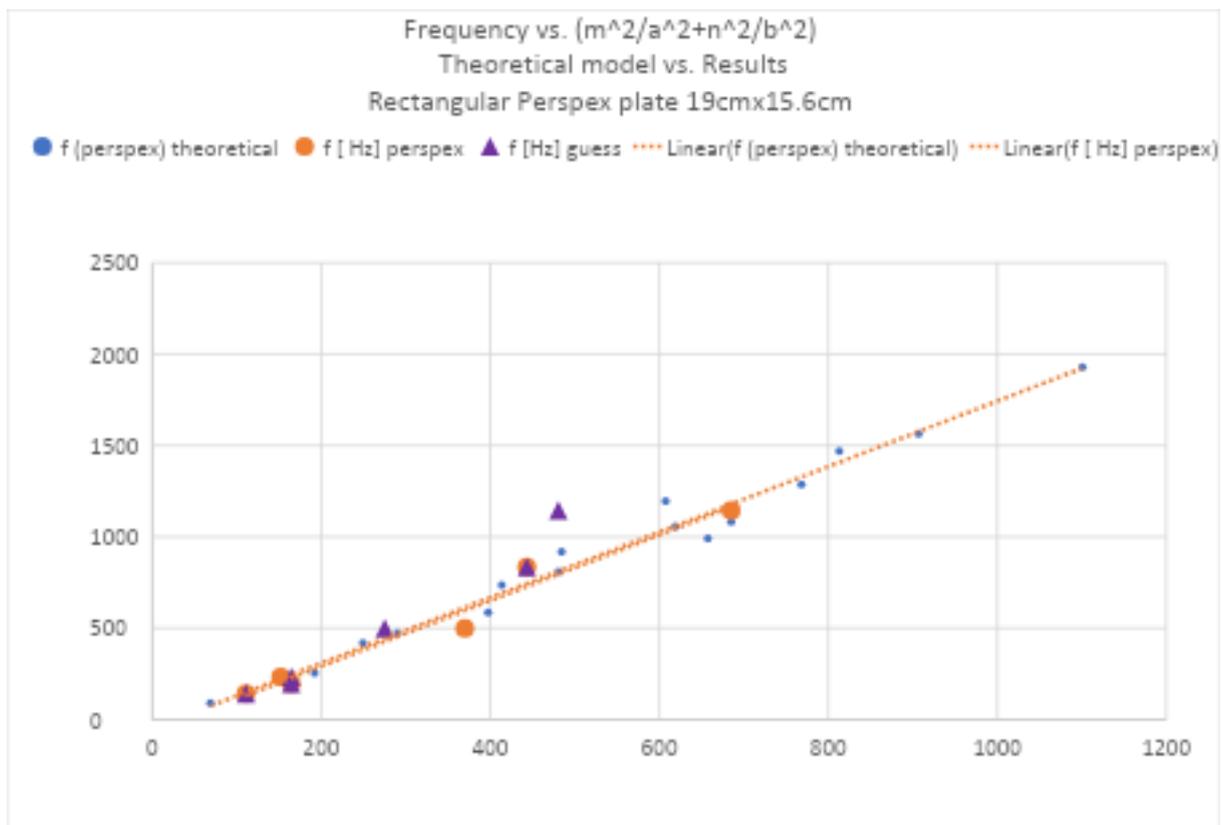
גרף 13 - צלחת ריבועית אלומיניום 21x21 - תדירויות כפונקציה של m, עבור n קבוע



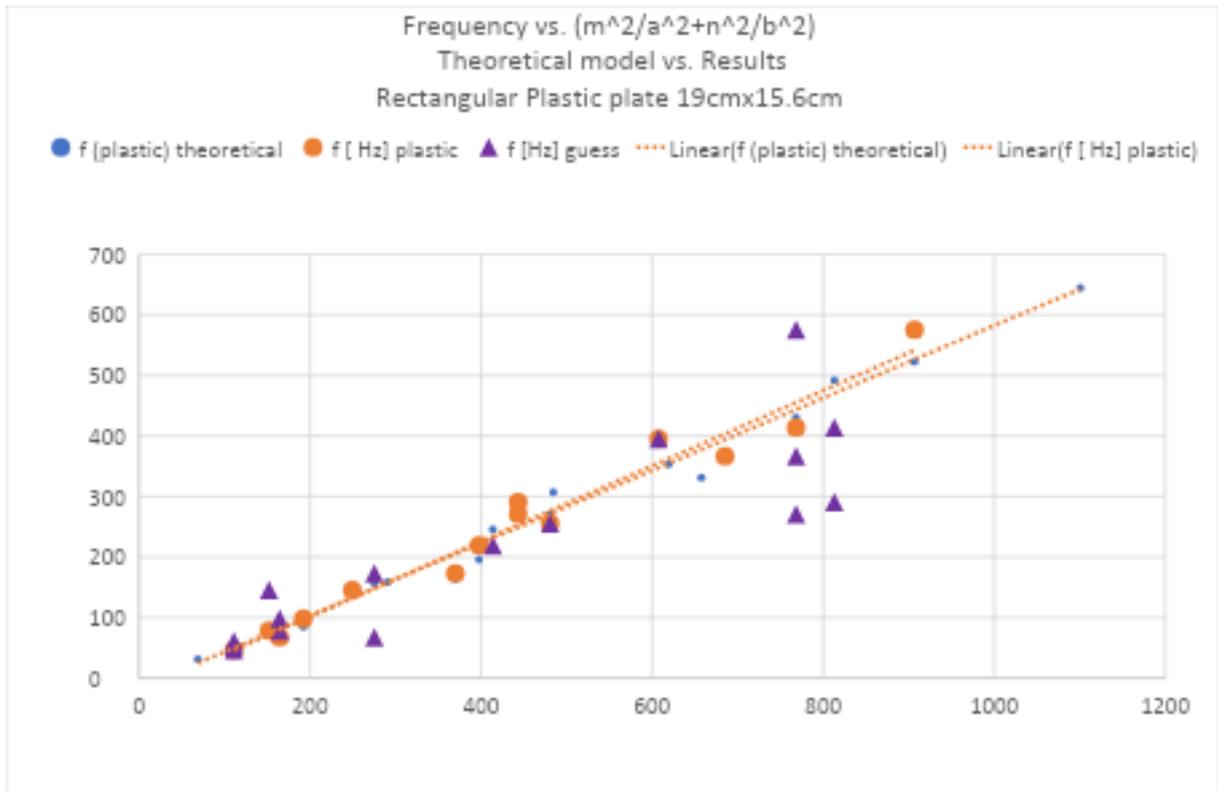
גרף 14 - תדירות כפונקציה של m^2+n^2

צלחות מלבניות

צלחת מלבנית 19 ס"מ על 15.6 ס"מ

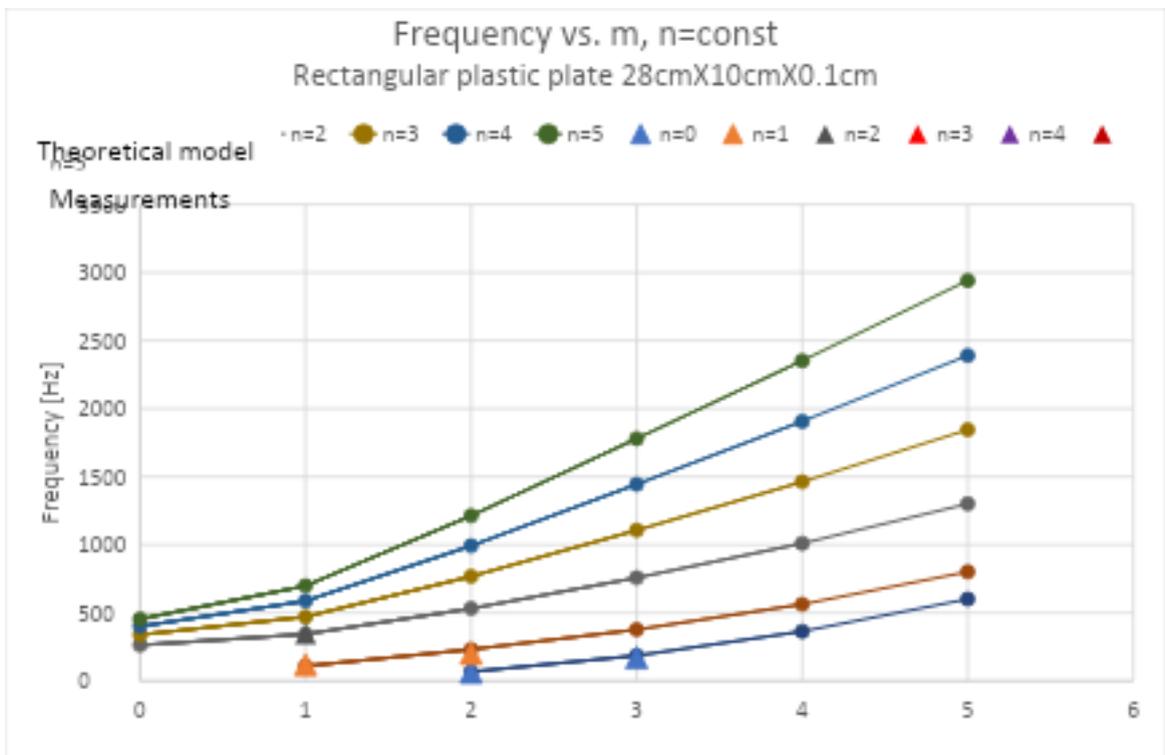


גרף 15 - צלחת מלבנית מפרספקט 19x15, תדירויות כתלות ב- $m/a^2+(n/b)^2$

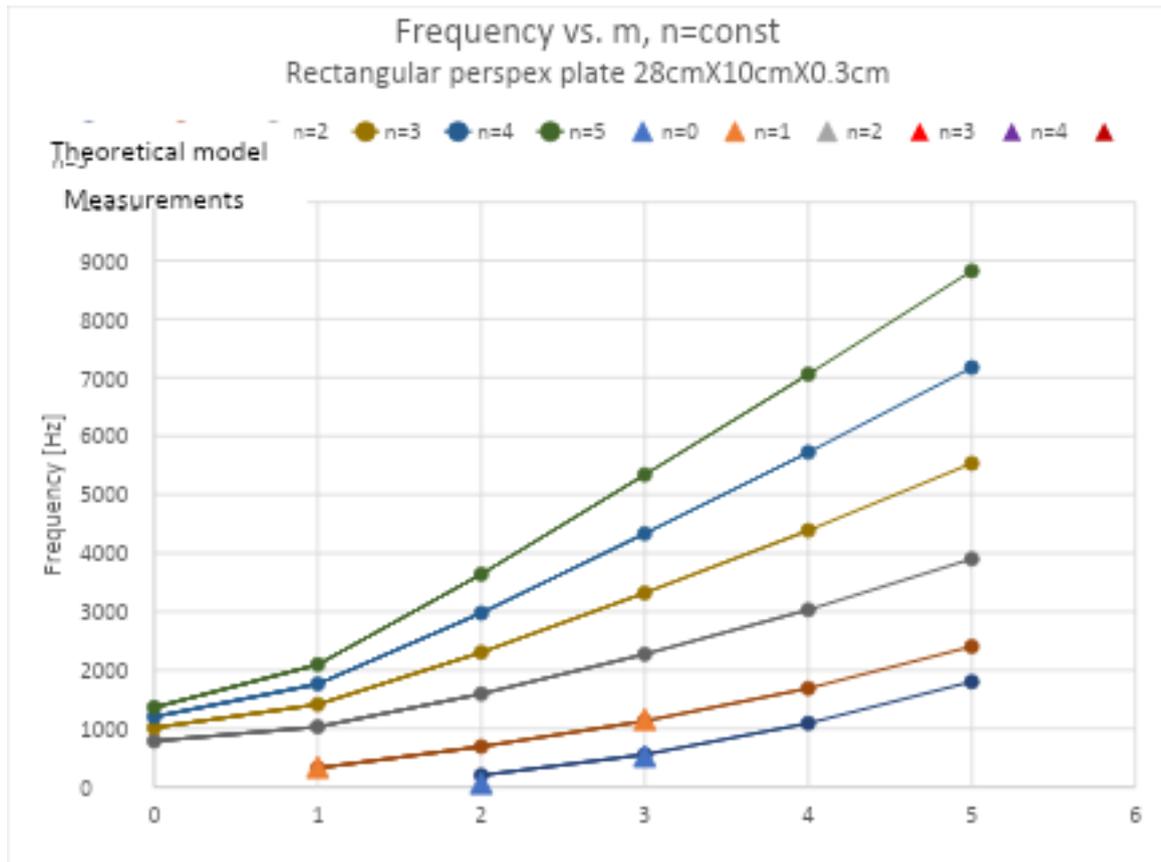


גרף 16 - צלחת מלבנית מפרספקט 19x15, תדירויות כתלות ב $m/a^2+(n/b)^2$

[צלחת מלבנית 28 ס"מ על 10 ס"מ](#)



גרף 17 - צלחת מלבנית פלסטיק 28x10, תדירות כפונקציה של m, n קבוע



גרף 18 - צלחת מלבנית פרספקט 28x10, תדירות כפונקציה של m, n קבוע

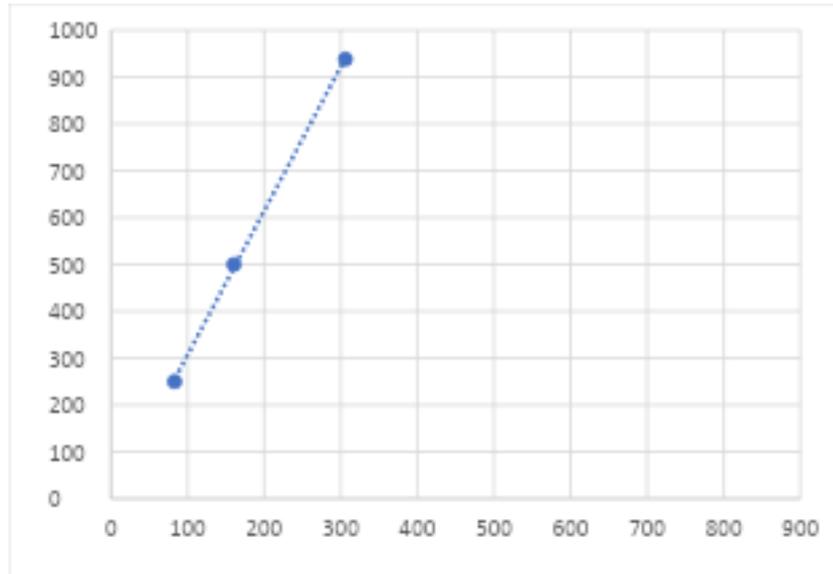
דיון

צלחת ריבועית

בגרפים גרף 7 עד גרף 14 ניתן לראות התוצאות לפי המודל של (Waller, Vibrations of free square plates: part I. Normal vibrating modes, 1939) עבור צלחות ריבועיות מחומרים שונים. ניתן לראות שהתוצאות של הניסוי קרובות מאוד למודל. כמו כן כל הניסויים מראים יחס קרוב לקירוב של כלדני:

$$f \sim m^2 + n^2$$

בנוסף, מכיוון שהיו לנו צלחות בעלות אותם מימדים ומאותו חומר (פרספקט) בעובי שונה, רצינו לבדוק את היחס בין התדירויות בין חומרים שונים:



גרף 19 - יחס בין תדירויות צלחת פרספקט (עובי 3 מ"מ) לצלחת פלסטיק (עובי 1 מ"מ)

אנחנו רואים כי היחס יוצא מאוד קרוב ל-3, בדומה ליחס בין העובי של החומרים. במקרה אחד הצלחנו לראות את המודים השונים של $(0,2)-(2,0)$ לעומת $(0,2)+(2,0)$ וזאת בצלחת ריבועית מפלסטיק $17\text{cm} \times 17\text{cm}$ ויכולנו לבדוק את היחס בין התדירויות לעומת התאוריה. כאמור הנוסחה ליחס זה היא

$$f_+/f_- = \sqrt{(1 + 0.7205\nu)/(1 - 0.7205\nu)}. \quad (18)$$

התדירויות בהם מצאנו את המודים הם:

m,n	Frequency [Hz]
$(2,0)-(0,2)$	48
$(2,0)+(0,2)$	68
תאוריה	1.314142
ניסוי	1.416667

אנחנו רואים שהתוצאה יוצאת קרובה לחישוב התאורטי.

צלחת מלבנית

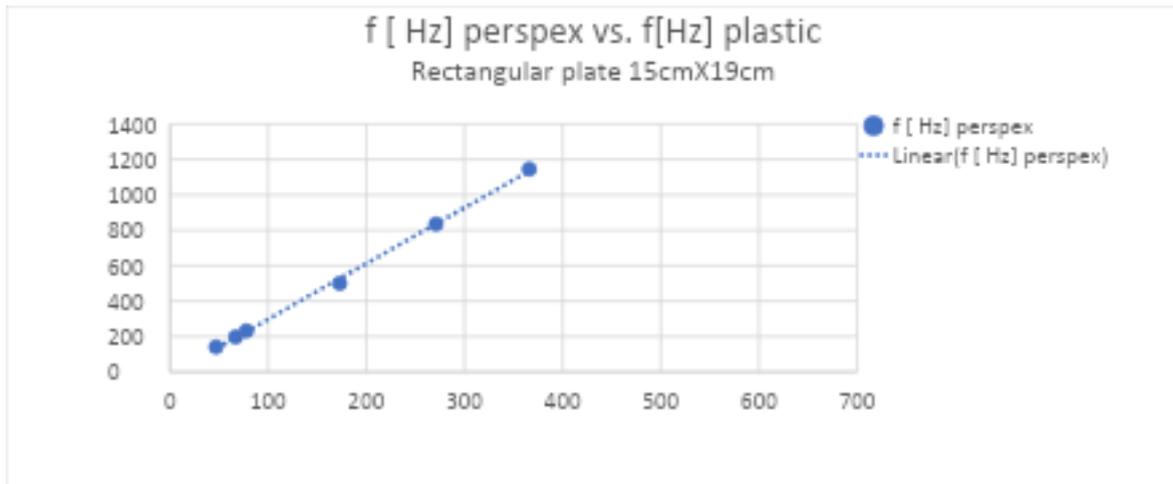
בצלחות מלבניות הניתוח היה יותר קשה, וכך גם ההוכחה של המודלים. בצלחת מלבנית בעלת יחסי צעות יותר קרובים לריבוע (19×15) , מצאנו שהמודל של (Waller, Vibrations of)

$$f \sim \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \quad (\text{Free Rectangular Plates, 1949})$$

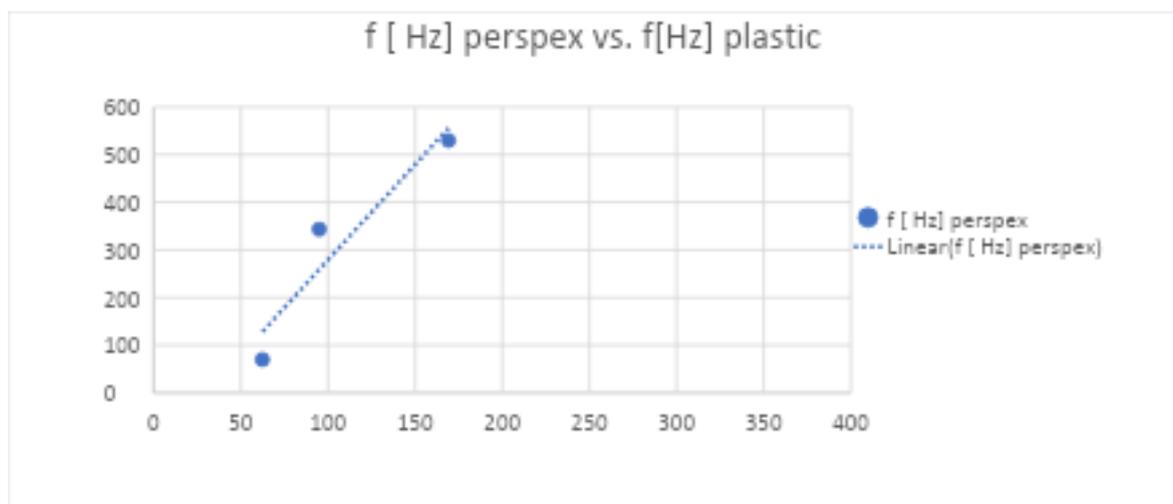
הוא די קרוב לתוצאות שלנו, ואף לקירוב של $f \sim \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$.

עבור צלחת מלבנית יותר מובהקת, מצאנו שהמודל של Waller לא היה מספיק טוב מכיוון שלא היתה התייחסות ליחס הצלעות שלנו (שהיה קרוב ל-3). לכן נאלצנו לבנות מודל יותר מסובך המבוסס על המאמר של (Warburton, 1954). ניתן לרות בגרף 17 וגרף 18 שהתוצאות די קרובות למודל התאורטי, מלבד בצלחת פרספקט, שבה היו לנו מעט מאוד דגימות, וגם אנחנו חושבים שהיתה לנו טעות מדידה בתדירות הראשונה (היא יצאה מאוד רחוקה מהמודל).

גם כאן בדקנו את היחסי בין התדירויות של צלחות בעובי שונה וגם כאן קיבלנו יחס קרוב ל-3 בשני המקרים. במקרה של צלחת 28×10 היחס היה פחות מדויק בשל מיעוט הדגימות בצלחת פרספקט וגם בשל טעות המדידה.



גרף 20 - תדירות פרספקט ביחס לתדירות פלסטיק צלחת מלבנית 19x15



גרף 21 - תדירות פרספקט ביחס לתדירות פלסטיק צלחת מלבנית 28x10

סיכום

המסקנה העיקרית שלנו מהמחקר היא שלמרות שהנושא נחקר רבות בעבר והוצעו פתרונות רבים מצאנו שדווקא הנושא של צלחות מלבניות עם קצה חופשי הוא מסובך למידול ולא הצלחנו לפשט איתו מספיק. קושי נוסף היה להבין את הצורות שראינו ולתרגם אותם למשהו מדיד. מצאנו גם שהניחושים שלנו היו רחוקים מהתיאוריה בעיקר בגלל הקושי הזה.

כן הצלחנו להוכיח את רוב השערות הניסוי שלנו:

1- ככל שהצלחת עבה יותר נדרשת תדירות גבוהה יותר כדי להכנס לריזוננס.

2- ככך שהחומר קשיח יותר נדרשת תדירות גבוהה יותר לכנס לריזוננס.

3- בצלחת ריבועית הצלחנו לראות שהתדירות קרובה להיות יחסית ל $f \sim m^2 + n^2$

4- בצלחת מלבנית התדירות בקירוב גס יחסית ל $f \sim \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$

5- בצלחת ריבועית הצלחנו להראות שהיחס בין תדירות מינוס ופלוס קרוב ל

$$\frac{f_+}{f_-} = \sqrt{\frac{1+0.7205v}{1-0.7205v}}$$

לא הספקנו לחקור את הצלחת העגולה למרות שביצענו ניסוי כזה. כמוכן חתכנו צלחת בצורה אליפסה אבל לא הספקנו לבצע את הניסוי. יכול להיות מעניין להשוות את התוצאות של הניסויים האלה לתאוריה.

- Fletcher, N. H., & Rossing, T. D. (1998). *The Physics of Musical Instruments*.
- Kverno, D., & Nolen, J. (2010). *A Study of Vibrating Plates*. Retrieved from <https://www.phy.davidson.edu/StuHome/derekk/Chladni/pages/menu.htm>
- Leissa, A. W. (1969). *Vibrations of Plates*.
- Rossing, T. D., & Russel, D. A. (1990, 2 21). Laboratory Observation of elastic waves in solids.
- Strutt, J. W., & Rayleigh, B. (1877). *The Theory of Sound*.
- Waller, M. D. (1939, March 21). Vibrations of free square plates: part I. Normal vibrating modes. *Proceedings of the Physical Society*.
- Waller, M. D. (1949, May 1). Vibrations of Free Rectangular Plates. *The Proceedings of The Physical Society*.
- Warburton, G. B. (1954, 6 1). The Vibration of Rectangular Plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*.
- Xiao, W. (2010). *Chladni Pattern*. Retrieved from <https://core.ac.uk/download/pdf/12517675.pdf>