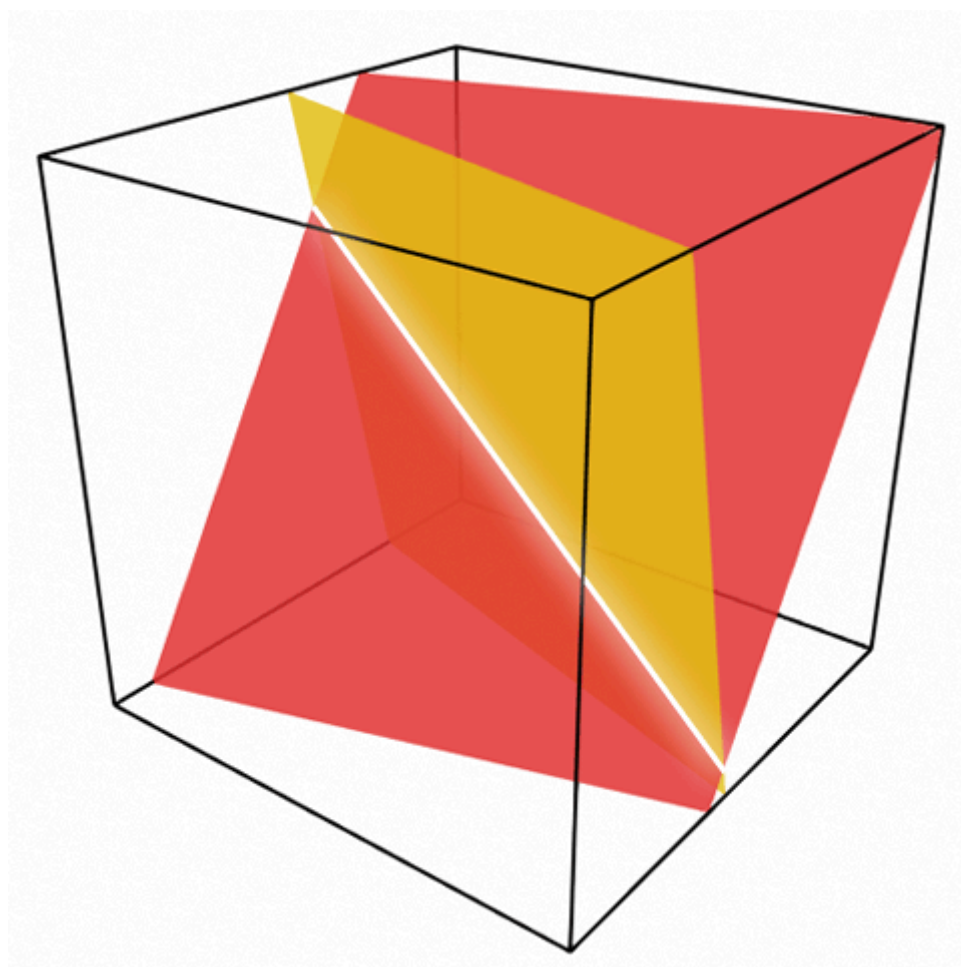


ГЕОМЕТРІЯ 11 клас

Уроки узагальнення та систематизації





Рецензент:

Федченко Л.Я. – завідувача відділом математики, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих дисциплін і методики їх викладання, заслужений вчитель України

Безугла Ольга Анатоліївна, ЗОШ №6, м. Ясинувата;

Ганзера Ганна Олександрівна, педагогічний ліцей, м.Слов'янськ;

Глюза Оксана Олександрівна, гімназія №92, м.Донецьк

Кисельова Єлизавета Олександрівна, ЗОШ №46, м. Донецьк;

Лисиченко Тетяна Владиславівна, ЗОШ №7, м. Артемівськ;

Ердик Ірина Андріївна, ДБПЛ №37, м. Донецьк;

ПЕРЕДМОВА

Пропонований посібник присвячено проектуванню організації уроків повторення на початку 11 класу. Значне місце займають методичні рекомендації щодо використання контрольних запитань, завдань на готових кресленнях, а також дидактичних матеріалів.

Цей посібник адресовано вчителям математики, які працюють в класах академічного рівня.

ЗМІСТ

1.	Календарно – тематичне планування.	4 стор.
2.	Довідковий матеріал з теми.	8 стор.
3.	Довідковий матеріал з повторення.	11 стор.
4.	Дидактичний матеріал для організації повторення.	22 стор.
5.	Діагностичні контрольні роботи.	54 стор.
6.	Література	62 стор.

КАЛЕНДАРНО– ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ

ГЕОМЕТРІЯ, 11 КЛАС

(2 години на тиждень, всього за рік - 70 годин)

№	Тема уроку	Примітка
Тема 1. Узагальнення та систематизація навчального матеріалу. (4 годин)		
1	Система опорних фактів з планіметрії. Координати та вектори на площині.	
2	Аксіоми стереометрії, їх наслідки. Паралельність і перпендикулярність прямих і площин.	
3	Вимірювання кутів та відстаней у просторі.	
4	<i>Діагностична контрольна робота (№1)</i>	
Тема 2. Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі. (16 годин)		
5	Прямокутна система координат у просторі. Відстань між точками. Координати середини відрізка.	
6	Відстань між точками. Координати середини відрізка.	
7	Перетворення у просторі та їх властивості.	

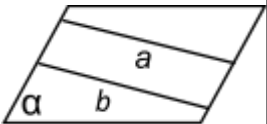
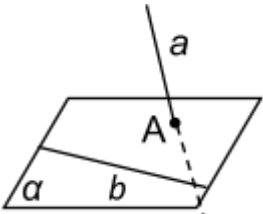
8	Перетворення у просторі та їх властивості.	
9	Вектори у просторі. Рівність, колінеарність та компланарність векторів.	
10	Додавання та віднімання векторів, множення вектора на число.	
11	Додавання та віднімання векторів, множення вектора на число. <i>Самостійна робота.</i>	
12	Кут між векторами. Скалярний добуток векторів.	
13	Кут між векторами. Скалярний добуток векторів.	
14	Розв'язування задач. <i>Розкладання вектора за трьома не компланарними векторами.</i>	
15	Рівняння площини.	
16	Рівняння сфери.	
17	Розв'язування задач.	
18	Розв'язування задач. <i>Самостійна робота.</i>	
19	Розв'язування задач.	
20	Тематична контрольна робота (№2)	
Тема 3. Многогранники. (16 годин)		
21	Двогранні, многогранні кути. Лінійний кут двогранного кута.	
22	Многогранники. Опуклі многогранники. Призма.	
23	Зображення призми та побудова перерізів.	
24	Пряма і правильна призма. Бічна і повна поверхні призми.	

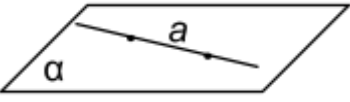
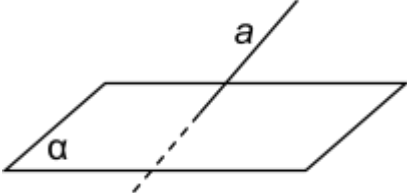
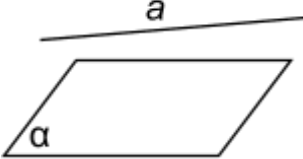
25	Розв'язування задач. <i>Самостійна робота.</i>	
26	Паралелепіпед та його властивості. Прямокутний паралелепіпед.	
27	Піраміда.	
28	Побудова піраміди та її перерізів.	
29	Правильна піраміда. Бічна поверхня правильної піраміди.	
30	Розв'язування задач. <i>Самостійна робота.</i>	
31	Правильні многогранники.	
32	Розв'язування задач.	
33	Розв'язування задач.	
34	Розв'язування задач. <i>Самостійна робота.</i>	
35	Розв'язування задач.	
36	<i>Тематична контрольна робота (№3)</i>	
Тема 4. Тіла обертання. (14 годин)		
37	Тіла і поверхні обертання. Циліндр, його елементи. Переріз циліндра площиною.	
38	Вписана й описана призми.	
39	Конус. Зрізаний конус, його елементи. Переріз конуса площиною.	
40	Вписана й описана піраміди.	
41	Розв'язування задач. <i>Самостійна робота.</i>	
42	Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Симетрія кулі.	

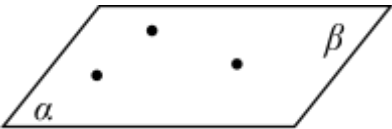
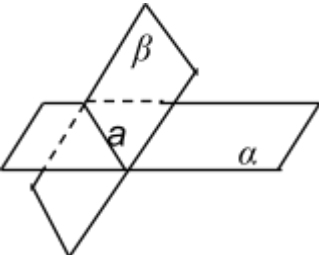
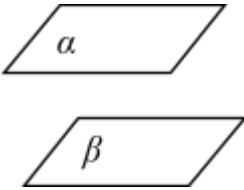
43	Площина, дотична до сфери. Вписані й описані многогранники.	
44	Розв'язування задач.	
45	Вписані многогранники і тіла обертання.	
46	Описані многогранники і тіла обертання.	
47	Розв'язування вправ на комбінації просторових фігур.	
48	Розв'язування вправ. <i>Самостійна робота.</i>	
49	Розв'язування вправ.	
50	Тематична контрольна робота (№4)	
Тема 5. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл. (14 годин)		
51	Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єм паралелепіпеда.	
52	Об'єм призми.	
53	Об'єм піраміди.	
54	Розв'язування вправ. <i>Самостійна робота.</i>	
55	Об'єм циліндра.	
56	Об'єм конуса.	
57	Об'єм кулі та її частин.	
58	Розв'язування вправ. <i>Самостійна робота.</i>	
59	Площі бічної і повної поверхонь циліндра.	
60	Площі бічної і повної поверхонь конуса.	
61	Площа сфери.	
62	Розв'язування вправ. <i>Самостійна робота.</i>	

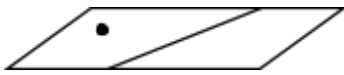
63	Розв'язування вправ.	
64	<i>Тематична контрольна робота (№5)</i>	
Тема 6. Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв'язування задач. (6 годин)		
65	Паралельність і перпендикулярність прямих і площин. Вимірювання кутів та відстаней у просторі.	
66	Многогранники. Тіла обертання.	
67	Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл.	
68	<i>Контрольна робота(№6)</i>	
69	Розв'язування вправ.	
70	Розв'язування вправ.	

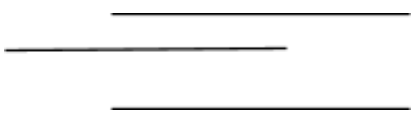
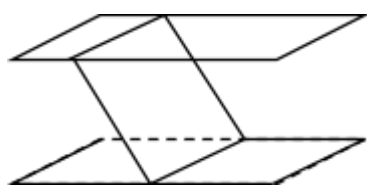
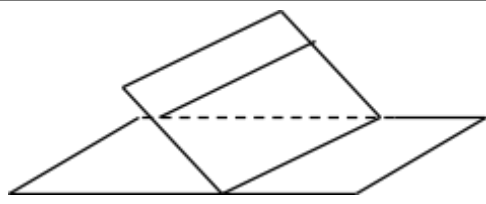
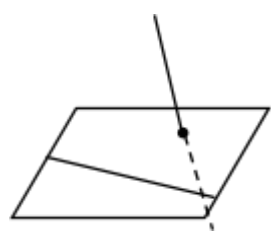
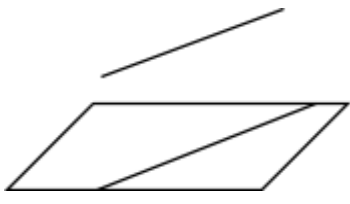
ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ З ТЕМИ

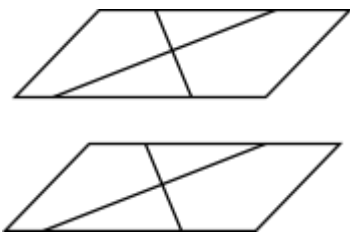
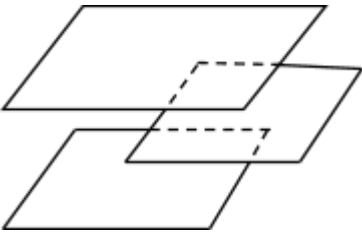
Взаємне розміщення прямих у просторі			
Число спільних точок			
Не менше двох	Одна	Немає	
		лежать в одній площині	не лежать в одній площині
			
a і b збігаються ($a=b$)	a і b перетинаються ($a \times b$)	a і b паралельні ($a \parallel b$)	a і b мимобіжні ($a \bullet b$)

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі		
кількість спільних точок		
не менше двох	одна	Відсутні
		
$a \subset \alpha$ a лежить в α	$a \times \alpha$ a перетинає α	$a \parallel \alpha$ a і α паралельні

Взаємне розміщення площин у просторі		
кількість спільних точок		
не менше трьох, що не лежать на одній прямій	не менше однієї, але немає спільних точок, які не лежать на одній прямій	Відсутні
		
α і β збігаються $\alpha = \beta$	α і β перетинаються $\alpha \times \beta$	α і β паралельні $\alpha \parallel \beta$

Для того, щоб зафіксувати площину в просторі можна задати:	
➤ три точки, що не лежать на одній прямій	
➤ пряму і точку, що не лежать на цій прямій	
➤ дві різні прямі, що перетинаються	
➤ дві паралельні прямі	

Для встановлення паралельності двох прямих в просторі можна перевірити:	
➤ чи знайдеться пряма, паралельна кожній із даних прямих	
➤ чи будуть дані прямі лініями перетину двох паралельних площин третьою.	
➤ чи буде одна із даних прямих лінією перетину двох площин, одна з яких паралельна даній прямій, а інша проходить через цю пряму.	
Для встановлення мимобіжності двох прямих в просторі необхідно перевірити:	
➤ Чи знайдеться площина, у якій лежить одна з даних прямих і яку перетинає друга пряма у точці, що не належить першій прямій.	
Для встановлення паралельності прямої і площини необхідно перевірити:	
➤ чи знайдеться в площині пряма паралельна даній прямій	
Для встановлення паралельності двох площин можна перевірити:	

➤ чи знайдуться в одній із площин дві прямі, що перетинаються і відповідно паралельні двом прямим другої площини	
➤ чи знайдеться площина, паралельна кожній з даних площин	

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ З ПОВТОРЕННЯ

Повторимо планіметрію

Основні формули та теореми

<i>Паралельні прямі</i> <i>Ознаки</i>
1. Дві прямі паралельні, якщо з січною вони утворюють рівні відповідні кути. 2. Дві прямі паралельні, якщо з січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути. 3. Дві прямі паралельні, якщо сума односторонніх кутів, що утворюються з січною, дорівнює 180°. 4. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні між собою. 5. Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.
<i>Властивості</i>
1. Відповідні кути, що утворені паралельними прямими з їх січною, рівні. 2. Внутрішні різносторонні кути, утворені паралельними прямими з їх січною, рівні.

3. Сума односторонніх кутів (внутрішніх або зовнішніх), утворених паралельними прямими з січною, дорівнює 180° .

Теорема Фалеса

Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки і на другій його стороні.

Трикутник

Рисунок	Позначення	Формули
	a, b, c – сторони A, B, C – кути h_b – висота, проведена з вершини B R – радіус описаного кола r – радіус вписаного кола S – площа трикутника p – півпериметр m_a – медіана до сторони a	$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона) $S = rp = \frac{abc}{4R}$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin A$ (теорема косинусів) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів)

Основні теореми

Теорема про суму кутів трикутників

Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° .

Теорема про середню лінію трикутника

Відрізок, який з'єднує середини двох сторін трикутника, паралельний до третьої сторони та дорівнює його половині.

Ознаки рівності трикутників

1. Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.
2. Якщо сторона та два прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.
3. Якщо три сторони одного трикутника рівні відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Ознаки подібності трикутників

1. Якщо два кути одного трикутника відповідно рівні двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.
2. Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.
3. Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то такі трикутники подібні.

Вписані та описані трикутники

1. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і тільки одне. Центр описаного кола співпадає з точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.
2. В будь-який трикутник можна вписати коло і тільки одне. Центр вписаного кола лежить на перетині бісектрис кутів трикутника.

Властивості медіан, бісектрис та висот трикутника

1. Медіани трикутника перетинаються в одній точці та поділяються точкою перетину у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.
2. Бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці.
3. Бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.
4. Висоти трикутника (або їх продовження) перетинаються в одній точці.

Прямокутний трикутник

Рисунок	Позначення	Формули
---------	------------	---------

	A, b – катети c – гіпотенуза b', a' – проєкції катетів на гіпотенузу m_c – медіана, проведена до гіпотенузи R – радіус описаного кола O – центр описаного кола	$c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора) $S = \frac{1}{2}ab$ $m_c = R = \frac{c}{2}$ $h_c^2 = b'a'$ $a^2 = ca'$
Основні теореми <i>Теорема Піфагора</i> У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів. Метричні співвідношення 1. Висота CD, яка проведена до гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC, поділяє цей трикутник на два трикутники, подібні між собою та подібні даному трикутнику. Звідси: $CD^2 = AD \cdot BD$; $BC^2 = AB \cdot AD$; $AC^2 = AB \cdot BD$. 2. Медіана, яка проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, дорівнює половині гіпотенузи. 3. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, співпадає з		

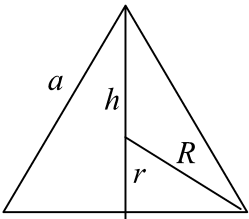
серединою гіпотенузи, а його радіус дорівнює половині гіпотенузи.

$$R = AO = BO = CO = \frac{1}{2} AB.$$

4. Сума довжин катетів прямокутного трикутника дорівнює сумі довжин діаметрів вписаного та описаного кіл.

$$a + b = 2R + 2r$$

Правильний трикутник

Рисунок	Позначення	Формули
	a – сторона h – висота R – радіус описаного кола r – радіус вписаного кола S – площа	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Рівнобедрений трикутник

Основні теореми

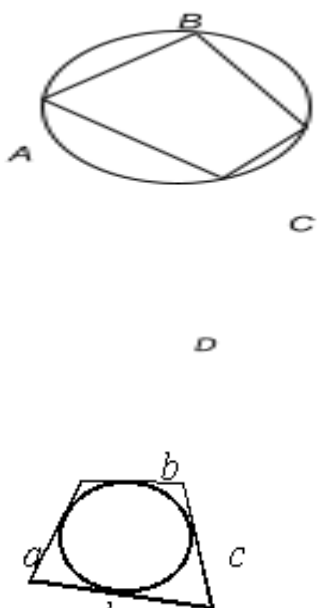
Властивості

У рівнобедреного трикутника кути при основі рівні, а бісектриса, що проведена до основи, є і медіаною і висотою.

Ознаки

1. Якщо у трикутнику два кута рівні, то він рівнобедрений.
2. Якщо висота трикутника одночасно є і медіаною, то трикутник рівнобедрений.
3. Якщо медіана трикутника одночасно є і бісектрисою, то трикутник рівнобедрений.
4. Якщо бісектриса кута трикутника одночасно є і висотою, то трикутник рівнобедрений.

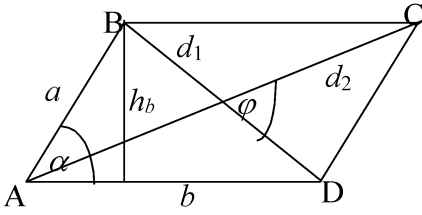
Чотирикутник

Рисунок	Основні теореми
	Навколо опуклого чотирикутника можна описати коло тоді і тільки тоді, коли сума протилежних кутів становить 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180$

В опуклий чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми протилежних сторін рівні:

$$a + c = b + d$$

Паралелограм

Рисунок	Позначення	Формули
	a, b – сторони h_b – висота до сторони b d_1, d_2 – діагоналі S – площа α - кут паралелограма ϕ - кут між діагоналями	$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ $S = b \cdot h_b$ $S = ab \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi$
<i>Основні теореми</i> <i>Властивості</i> - Протилежні сторони паралелограма рівні, та протилежні кути паралелограма рівні. - Діагоналі паралелограма поділяються точкою перетину навпіл. <i>Ознаки</i> - Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то такий чотирикутник – паралелограм. - Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то такий чотирикутник – паралелограм. - Якщо у чотирикутника діагоналі діляться точкою перетину навпіл, то такий чотирикутник – паралелограм.		

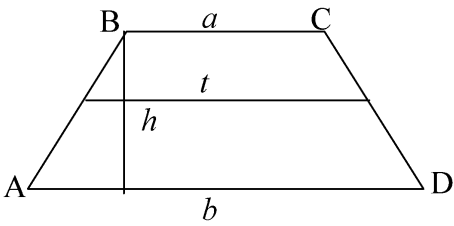
Прямокутник та ромб

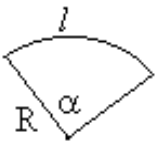
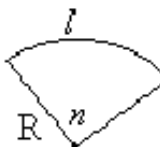
Властивості

1. Діагоналі прямокутника рівні.
2. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні та ділять кути ромба навпіл.

Ознаки

1. Якщо у паралелограма діагоналі рівні, то такий паралелограм – прямокутник.
2. Якщо у паралелограма діагоналі перпендикулярні, то такий паралелограм – ромб.
3. Якщо у паралелограма діагоналі ділять його кути навпіл, то такий паралелограм – ромб.

Трапеція		
Рисунок	Позначення	Формули
	a, b – основи h – висота t – середня лінія S – площа	$t = \frac{a + b}{2}$ $S = t \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h$
Основні властивості		
Середня лінія трапеції паралельна основам та дорівнює їх півсумі.		
Круг і коло		
Рисунок	Позначення	Формули
	R – радіус кола c – довжина кола S – площа круга l – довжина дуги кола S_c – площа сектора	Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається. $\angle AOB = \cup AmB$ Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB$

 	α - радіанна міра центрального кута, який відповідає дузі n – градусна міра центрального кута, який відповідає дузі	Кут між дотичною і хордою, що проведені через деяку точку кола, вимірюється половиною дуги, що знаходиться між ними. $\angle BCD = \frac{1}{2} \cup CnD.$ $c = 2\pi R \quad S = \pi R^2$ $l = \alpha R, \quad S_c = \frac{\alpha R^2}{2}$ $l = \frac{\pi^\circ}{180^\circ} R, \quad S_c = \frac{\pi^\circ}{360^\circ} R^2.$
--	--	--

	Метричні співвідношення у колі Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці M у внутрішній частині кола, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.
Якщо із точки M, що лежить поза колом, провести до кола січну MAV і дотичну MC,	то $AM \cdot VM = CM^2 = a^2 - R^2.$

Вектор

Вектор - це величина, яка характеризується числовим значенням і напрямком. Під направленим відрізком $\overline{AB}$ розуміють впорядковану пару

точок, перша з яких - точка A - називається його **початком**, а друга - B - його **кінцем**.

Вектори позначають двома способами:

- малими буквами латинського алфавіту (наприклад, $\vec{a}$);
- двома великими буквами латинського алфавіту (наприклад, $\overrightarrow{AB}$), де перша буква - початок вектора, а друга - кінець.

Графічно вектори зображують у вигляді направлених відрізків певної довжини $\overrightarrow{AB}$.

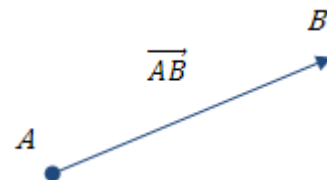


Рис.1. Вектор AB з початком в A і кінцем в B .

Примітка. Поняття вектора з'явилося в роботах німецького математика XIX ст. Г. Грассмана та ірландського математика У. Гамільтона.

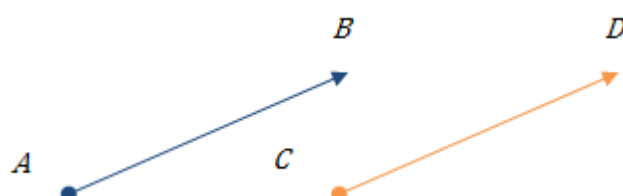
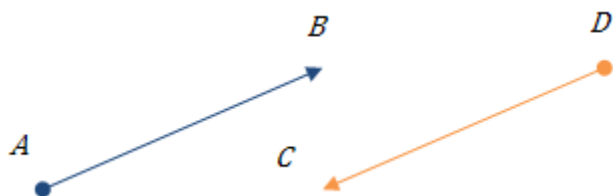
Чисельне значення вектора $\vec{a}$ називається **модулем** чи **довжиною** і позначається $|\vec{a}|$. Довжина вектора - це довжина відрізка, що зображає цей вектор.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають **протилежно напрямленими**, якщо протилежно напрямлені півпрямі AB і CD .

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають **співнаправленими**, якщо співнаправлені півпрямі AB і CD .

Рис.2. Протилежно напрямлені вектори.

Рис.3. Співнаправлені вектори.



Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається **нульовим** і позначається $\vec{0}$. Нульовий вектор має довжину 0. Напрям нульового вектора

не визначений. Нульовий вектор прийнято рахувати співнапрямленим з будь-яким вектором. Вважається, що нульовий вектор одночасно паралельний і перпендикулярний будь-якому вектору.

Колінеарними називаються вектори, які зображаються відрізками, що лежать на одній прямій чи на паралельних прямих.

Два вектора називаються **рівними**, якщо вони однієї довжини і їх напрямки збігаються.

Одиничний вектор (орт) - вектор, довжина якого рівна одиниці.

Числа $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$ називаються **координатами** вектора $\vec{a}$ з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$.

Примітка. Всі координати нульового вектора дорівнюють нулю.

Примітка. Вектори рівні, коли їх відповідні координати рівні.

Вектор з координатами a_x і a_y позначається $\overrightarrow{(a_x; a_y)}$.

Вектор $\vec{a}$ з координатами a_x і a_y позначається $\vec{a}(a_x; a_y)$.

Використовуючи означення координат вектора довжину можна записати

формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Дії над векторами на площині

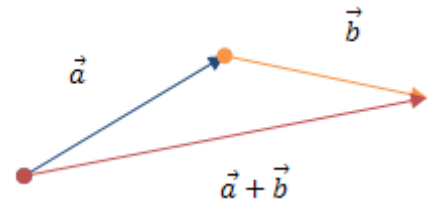
Сумою векторів $\vec{a}(a_x; a_y)$ і $\vec{b}(b_x; b_y)$ називають вектор $\vec{c}(a_x + b_x; a_y + b_y)$.

Геометрично суму двох векторів можна знайти за:

- правилом трикутника;
- правилом паралелограма.

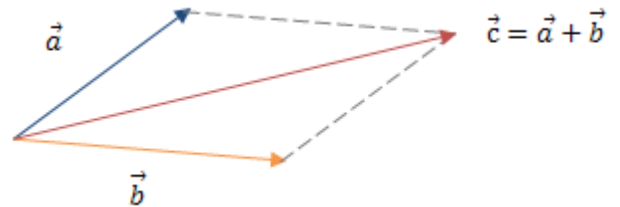
Правило трикутника

Для складання двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за правилом трикутника обидва ці вектори переносяться паралельно самим собі так, щоб початок одного з них збігався з кінцем іншого. Тоді вектор суми задається третьою стороною трикутника, що утворився, причому його початок збігається з початком першого вектора.

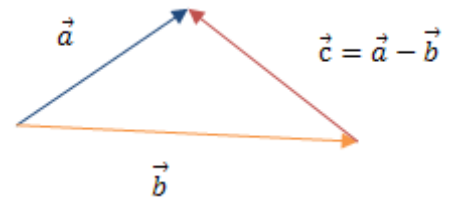


Правило паралелограма

Для складання двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за правилом паралелограма обидва ці вектори переносяться паралельно самим собі так, щоб їх початки збігалися. Тоді вектор суми задається діагоналлю побудованого на них паралелограма, яка виходить з їх спільного початку.



Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з $\vec{b}$ дає $\vec{a}$.



Добуток вектора $\overrightarrow{(a_x; a_y)}$ на число λ називається вектор $\overrightarrow{(\lambda a_x; \lambda a_y)}$.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке рівне сумі добутків відповідних координат, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$, де $(\vec{a}; \vec{b})$ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Дидактичні матеріали для повторення курсу

« ГЕОМЕТРІЯ-10»

за збірником Федченко Л. Я., Литвиненко Г. М.

*«Різнорівневі завдання для тематичних та підсумкових
контрольних робіт 10-11 класи» , Донецьк-2004*

Тема№1 « Систематизація планіметрії»:

стор.7-12 - 10 клас - діагностична контрольна робота - варіанти 1-6.

Тема№2 « Паралельність прямих та площин»:

стор. 13-20- 10 клас – ткр №1- варіанти 1-8

стор.25-28- 10 клас - пкр за І семестр, завдання 1-4

стор.37-40- 10 клас - ркр- варіанти 1-4, завдання №1

стор.41-46- 11 клас- дкр- варіанти 1-6, завдання №1

Тема№3 « Перпендикулярність прямих та площин»:

стор. 21-24 - 10 клас- ткр№2- варіанти 1-4

стор.37-40 - 10 клас- ркр- варіанти 1-4, завдання №2

стор.41-46 - 11 клас- дкр- варіанти 1-6, завдання №2

**Дидактичні матеріали для організації діагностичного
повторення курсу « ГЕОМЕТРІЯ-10»**

Планіметрія			
<i>Л.Я. Федченко, Донецьк, „Каштан”, 2009. Збірник завдань для тематичних і підсумкових атестацій. Геометрія 7-9 класи.</i>			
Тема: Прямокутний трикутник			
Розділ	I рівень	II рівень	III рівень
Теорема Піфагора	№ 955-956; № 969-974; № 983-994; № 997-1022	№ 1277-1281; № 1283; № 1285-1288; № 1291-1294; № 1304; № 1307; № 1309, № 1310; № 1331-1336; № 1338-1340	№ 1556-1571; № 1574; № 1575; № 1577; № 1580; № 1585; № 1594
Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника	№ 953; № 954; № 967; № 968; № 975-978; № 995; № 996; № 1010; № 1018-1021; № 1024-1030	№ 1275-1278; № 1305; № 1311-1315; № 1317; № 1318-1340	№ 1554; № 1555; № 1578-1584; № 1586; № 1587; № 1590; № 1591; № 1595; № 1596; № 1602;

			№ 1603; № 1608-1615
Теорема синусів	№ 1663-1667	№ 1940-1945	№ 2101; № 2102
Теорема косинусів	№ 1650-1657	№ 1924-1931	№ 2093-2096
Координати на площині	№ 1766-1790	№ 2002-2005	№ 2148-2153
Вектори на площині	№ 1841-1887	№ 2047-2073	№ 2197-2222

Стереометрія

Г.М. Литвиненко, Л.Я Федченко, В.А.Швець, Донецьк, 2000. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту.

Геометрія 10-11.

Тема: Паралельність у просторі

Розділ	I рівень	II рівень	III рівень
Паралельність прямих	№ 1а; № 6; № 9	№ 47; № 63; № 73; № 75	
Паралельність прямої та площини	№ 15; № 19; № 27; № 35	№ 46; № 67; № 70; № 71	№ 119; № 120
Паралельність площин	№ 8; № 10; № 12; № 17	№ 49; № 50; № 52; № 74	№ 180
Комбіновані задачі	№ 11; № 7; № 13; № 14; № 40	№ 41; № 42; № 43; № 44; № 45	

Тема: Перпендикулярність у просторі

Перпендикулярність прямих	№ 20; № 21	№ 68; № 69	
Теорема про три перпендикуляри	№ 23	№ 57; № 77; № 93; № 96	
Перпендикулярність прямої і площини	№ 18; № 22; № 25; № 36	№ 48; № 53; № 54; № 72; № 85; № 86; № 89; № 91; № 92	№ 148; № 172
Перпендикулярність площин	№ 26	№ 58; № 60; № 80; № 110; № 111; № 112; № 113	№ 135; № 154
Комбіновані задачі	№ 28	№ 51	№ 121; № 130; № 131; № 132; № 133
Тема: Відстані і кути у просторі			
Відстані між прямими			№ 137; № 175
Відстань від точки до площини		№ 79; № 81; № 88; № 106; № 107;	№ 151; № 152; № 168; № 169;

		№ 108; № 109; № 115; № 116	№ 176; № 177
Відстань між площинами			№ 163
Кут між прямою і площиною	№ 29; № 34	№ 65; № 78	№ 123; № 165; № 173; № 178
Кут між площинами	№ 24; № 30	№ 61; № 100; № 102; № 117; № 118	№ 124; № 126; № 149; № 150; № 153; № 157 № 160; № 164; № 171; № 182; № 183; № 184
Відстань від точки до вершин многокутника	№ 32	№ 59; № 76; № 82; № 83; № 97; № 104; № 105	№ 129; № 134; № 139; № 147;

			№ 159; № 166
Відстань від точки до сторін многокутника	№ 31	№ 55; № 56; № 84; № 87; № 90; № 94; № 95; № 98; № 101; № 103; № 114	№ 127; № 136; № 138; № 155; № 158; № 162; № 167; № 170; № 179;
Комбіновані задачі	№ 33	№ 64; № 66	№ 122; № 125; № 128; № 140; № 161; № 181; № 185

Урок №1. Система опорних фактів з планіметрії. Координати та вектори на площині.

Індивідуальна робота з теми «Вектори»

Дано точки А, В, С, Д.

1. Знайдіть координати векторів $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{DA}$.
2. Знайдіть абсолютну величину векторів $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{DA}$.
3. Знайдіть скалярні добутки: $\overline{AB} \bullet \overline{AD}, \overline{AB} \bullet \overline{DA}$.
4. Визначите вид кута між векторами $\overline{AB}$ й $\overline{AD}$ і вид кута, утвореного векторами $\overline{AB}$ й $\overline{DA}$.
5. Знайдіть значення косинуса кута між векторами $\overline{AB}$ й $\overline{AD}$ і векторами $\overline{AB}$ и. $\overline{DA}$
6. Знайдіть координати точок Р и К, якщо Р - середина відрізка ВР,
а К - середина відрізка ДС.

7. Знайдіть довжину відрізка РК.
8. Знайдіть координати векторів $\overline{PB}$ й $\overline{KD}$.
9. З'ясувати, чи будуть вектори $\overline{PB}$ й $\overline{KD}$ перпендикулярними?
10. Встановити, чи є вектори $\overline{PB}$ й $\overline{KD}$ колінеарними?
11. Встановити вид чотирикутника ABCD.
12. Встановити вид трикутника PCK.
13. Відкласти від точки Д вектор, який дорівнює вектору $\overline{BC}$.
14. Відкласти від початку координат вектор $\overline{a}$, заданий формулою $\overline{a} = 2\overline{AD} + 3\overline{AB}$ (двома способами).
15. Відкласти від початку координат вектор $\overline{e}$, заданий формулою $\overline{e} = \frac{1}{2}\overline{AD} - 2\overline{AB}$ (двома способами).
16. Виразити вектор $\overline{PK}$ через вектори $\overline{BA}$ й $\overline{DA}$, де Р и К - середини сторін ВР і ДС відповідно.
17. Складіть рівняння окружності, діаметром якої є відрізок ВР.
18. Складіть рівняння прямої РК.

Варіанти завдань

1. A(-3; 5) B(-3; 8) C(2; 10) D(2; 7)	14. A(2; 3) B(3; 5) C(10; 1) D(11; -2)	27. A(-2; -2) B(-4; -6) C(4; -10) D(6; -6)
2. A(-9; 1) B(-7; 5) C(-3; 7) D(-5; 3)	15. A(7; -1) B(4; -4) C(-2; -6) D(1; -3)	28. A(-8; -2) B(-10; 1) C(-4; 5) D(1; 4)

3. A(0; 0) B(0; 2) C(6;8) Д(10; 10)	16. A(-7;-2) B(-1;-3) C(0;-10) Д(-7;-9)	29. A(-6;-1) B(0;1) C(6;1) Д(0;-1)
4. A(-2;1) B(-1;6) C(-6;7) Д(-7;2)	17. A(-9;4) B(-8;7) C(-5;9) Д(0;10)	30. A(0;0) B(4;-1) C(5;-5) Д(1;-4)
5. A(-2;-2) B(0;2) C(6;8) Д(10;10)	18. A(4;-1) B(7;-4) C(4;-7) Д(1;-4)	31. A(-7;4) B(-3;2) C(-1;-2) Д(-3;-4)
6. A(2;3) B(3;5) C(10;1) Д(9;-1)	19. A(9;-4) B(11;2) C(12;2) Д(14;-4)	32. A(-2;0) B(-1;4) C(3;3) Д(2;-1)
7. A(-3;1) B(-1;7) C(2;6) Д(-1;-3)	20. A(-8;-2) B(-10;1) C(-1;7) Д(1;4)	33. A(-3;-2) B(-4;4) C(4;-4) Д(-2;-3)
8. A(-14;-2) B(-11;2) C(-3;2) Д(-6;-2)	21. A(-4;-6) B(-2;-2) C(2;-4) Д(4;-10)	34. A(-2;-1) B(-2;-2) C(7;-2) Д(7;-1)
9. A(6;0) B(5;-5) C(0;-6) Д(1;-1)	22. A(0;6) B(5;4) C(7;0) Д(2;2)	35. A(-2;-1) B(-2;-2) C(7;-2) Д(3;-1)
10. A(-4;-10) B(0;-6) C(4;-6) Д(2;-10)	23. A(0;2) B(1;5) C(0;8) Д(-1;5)	36. A(0;-6) B(4;-4) C(4;-8) Д(0;-10)
11. A(-5;-1) B(-2;-3) C(-4;-6) Д(-7;-4)	24. A(0;2) B(0;6) C(3;9) Д(6;8)	37. A(7;0) B(10;2) C(13;0) Д(10;-2)
12. A(-4;-10) B(0;-6) C(4;-6) Д(8;-10)	25. A(3;0) B(1;3) C(7;2) Д(6;-1)	38. A(4;-4) B(5;0) C(8;0) Д(13;-4)
13. A(-3;1) B(-1;7) C(2;6) Д(0;0)	26. A(0;2) B(0;6) C(3;9) Д(7;9)	

Математичний диктант

№1

Варіант 1

- 1.Запишіть коротко «вектор а».
2. Зобразити вектор $\overrightarrow{PK}$.
- 3.Запишіть позначення вектора з кінцем у точці Х та початком у точці У.

Математичний диктант

№1

Варіант 2

- 1.Запишіть коротко «вектор в».
2. Зобразити вектор $\overrightarrow{FR}$.
- 3.Запишіть позначення вектора з кінцем у точці Р та початком у точці А.

4.Зобразити два однаково спрямованих, але не рівних вектора.

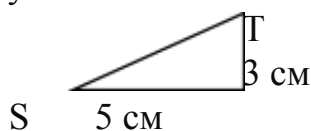
5.Що можна сказати про напрямок двох рівних векторів ?

6.Запишіть у вигляді рівності, чому дорівнює абсолютна величина нульового вектора.

7. Зобразити вектор $\overline{BC}$ і точку У. Відкладіть від точки У вектор, рівний $\overline{BC}$.

8. Запишіть за допомогою позначень «довжина вектора $\overline{CE}$ дорівнює 3 см».

9.Знайдіть довжину вектора, зображеного на рисунку:



10. Чи вірно твердження: «Якщо вектори $\overline{a}$ й $\overline{b}$ рівні, то вони колінеарні»?

4.Запишіть у вигляді рівності, чому дорівнює абсолютна величина нульового вектора.

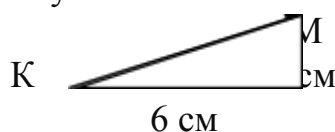
5. Зобразити вектор $\overline{AB}$ і точку М. Відкладіть від точки М вектор, який дорівнює вектору $\overline{AB}$.

6.Що можна сказати про напрямок двох рівних векторів ?

7.Зобразити два однаково спрямованих, але не рівних вектора.

8. Запишіть за допомогою позначень «довжина вектора $\overline{AD}$ дорівнює 4 см».

9.Знайдіть довжину вектора, зображеного на малюнку:



10. Чи вірно твердження: «Якщо два вектори колінеарні, то вони однаково спрямовані»?

Математичний диктант №2

Варіант 1

1. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, де $A(1;3)$, $B(-2;0)$.

2. Знайдіть довжину вектора $\overline{a}(-3;4)$.

Математичний диктант №2

Варіант 2

1. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, де $A(2;4)$, $B(-3;0)$.

2. Знайдіть довжину вектора $\overline{a}(6;-8)$.

- | | |
|---|--|
| <p>3. Знайдіть суму векторів $\vec{b}(-3;2)$ і $\vec{c}(-4;5)$.</p> <p>4. Чи колінеарні вектори $\vec{a}(-1;2)$ і $\vec{b}(2;-4)$?</p> <p>5. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{e}(1;5)$ і $\vec{f}(-3;-2)$.</p> <p>6. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}$ й $\vec{d}$, якщо $\vec{c} =5, \vec{d} =4$, а кут між цими векторами дорівнює 30°.</p> <p>7. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}(-2;3)$ і $\vec{g}(-1;2)$?</p> <p>8. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(1;1)$ і $\vec{b}(1;0)$.</p> <p>9. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{c}(-3;1)$ і $\vec{d}(3;-4)$.</p> <p>10. Вектор $\vec{FK}$ має координати $(-3;8)$, а точка $F(5;2)$. Знайдіть координати точки K.</p> | <p>3. Знайдіть суму векторів $\vec{b}(-2;3)$ і $\vec{c}(-4;7)$.</p> <p>4. Чи колінеарні вектори $\vec{a}(-2;4)$ і $\vec{b}(6;-5)$?</p> <p>5. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{e}(3;4)$ і $\vec{f}(-2;1)$.</p> <p>6. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}$ й $\vec{d}$, якщо $\vec{c} =3, \vec{d} =6$, а кут між цими векторами дорівнює 45°.</p> <p>7. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}(-3;2)$ і $\vec{g}(4;6)$?</p> <p>8. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(2;2)$ і $\vec{b}(0;2)$.</p> <p>9. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{c}(-2;1)$ і $\vec{d}(4;-3)$.</p> <p>10. Вектор $\vec{FK}$ має координати $(-4;-3)$, а точка $F(1;3)$. Знайдіть координати точки K.</p> |
|---|--|

Варіант 3

1. Знайдіть координати вектора $\vec{AB}$, де $A(3;5)$, $B(-3;2)$.

Варіант 4

1. Знайдіть координати вектора $\vec{AB}$, де $A(4;6)$, $B(-2;4)$.

2. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$ (2;-4).	2. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$ (-8;2).
3. Знайдіть суму векторів $\vec{b}$ (-4;2) і $\vec{c}$ (5;7).	3. Знайдіть суму векторів $\vec{b}$ (2;-6) і $\vec{c}$ (4;-8).
4. Чи колінеарні вектори $\vec{a}$ (8;-4) і $\vec{b}$ (-2;-1)?	4. Чи колінеарні вектори $\vec{a}$ (7;-3) і $\vec{b}$ (1;-4)?
5. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{e}$ (4;2) і $\vec{f}$ (-2;1).	5. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{e}$ (3;2) і $\vec{f}$ (-4;6).
6. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}$ й $\vec{d}$, якщо $ \vec{c} = 5, \vec{d} = 4$, а кут між цими векторами дорівнює 150° .	6. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}$ й $\vec{d}$, якщо $ \vec{c} = 3, \vec{d} = 6$, а кут між цими векторами дорівнює 135° .
7. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ (3;2) і $\vec{g}$ (-4;6)?	7. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ (4;2) і $\vec{g}$ (-2;1)?
8. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ (-1;1) і $\vec{b}$ (-1;0).	8. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ (-2;2) і $\vec{b}$ (0;-2).
9. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{c}$ (3;1) і $\vec{d}$ (3;4).	9. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{c}$ (2;1) і $\vec{d}$ (4;3).
10. Вектор $\overrightarrow{FK}$ має координати (2;11), а точка F(2;-3). Знайдіть координати точки K.	10. Вектор $\overrightarrow{FK}$ має координати (-9;10), а точка F(4;-3). Знайдіть координати точки K.

Відповіді до математичного диктанту №2

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4
1. $(-3;-3)$	1. $(-5;-4)$	1. $(-6;-3)$	1. $(-6;-2)$
2. 5	2. 10	2. $2\sqrt{5}$	2. $2\sqrt{17}$
3. $(-7;7)$	3. $(-6;10)$	3. $(1;9)$	3. $(6;-14)$
4. так	4. немає	4. так	4. немає
5. -13	5. -2	5. -6	5. 0
6. $10\sqrt{3}$	6. $\frac{18}{\sqrt{2}}$	6. $-10\sqrt{3}$	6. $-\frac{18}{\sqrt{2}}$
7. немає	7. так	7. так	7. немає
8. 45^0	8. 45^0	8. 45^0	8. 135^0
9. $-\frac{13}{5\sqrt{10}}$	9. $-\frac{11}{5\sqrt{5}}$	9. $\frac{13}{5\sqrt{10}}$	9. $\frac{11}{5\sqrt{5}}$
10. $K(2;10)$	10. $K(-3;0)$	10. $K(4;8)$	10. $K(-5;7)$

Урок №2. Аксиоми стереометрії, їх наслідки. Паралельність і перпендикулярність прямих і площин.

Мета: Повторити аксиоми стереометрії, звернути особливу увагу на випадки існування площини, яка проходить через:

- три точки, що не лежать на одній прямій;
- пряму і точку, що не належить цій прямій;
- дві прямі, що перетинаються;
- дві паралельні прямі.

Відновити знання щодо взаємного розташування прямих у просторі:

- прямі розташовані паралельно одна одній;
- прямі є мимобіжними;
- прямі перетинаються (як випадок розглянути перпендикулярність двох прямих).

При розв'язуванні задач повторити знаходження відстаней (між точкою та прямою, між двома прямими) та лінійних кутів між двома прямими у просторі.

Розглянути прості випадки побудови перерізів многогранників.

Повторити ознаку перпендикулярності площин, застосовувати знання до розв'язування задач, побудови зображень найпростіших плоских і просторових фігур. Розвивати логічне мислення. Виховувати наполегливість та акуратність в роботі.

Повторити ознаки паралельності прямої та площини, властивості прямої, паралельної площині; взаємне розташування площин у просторі, ознака паралельності площин, розглянути властивості паралельних площин, а також основні властивості паралельного проектування.

Питання для обговорення до теми: «Основні поняття й аксіоми стереометрії»

1. Чи можуть три точки розташовуватися так, щоб через них можна було провести дві різні площини?
2. Чи можуть лежати в одній площині тільки три вершини паралелограма?
3. Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?
4. Чи вірно, що трикутник лежить у площині, якщо його вершини лежать у цій площині?
5. Чи завжди пряма, що перетинає кожную із двох прямих, які перетинаються, лежить із ними в одній площині?

6. Чому триколісний велосипед у нерухомому стані стійкий, а двохколесний - ні?

7. Площини α й β перетинаються по прямій. Точки А та В лежать в одній із цих площин, а С і Д - в іншій. Чи можуть точки А, В, С і Д лежати на одній прямій?

8. Столяр за допомогою лінійки може перевірити, чи добре відшліфована поверхня. Як він це робить?

9. За допомогою двох шнурів столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок в одній площині, тобто чи буде стіл стійкий. Як він це робить?

10. У землю вбили три стовпчики різної висоти. Чи завжди на них можна покласти аркуш фанери?

11. Чи можна розрізати торт на вісім частин, зробивши лише три розрізи?

Контрольні питання за темою «Основні поняття й аксіоми стереометрії»

1. Чи вірно, що паралелограм лежить у площині, якщо якісь три його вершини лежать у цій площині?

2. Чи можна стверджувати, що один з діаметрів кола належить площині, якщо дві точки кола належать цій площині?

3. Дві вершини трикутника належать площині. Чи належить їй третя вершина, якщо цій площині належить ще й точка перетину медіан?

4. Чи вірно, що через три точки можна провести єдину площину?
5. Чи можуть три точки бути розташовані так, що через них можна провести дві різні площини?
6. Чи вірно, що пряма АВ є лінією перетину двох різних площин, які мають спільні точки А и В?
7. Чи вірно, що дві площини або мають нескінченно багато спільних точок, або не мають ні однієї?
8. Відомо, що чотири точки не належать одній площині. Чи можуть якісь три з них лежати на одній прямій?
9. Чи завжди пряма, що перетинає кожную із двох прямих, які перетинаються, лежить із ними в одній площині?
10. Чи існують дві прямі, які не лежать в одній площині?
11. Яка найбільша кількість частин, на які може бути поділений простір трьома різними площинами?

Тест із відкритою формою запису

Заповніть пропуски

1. Якщо дві точки прямої належать деякій площині, то й _____ цієї площини.
2. Якщо _____ дві _____ різні _____ прямі _____, то через них можна провести єдину площину.
3. Через _____ точки, _____, можна провести єдину площину.

4. Яка б не була _____ існують точки,

_____ й
_____.

5. Якщо дві різні площини _____, то ці
площини _____, що проходить через цю
точку.

6. Через _____ пряму _____ й
_____, можна
провести єдину площину.

Символьний диктант

Запишіть дані твердження мовою символів.

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй.
2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.
3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і притім тільки одну.
4. Через пряму й точку, яка не лежить на ній, можна провести площину, і притім тільки одну.
5. Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.
6. Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і притім тільки одну.

7. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну цій прямій, і притім тільки одну.
8. Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні.
9. Якщо пряма, що не належить площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.
10. Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим іншої площини, то ці площини паралельні.
11. Якщо пряма перетинає одну із двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу площину.
12. Якщо дана площина перетинає одну із двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу площину.
13. Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.
14. Відрізки паралельних прямих, які утворюються між двома паралельними площинами, рівні.
15. Через дві паралельні прямі можна провести площину, і притім тільки одну.

Питання для обговорення за темою «Паралельність прямих і площин»

1. Пряма мимобіжна з деякою прямою, що лежить у цій площині. Чи може вона бути паралельною цій площині?
2. Пряма a паралельна площині. Чи вірно, що пряма b , яка паралельна прямій a , паралельна цієї площини?
3. Чи може пряма не бути паралельною площини, якщо в цій площині є пряма, яка їй паралельна?

4. Чи вірно, що через дану точку можна провести єдину площину, паралельну даній прямій?

5. Чи вірно, що дві прямі мимобіжні, якщо одна з них паралельна деякій площині, а інша перетинає цю площину?

6. Чи може пряма бути паралельна двом площинам, які перетинаються?

7. Чи вірно, що дві прямі, які паралельні одній площині, паралельні між собою?

8. Лінії перетину двох площин третьою площиною паралельні між собою. Чи паралельні ці площини?

9. Чи вірно, що дві площини паралельні, якщо кожна пряма, що лежить в одній площині, не лежить в іншій?

10. Чи завжди паралельні дві площини, одна з яких містить дві прямі, паралельні іншій площині?

11. Чи завжди можна побудувати пряму, що проходить через дану точку і паралельна двом даним площинам?

12. Чи може пряма перетинати тільки одну із двох паралельних площин?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
так	немає	так	немає	немає	так	немає	немає	так	немає	немає	немає

Контрольні питання за темою «Паралельність прямих і площин»

1. У даній площині лежить тільки одна сторона трапеції. Чи вірно, що одна зі сторін трапеції паралельна даній площині?

2. Чи вірно, що середня лінія трикутника паралельна будь-якій площині, що проходить через сторону цього трикутника, паралельно середній лінії?
3. Чи може площина, що проходить через середини двох сторін трикутника, перетинати його третю сторону?
4. Чи завжди можна через дану точку провести пряму, яка паралельна двом даним площинам?
5. Чи вірно, що дві прямі, які паралельні одній й тій же площині, паралельні між собою?
6. Відомо, що пряма паралельна площині. Чи існують у площині прямі, які не паралельні даній прямій?
7. Чи можуть прямі, які паралельні одній площині, біти мимобіжними?
8. Чи можуть бути рівні два непаралельних відрізки, які утворюються між паралельними площинами?
9. У площині нескінченно багато прямих, паралельних іншій площині. Чи вірно, що ці дві площини паралельні?
10. Дві сторони паралелограма паралельні площині. Чи вірно, що ця площина й площина паралелограма паралельні?
11. Чи вірно, що дві площини, які паралельні одній й тій же прямій, паралельні між собою?
12. Чи може пряма перетинати одну з паралельних площин, а іншій бути паралельною?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
немає	немає	немає	немає	немає	так	так	так	немає	немає	немає	немає

Питання для обговорення за темою

«Перпендикулярність прямих і площин»

1. Як перевірити за допомогою вимірювань, чи є перпендикулярною до підлоги лінія, по якій з'єднуються дві суміжні стіни кімнати?
2. Як перевірити за допомогою рулетки вертикальність стовпа?
3. Як перевірити, чи перпендикулярна площина колеса до осі, на яку воно насаджено?
4. Як перевірити вертикальність стержня, користуючись лише прямокутним аркушем паперу?
5. Чому льодові бурульки, які звисають з даху навесні, можна вважати паралельними між собою (нехтуючи їхньою товщиною)?
6. Чому поверхню стола можна вважати горизонтальною, якщо він стійко стоїть на підлозі, тобто всі його ніжки однакові, торкаються підлоги і розміщені вертикально до неї.
7. Чому для встановлення горизонтальної платформи на горизонтальній поверхні досить помістити її на вертикальні опори однакової висоти?
8. Щоб переконатись у вертикальності двох стовпчиків, учень перевірів, що перший встановлено вертикально і висоти стовпчиків однакові. Відстані між їх основами та верхівками теж однакові. Чи можна після цього зробити висновок, що й другий стовпчик встановлено вертикально?
9. Як на практиці перевірити, чи перпендикулярна площина стіни до площини підлоги?
10. Чому висок щільно прилягає до вертикальної стіни, а до похилої – ні?

11. Чому поверхня дверей, незалежно від того, зачинені вони чи відкриті, розміщена вертикально до підлоги?
12. Як до невертикального стовпа прикріпити вертикальну стінку?
13. Як, користуючись лише рулеткою, визначити кут нахилу стовпа до землі?
14. Труба розміщена на схилі гори. Запропонуйте спосіб визначення кута її нахилення до горизонтальної поверхні.
15. Як би ви вимірювали кут, утворений сонячним променем з поверхнею землі?
16. Запропонуйте спосіб визначення кута нахилу жолоба для стікання води з даху будівлі до поверхні землі.

Паралельність прямих і площин у просторі

Задачі на побудову та обчислення

1. Трикутник ABC і паралелограм $ABTD$ лежать у різних площинах; M , N , K – середини сторін AC , BC , BT відповідно.
 - а) Визначте взаємне розміщення прямих і площин:
 DT і ABC ; AB і MNK ; AC і DVT ; MK і BCD .
 - б) Побудуйте точку перетину P прямої VD з площиною AST .
 - в) Обчисліть довжину відрізка PK , якщо $MN = 3$ см.
 - г) Побудуйте пряму, паралельну площинам трикутника і паралелограма.
2. Ромб $ABCD$ і прямокутник $DBET$ лежать у різних площинах; M , N , K – середини сторін AD , AB , ET відповідно.
 - а) Визначте взаємне розміщення прямих і площин:
 ET і ABC ; MC і DET ; MN і STE ; BE і ADT .
 - б) Побудуйте точку перетину P прямої MN з площиною BCE .

в) Обчисліть довжину відрізка ET , якщо $MH = 4$ см.

г) Побудуйте пряму, паралельну площинам ромба і прямокутника.

3. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки O, O_1 – центри граней $ABCD$ та $A_1 B_1 C_1 D_1$ відповідно, M – середина ребра AB .

а) Визначте взаємне розміщення площин $MO_1 O$ і ADD_1 , ABD_1 і $CO_1 C_1$.

б) Побудуйте точку перетину площини DCC_1 і прямої MO_1 та лінію перетину площин MCC_1 і $A_1 D_1 C_1$.

в) Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка паралельна площині $AD_1 C_1$ і проходить через точку O_1 , якщо ребро куба дорівнює a .

4. У тетраедрі $ABCD$ точки K, T, E – середини ребер AD, DC, DB , а M і P центри мас граней ABD і BSC відповідно.

а) Визначте взаємне розміщення площин KET і ABC ; DET і ABC .

б) Побудуйте точку перетину площини KMT і прямої BD та лінію перетину площин KTP і ABD .

в) Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, яка паралельна площині ABD і проходить через точку P , якщо всі ребра тетраедра дорівнюють a .

5. Точка S знаходиться поза площиною трикутника ABC . Точки A_1, B_1 і C_1 , відповідно, є серединами відрізків SA, SB і SC . Точки K і M поділяють відрізки CA і CB у відношенні $1 : 3$, якщо лічити від точки C .

а) Визначте взаємне розміщення прямих KM і $A_1 B_1$.

б) Побудуйте лінію перетину площини $A_1 B_1 M$ з площиною ACS .

в) Визначте взаємне розміщення прямої KM і площини $A_1 B_1 C_1$.

г) Визначте взаємне розміщення площин AKM і $A_1 B_1 C_1$.

г) Побудуйте площину β , яка проходить через пряму КМ паралельно площині ABS.

д) Побудуйте точку перетину площини β з прямою, яка з'єднує точку С з серединою H_1 відрізка A_1B_1 . У якому відношенні ця точка поділяє відрізок CH_1 ?

6. Площина паралелограма ABCD паралельна площині α . Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1 .

а) Побудуйте лінію перетину площини DCS_1 з площиною α .

б) Визначте взаємне розміщення прямих DC і D_1C_1 .

в) Визначте взаємне розміщення прямої D_1C_1 і площини ABV_1 .

г) Визначте взаємне розміщення площин AA_1V і CC_1D_1 .

г) Побудуйте лінію перетину площини ABC з площиною, яка проходить через середину М сторони АД і пряму A_1B_1 .

д) Побудуйте висоту паралелограма ABCD, проведену до сторони АД, і обчисліть її довжину, якщо $AB = BD = 5$ см, $AD = 8$ см.

Задачі на перпендикулярність прямих і площин у просторі

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С. Геометрія. Дидактичний матеріали з геометрії. 10-11 класи. Тернопіль. Навч.кн. «Богдан», 2003 р., с. 15-20.

1. Три прямі, які проходять через точку Д, перетинають четверту пряму в точках А, В, С. Доведіть, що точки А, В, С, Д лежать в одній площині.

2. Дві суміжні вершини і точки перетину діагоналей трапеції лежать у площині α . Доведіть, що й інші дві вершини трапеції лежать у площині α .

3. Два паралелограми ABCD і ABC_1D_1 лежать у різних площинах.

Встановіть взаємне розміщення прямих:

- 1) AB і AD_1 ; 2) BC і D_1C_1 ; 3) AB і D_1C_1 ;
4) DC_1 і D_1C ; 5) CB і AD_1 ; 6) DD_1 і CC_1 .

4. Два рівнобедрених трикутники ABC і ABC_1 із спільною основою AB лежать у різних площинах. Встановіть взаємне розміщення прямих, які містять:

- 1) сторони AC і BC_1 ;
 - 2) сторони AC і AC_1 ;
 - 3) середні лінії трикутників, що не перетинаються з AB ;
 - 4) висоти трикутників, що проходять через вершини C і C_1 .
5. Площина α проходить через бічну сторону AD трапеції $ABCD$, площина якої не збігається з α .

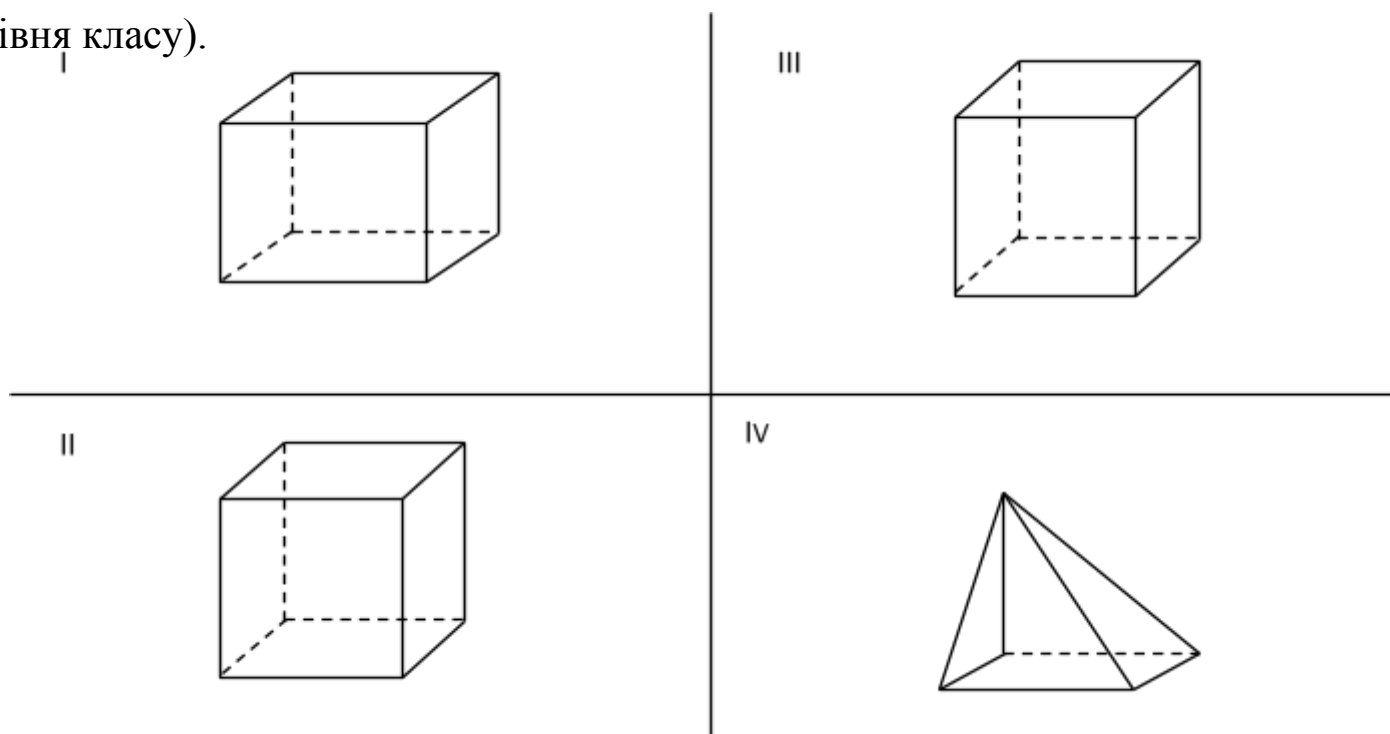
- а) Побудуйте точку перетину K прямої CB з площиною α .
 - б) Знайдіть довжину відрізка KD , якщо $CD : AB = 2 : 3$, а $DA = 2$ см.
6. Паралелограм $ABCD$ і трикутник ABK не лежать в одній площині. Визначте пряму перетину площин: а) KBC і AKC ; б) AKC і ABD ; в) AKD і ABC .

7. Площини ABC і DBC мають спільну точку K . Знайдіть довжину відрізка BC , якщо $BK = 8$ см, $CK = 3$ см.

8. Точки A , B , C – спільні точки двох різних площин. Знайдіть довжину відрізка AC , якщо $AB = BC = 4$ см.

9. Дано п'ять точок A , B , M , P , K . Відомо, що площина проходить через точки A і B , але не проходить через точки M , P , K . Серед даних точок назвіть точку, яка не може належати прямій AM (P , B , K або інша відповідь).

10. Побудуйте перерізи многогранників (на бланку вчителю необхідно вказати точки, через які повинен проходити переріз, в залежності від рівня класу).

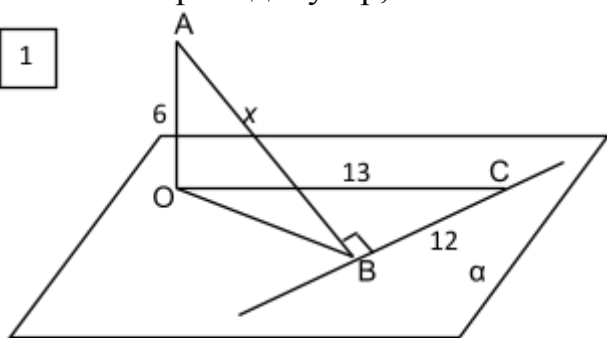


Задачі на готових кресленнях

Знайдіть невідомий елемент x (усно).

Дано: AO – перпендикуляр, AB – похила до площини α .

1

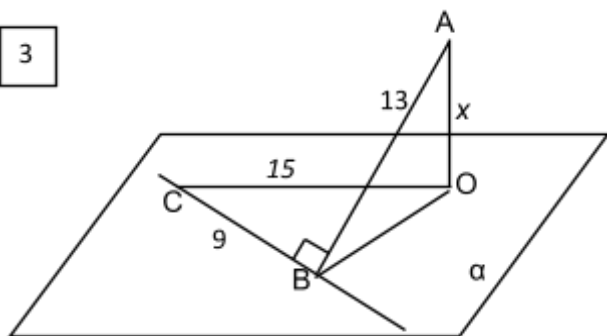


Відповідь _____

мал. 1

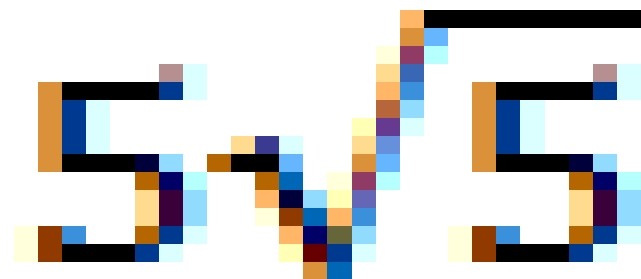


3

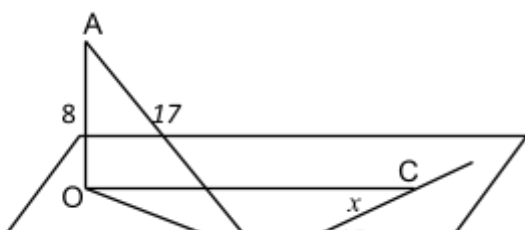


Відповідь _____

мал. 3

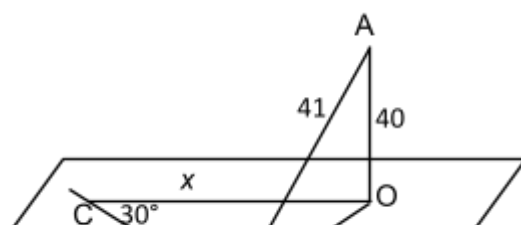


5

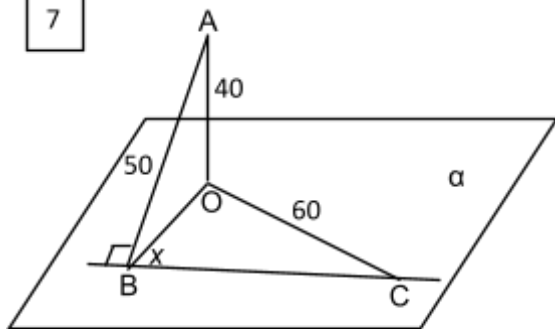


49

6

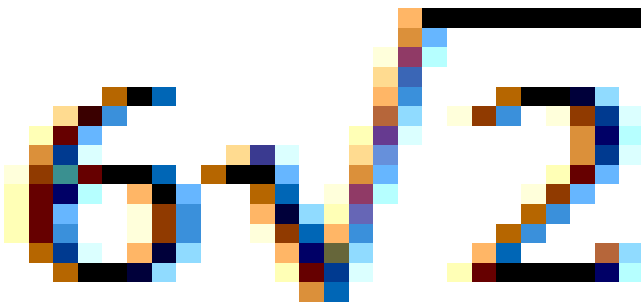
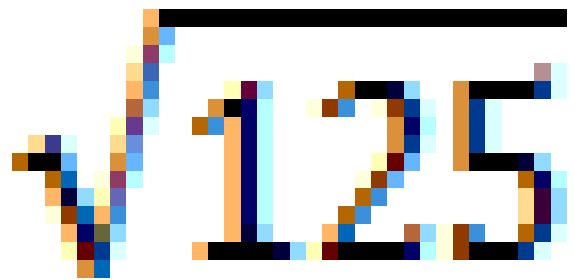


7



Відповідь _____

мал. 7



УРОК №3. Вимірювання кутів та відстаней у просторі.

Мета: Повторити ознаки перпендикулярності прямої та площини, двох площин; встановити зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; повторити теореми, що дозволяють доводити перпендикулярність прямих і площин, особливу увагу звернути на теорему

про три перпендикуляри; застосовувати знання до розв'язування задач, побудови зображень найпростіших плоских і просторових фігур.

Питання практичного змісту

1. Як перевірити за допомогою вимірювань, чи є перпендикулярною до підлоги лінія, по якій з'єднуються дві суміжні стіни кімнати?
2. Як перевірити за допомогою рулетки вертикальність стовпа?
3. Як перевірити, чи перпендикулярна площина колеса до осі, на яку воно насаджено?
4. Як перевірити вертикальність стержня, користуючись лише прямокутним аркушем паперу?
5. Чому льодові бурульки, які звисають з даху навесні, можна вважати паралельними між собою (нехтуючи їхньою товщиною)?
6. Чому поверхню стола можна вважати горизонтальною, якщо він стійко стоїть на підлозі, тобто всі його ніжки однакові, торкаються підлоги і розміщені вертикально до неї.
7. Чому для встановлення горизонтальної платформи на горизонтальній поверхні досить помістити її на вертикальні опори однакової висоти?
8. Щоб переконатись у вертикальності двох стовпчиків, учень перевірів, що перший встановлено вертикально і висоти стовпчиків однакові. Відстані між їх основами та верхівками теж однакові. Чи можна після цього зробити висновок, що й другий стовпчик встановлено вертикально?
9. Як на практиці перевірити, чи перпендикулярна площина стіни до площини підлоги?
10. Чому висок щільно прилягає до вертикальної стіни, а до похилої – ні?

11. Чому поверхня дверей, незалежно від того, зачинені вони чи відкриті, розміщена вертикально до підлоги?
12. Як до невертикального стовпа прикріпити вертикальну стінку?
13. Як, користуючись лише рулеткою, визначити кут нахилу стовпа до землі?
14. Труба розміщена на схилі гори. Запропонуйте спосіб визначення кута її нахилу до горизонтальної поверхні.
15. Як би ви вимірювали кут, утворений сонячним променем з поверхнею землі?
16. Запропонуйте спосіб визначення кута нахилу жолоба для стікання води з даху будівлі до поверхні землі.

Відстанню між фігурами називається довжина найменшого з відрізків, що з'єднують точки даних фігур.

1. Теорема

Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

2. *Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної із них.*

3. Дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр і до того ж тільки один. Він є спільним перпендикуляром до паралельних площин, які проходять через ці прямі.

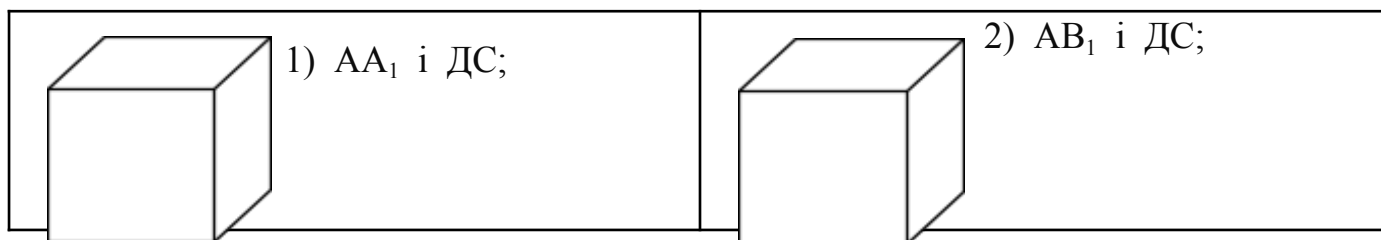
Теорема 1. Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані від однієї із прямих до паралельної їй площини, що містить іншу пряму.

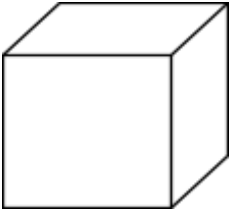
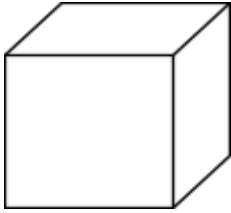
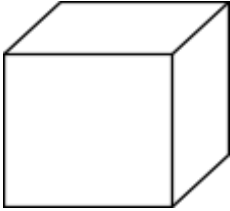
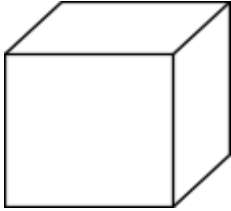
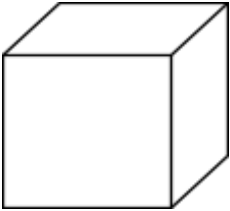
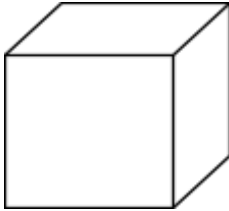
Теорема 2. Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між паралельними площинами, кожна з яких містить одну із цих прямих.

Теорема 3. Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між ортогональними проекціями цих прямих на площину, перпендикулярну одній із цих прямих.

Задачі на готових кресленнях

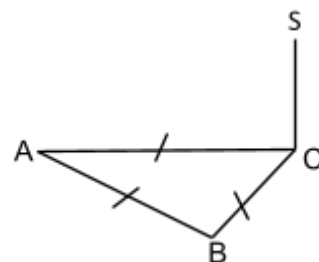
Даний куб. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ Знайдіть відстань між прямими:



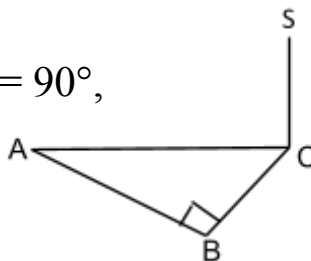
 3) AA_1 і B_1D ;	 4) AC і A_1B ;
 5) C_1E і D_1F , де E – середина A_1B , F – середина AC ;	 6) BD і O_1M , де M – середина AO ; O – точка перетину діагоналей AC і BD , O_1 – точка перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1
 7) AC_1 і BD ;	 8) AD і D_1P , де P – середина DC .

Побудувати перпендикуляр від точки S до прямої AB .

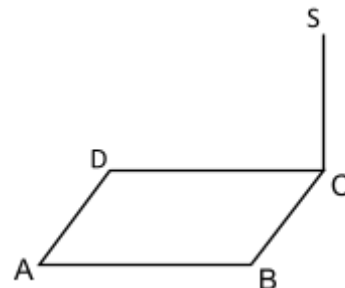
а) Трикутник ABC – рівносторонній, $SC \perp (ABC)$.



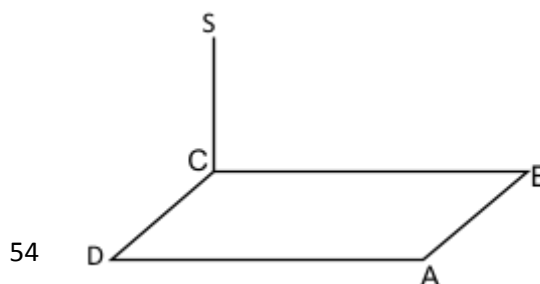
б) Трикутник ABC – прямокутний, $\angle B = 90^\circ$, $SC \perp (ABC)$.



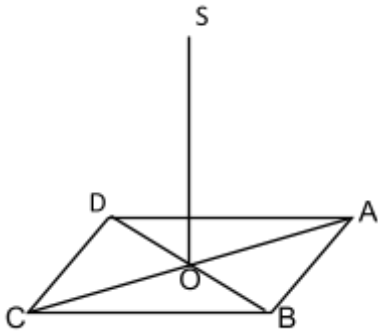
в) $ABCD$ – квадрат, $SC \perp (ABC)$.



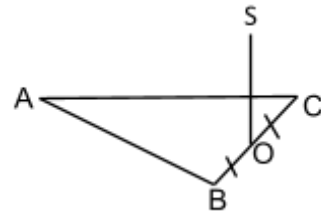
г) $ABCD$ – прямокутник, $SC \perp (ABC)$.



д) $ABCD$ – ромб, $SC \perp (ABC)$.



е) Трикутник ABC – рівносторонній,
 $BO = CO$, $SC \perp (ABC)$.



№1. Нехай точка O є серединою гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC ; OP – перпендикуляр до площини трикутника ABC , $OP=AB=4$ см. Знайдіть відстані:

- а) від точки P до сторони AC ;
- б) від точки A до площини COP ;
- в) від площини, що проходить через середини сторін AC і BC паралельно OP , до площини AOP ;
- г) від точки O до площини PAC .

№2. Нехай OS – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC з центром в точці O ; $AB=OS=2$.

- а) Знайдіть кут між прямою CS і площиною ABC .
- б) Знайдіть кут між прямою AO і площиною SOB .
- в) Визначте взаємне розміщення площин ABC і SOC
- г) Знайдіть кут між прямою AO і площиною SBC .
- д) Знайдіть відстань від точки B до прямої CS .

№3. Нехай точка O є серединою гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC ; OP – перпендикуляр до площини трикутника ABC , $OP=AB=4\text{см}$. Знайдіть відстані:

- а) від точки P до сторони AC ;
- б) від точки A до площини COP ;
- в) від площини, що проходить через середини сторін AC і BC паралельно OP , до площини AOP ;
- г) від точки O до площини PAC .

№4 Нехай OS – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC з центром в точці O ; $AB=OS=2$.

- а) Знайдіть кут між прямою CS і площиною ABC .
- б) Знайдіть кут між прямою AO і площиною SOB .
- в) Визначте взаємне розміщення площин ABC і SOC
- г) Знайдіть кут між прямою AO і площиною SBC .
- д) Знайдіть відстань від точки B до прямої CS .

Завдання для самоконтролю

Усього 6 карток, в кожній 3 завдання. Найбільш простим є перше завдання. Другим завданням є задача на доведення. Третє завдання - довести теорему. Четверте завдання - задача на побудову.

Картка №1

1. Сформулюйте визначення паралельності прямої і площини; ознаку паралельності прямої і площини.
2. У основі піраміди $MABCD$ - квадрат. Доведіть, що $AB \parallel (MCD)$.
3. Доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
4. Виконайте побудову прямої, яка паралельна даній площині.

Картка №2

1. Сформулюйте визначення перпендикулярності прямої і площини; ознаку перпендикулярності прямої і площини.
2. Дано куб $ABC A_1 B_1 C_1 D_1 A_1 B_1 C_1 D_1$. Знаючи, що всі грані куба квадрати, доведіть, що AA_1 перпендикулярна до (ABC) .
3. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
4. Виконайте побудову площини, перпендикулярної до даної прямої.

Картка №3

1. Сформулюйте визначення паралельності площин; ознаку паралельності площин.
2. Дано куб $ABC A_1 B_1 C_1 D_1 A_1 B_1 C_1 D_1$. Знаючи, що всієї грані куба - квадрати, доведіть, що $(ABC) \parallel (A_1 B_1 C_1)$.
3. Доведіть ознаку паралельності площин.
4. Побудуйте площину, паралельну даній площині.

Картка №4

1. Сформулюйте властивість про лінії перетину двох паралельних площин третьою площиною.
2. Площини основ куба перетинаються площиною по прямих MK і PE . Доведіть, що $MK \parallel PE$.
3. Доведіть властивість про лінії перетину двох паралельних площин третьою площиною.
4. Побудуйте переріз куба $ABC A_1 B_1 C_1 D_1 A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки $D, K, B_1 B_1$, де точка K належить середині ребра $A A_1 A_1$. Визначити вид перерізу.

Картка №5

1. Сформулюйте визначення перпендикулярності площин; ознаку перпендикулярності площин.
2. Дано куб $ABC A_1 B_1 C_1 D_1 A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть, що будь-яка площина, що проходить через пряму $A A_1 A_1$, перпендикулярна до (ABC) .
3. Доведіть ознаку перпендикулярності площин.
4. Точка O - точка перетину діагоналей трапеції ABC . SO перпендикуляр до площини трапеції. Побудуйте площину, що проходить через SO , перпендикулярно до площини трапеції.

Картка №6

1. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.

2. Дано куб $ABC A_1 B_1 C_1 D_1 A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть, що DC перпендикулярна до $A_1 A_1 D$.
3. Доведіть теорему про три перпендикуляри.
4. Дано прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C . BM -перпендикуляр до площини трикутника ABC . Побудуйте трикутник MAC і визначьте його вид.

Діагностична контрольна робота з геометрії, 11 клас

ВАРІАНТ 1

Ліва сторона

Частина 1 (3×0,5б)

№1. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}(-3;1)$; $\vec{b}(-4;3)$.

А) $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$; Б) $\frac{-9}{5\sqrt{10}}$; В) 0,24; Г) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

№2. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см та 21 см. З вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD , довжина якого 15 см. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.

А) $\sqrt{241}$ см; Б) 17 см; В) $\sqrt{161}$; Г) $\sqrt{46}$.

№3. Площина α , яка паралельна стороні AB трикутника ABC , перетинає сторону AC в точці K , а сторону BC в точці M . Знайти AB , якщо $KC = 12$ см, $AC = 18$ см, $KM = 36$ см.

А) 24 см; Б) 18 см; В) 54 см; Г) 24 см.

Частина 2.

№4 (26). $ABCD$ – паралелограм, BE та FD – перпендикуляри до площини ABC . Довести, що площини ABE та DFC паралельні.

№5 (36). Точка рівновіддалена від сторін правильного трикутника на 49 см. Периметр трикутника дорівнює 144 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

Частина 3.

№6 (46). Побудувати переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, яка проходить через діагональ основи AC паралельно діагоналі $B_1 D$ куба.

Права сторона

Частина 1 (3×0,56)

№1. Знайти косинус кута між векторами $\vec{c}(-8;-6)$; $\vec{d}(-4;-2)$.

А) $\frac{-11}{5\sqrt{5}}$; Б) $\frac{22}{\sqrt{21}}$; В) $\frac{11\sqrt{5}}{25}$; Г) 0,088.

№2. $ABCD$ – прямокутник, MA – перпендикуляр до площини прямокутника, $\angle MCA = 60^\circ$, $DC = 3$ см, $CB = 4$ см. Знайти площу трикутника MBC .

А) $4\sqrt{21}$ см²; Б) $8\sqrt{21}$ см²; В) $2\sqrt{21}$; Г) $\sqrt{21}$.

№3. Дві паралельні площини α і β , перетинають сторону BA трикутника ABC в точках D і D_1 , а сторону BC в точках E і E_1 . Знайти довжину DE , якщо $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см.

А) 36 см; Б) 24 см; В) 18 см; Г) 108 см.

Частина 2.

№4 (26). $ABCD$ – паралелограм, AN та CK – перпендикуляри до площини ABC . Довести, що площини AND та KBC паралельні.

№5 (36). Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 27 см. Точка рівновіддалена від вершин цього трикутника на 14 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

Частина 3.

№6 (46). Побудувати переріз куба $DA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через діагональ B_1D куба паралельно діагоналі основи AC .

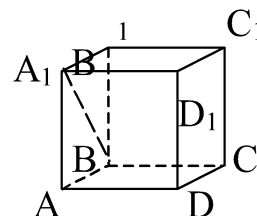
ВАРІАНТ 2

1 варіант, I частина

1. Якщо паралельні проєкції двох прямих на одну площину перетинаються, то ці прямі не можуть...

- А. бути мимобіжними Б. бути паралельними В. перетинатися
Г. мати спільні точки

2. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пряма BA_1 утворить із площиною ABC кут...



- А. 30° Б. 45° У. 60° М. 90°

3. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Чому дорівнює кут між площинами $A_1 D_1 C$ і ABC ?

- А. 30° Б. 45° У. 60° М. 90°

II частина

4. Із точки, яка віддалена на відстані 4 см від площини, проведені дві похилі до цієї площини довжиною 5 см і $4\sqrt{5}\sqrt{5}$ см. Кут між проєкціями цих похилих дорівнює 60° . Знайдіть відстані між основами похилих.

5. Сторони прямокутника рівні 9 см і 12 см. Із середини більшої сторони встановлений перпендикуляр довжиною 4,8 см до площини прямокутника. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до однієї з діагоналей.

III частина

6. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Крпки К, Z, М, N – середини ребер $A_1 D_1$, $D_1 C_1$, DC , AD відповідно. Доведіть, що площина, що проходить через ці точки паралельна площини чотирикутника $AA_1 C_1 C$.

Оцінювання завдань

1	2	3	4	5	6			
1	1	1	2	2	5			

ВАРІАНТ 3

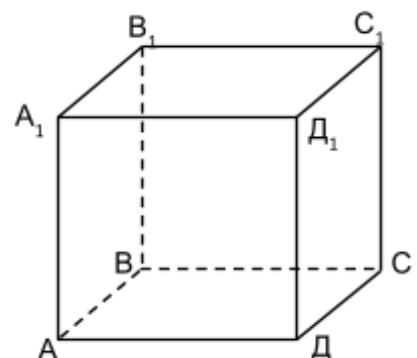
Ліва сторона

Частина перша

(1 завдання – 0,5 бали)

Завдання 1-8 містять по чотири варіанта відповідей, із яких тільки ОДНА відповідь правильна.

- Скільки площин можна провести через три точки?
 А) одну; Б) нескінченно багато;
 В) одну або нескінченно багато; Г) одну або жодної.
- Дві прямі не паралельні та не перетинаються. Скільки площин можна провести через ці прямі?
 А) одну; Б) дві; В) жодної; Г) нескінченно багато.
- Точка М лежить поза площиною трикутника АВС. Яке взаємне розташування прямих АМ і ВС?
 А) перетинаються; Б) мимобіжні;
 В) паралельні; Г) визначити неможливо.
- На малюнку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Серед даних пар прямих вкажіть пару паралельних прямих.
 А) AB і $A_1 C_1$; Б) AD і BB_1 ;
 В) BC і $A_1 D_1$; Г) $A_1 B_1$ і VD .



5. Точка А віддалена від площини α на 8 см. Із цієї точки проведена до площини α похила АВ довжиною 10 см. Знайдіть довжину проекції похилої АВ на площину α .

А) 2 см; Б) 6 см; В) 8 см; Г) 5 см.

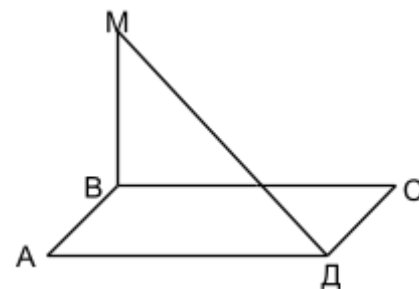
6. Три площини α , β і γ такі, що $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$. Укажіть вірне твердження.

А) площини α і γ паралельні; Б) площини α і γ перпендикулярні;

В) кут між площинами α і γ дорівнює 45° ;

Г) жодне з тверджень А) – В) не є вірним.

7. Пряма МВ перпендикулярна площині паралелограма АВСД, зображеного на малюнку.



Вкажіть кут між прямою МД та площиною паралелограма.

А) $\angle МДА$; Б) $\angle МВД$; В) $\angle МДВ$; Г) $\angle МДС$.

8. Площа многокутника дорівнює 16 см^2 , а площа його ортогональної проекції на деяку площину $8\sqrt{2} \text{ см}^2$. Скільки становить кут між площиною многокутника та площиною проекції?

А) 0° ; Б) 45° ; В) 30° ; Г) 60° .

Частина друга

(1 завдання – 1 бал)

Розв'яжіть завдання 9-11 та запишіть відповідь.

9. Відрізок АВ не перетинає площину α , точки А і В віддалені від цієї площини на 9 см та 13 см. Скільки становить відстань від середини відрізка АВ до площини α ?

10. Точка Д знаходиться на відстані 4 см від кожної з вершин правильного трикутника ABC, сторона якого становить 6 см. Знайдіть відстань від точки Д до площини ABC.

11. Із точки А до площини α проведені перпендикуляр АД та похилі АВ і АС, АВ=25 см, АС = 17 см, проекції похилих на площину α відносяться як 5 : 2. Знайдіть відстань від точки А до площини α .

Частина третя

(1 завдання – 2,5 бали)

Розв'яжіть завдання 12 та 13 з повним обґрунтуванням.

12. Побудуйте переріз піраміди SABС площиною, яка проходить через точки Д, Е та F, які належать відповідно ребрам АВ, ВС та SC, при цьому прямі ДЕ та АС не паралельні.

13. Через катет прямокутного рівнобедреного трикутника проведена площина, яка утворює з площиною трикутника кут 60° . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.

1	2	3	4	5	6	7	8
А	В	Б	В	Б	Г	В	Б
9	10	11		12	13		
11 см	2 см	4 см					

Права сторона

Частина перша

(1 завдання – 0,5 бали)

ОДНА відповідь правильна.

1. Скільки площин можна провести через дві різні прямі?

- A) одну; Б) нескінченно багато;
- В) одну або жодної; Г) одну або нескінченно багато.

2. Дві прямі a і b паралельні площині α . Яке взаємне розташування прямих a і b ?

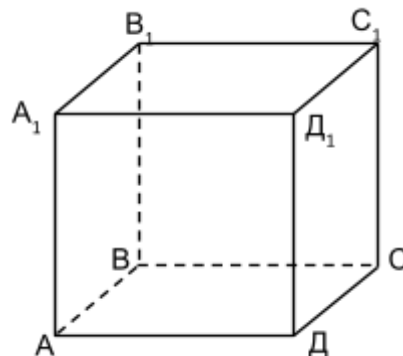
- А) обов'язково паралельні; Б) обов'язково перетинаються;
В) обов'язково мимобіжні; Г) визначити неможливо.

3. Точка М лежить поза площиною квадрата АВСД. Яке взаємне розташування прямих МВ і АС?

- А) визначити неможливо; Б) мимобіжні;
В) паралельні; Г) перетинаються.

4. На малюнку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Серед даних пар прямих вкажіть пару паралельних прямих.



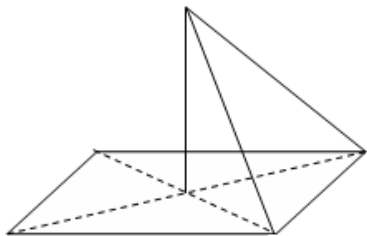
- А) A_1D і B_1C_1 ; Б) AA_1 і BD ;
В) A_1B_1 і A_1C_1 ; Г) DC і A_1B_1 .

5. Точка В віддалена від площини β на 12 см. Із цієї точки проведена до площини β похила ВС. Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції на площину β дорівнює 5 см.

- A) 13 см; Б) 17 см; В) 15 см; Г) 11 см.

6. Прямі m і n і площина α такі, що $m \parallel n$, $m \perp \alpha$. Укажіть вірне твердження.

- А) пряма n паралельна площині α ;



Б) пряма n перпендикулярна площині α ;

В) пряма n належить площині α ;

Г) пряма n перетинає площину α під кутом 60° .

7. Пряма KO перпендикулярна площині ромба $ABCD$, зображеного на малюнку. Вкажіть кут між прямою BK та площиною ромба. А)

$\angle BOK$; Б) $\angle ABK$; В) $\angle OBK$; Г) $\angle CBK$.

8. Площа многокутника дорівнює 24 см^2 . Знайдіть площу ортогональної проекції цього многокутника на площину, яка утворює кут 60° з площиною многокутника см^2 . А) 48 см^2 ; Б) 36 см^2 ; В) 24 см^2 ;

Г) 12 см^2 .

Частина друга (1 завдання – 1 бал)

Розв'яжіть завдання 9-11 та запишіть відповідь.

9. Через кінці відрізка DP та його середину A проведені паралельні прямі, які перетинають деяку площину α у точках D_1 , P_1 та A_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка PP_1 , якщо відрізок DP не перетинає площину α і $DD_1 = 25 \text{ см}$, $AA_1 = 13 \text{ см}$.

10. Точка K знаходиться на відстані 4 см від кожної з вершин правильного трикутника ABC . Знайдіть довжину сторони трикутника, якщо точка K віддалена від площини ABC на 2 см .

11. Із точки B до площини α проведені перпендикуляр BO та похилі BA і BC . Відомо, що довжини проекцій похилих на площину α становлять: $AO = 12 \text{ см}$, $OC = 30 \text{ см}$, а довжини похилих відносяться як $10 : 17$. Знайдіть довжину похилої BA .

Частина третя

(1 завдання – 2,5 бали)

Розв'яжіть завдання 12 та 13 з повним обґрунтуванням.

12. Побудуйте переріз піраміди SABCD площиною, яка проходить через точку М, що належить ребру CD, та паралельна площині BSD.

13. Через сторону правильного трикутника проведена площина, яка утворює з двома іншими сторонами трикутника кути по 60° . Знайдіть кут між площиною даного трикутника та проведеною площиною.

1	2	3	4	5	6	7	8
В	Г	Б	Г	А	Б	А	Г
9	10	11		12	13		
1 см	3 см	20 см					

Література

1. Збірник Федченко Л. Я., Литвиненко Г. М. «Різнорівневі завдання для тематичних та підсумкових контрольних робіт 10-11 класи» , Донецьк-2004
2. Л.Я. Федченко, Донецьк, „Каштан”, 2009. Збірник завдань для тематичних і підсумкових атестацій. Геометрія 7-9 класи.
3. Г.М. Литвиненко, Л.Я Федченко, В.А.Швець, Донецьк, 2000. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Геометрія 10-11.
4. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С. Геометрія. Дидактичний матеріали з геометрії. 10-11 класи. Тернопіль. Навч.кн. «Богдан», 2003 р.

